Clase 31 :

Gradiente y Plano tangente

CDIVV - 2023 - 2sem

Eugenia Ellis

eellis@fing.edu.uy

Def: Gradiente

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable en (x_0, y_0), el gradiente de f en (x_0, y_0) es el vector

$$\nabla f(x_0,y_0) := \left(f_x(x_0,y_0),\, f_y(x_0,y_0)\right)$$
$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)$$

Obs: Si f es diferenciable en (x_0, y_0) la derivada direccional para $v = (v_1, v_2)$ es

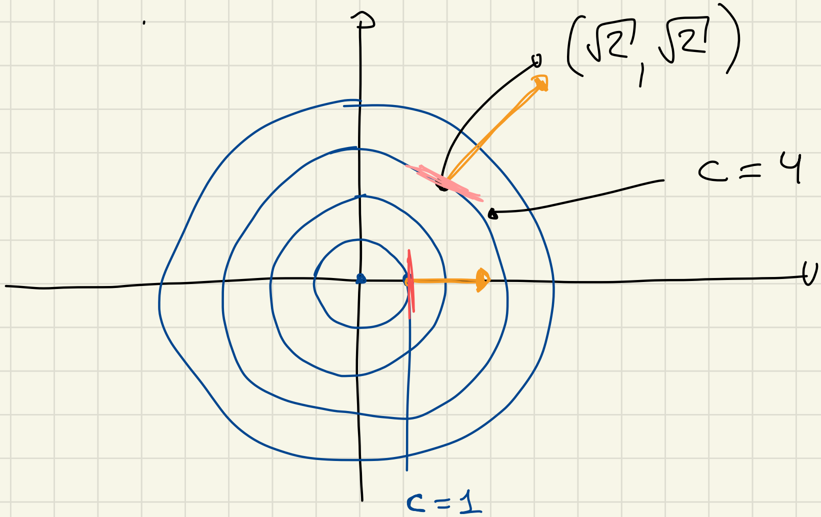
$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\, v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\, v_2$$
$$= \langle \nabla f(x_0,y_0),\, v \rangle$$

- La derivada direccional se maximiza cuando v es colineal al gradiente de f.
- Veremos más adelante que el gradiente es ortogonal a las curvas de nivel

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right)$$

$$= (2x, 2y).$$



$(x_0, y_0) = (1, 0)$ $\quad$ $\nabla f(1,0) = (2, 0)$

$(x_0, y_0) = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$ $\quad$ $\nabla f(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = (2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$

f es diferenciable en $(x_0, y_0) \iff$

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\, h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\, k + r(h,k)$$

en donde $\displaystyle \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{r(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0$

f es diferenciable en $a = (x_0, y_0) \iff$

$$f(a+v) = f(a) + \langle \nabla f(a), v \rangle + r(v)$$

en donde. $\displaystyle \lim_{v\to 0} \frac{r(v)}{\|v\|} = 0$

Plano tangente

El plano tangente de f en (x_0, y_0) es

$$\boxed{z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)}$$

Ejemplo

Sea $f(x,y) = x^2 + y^2$, $(x_0, y_0) = (1,2)$

el plano tangente de f en $(1,2)$ es

$f_x(x,y) = 2x \qquad f_y(x,y) = 2y$

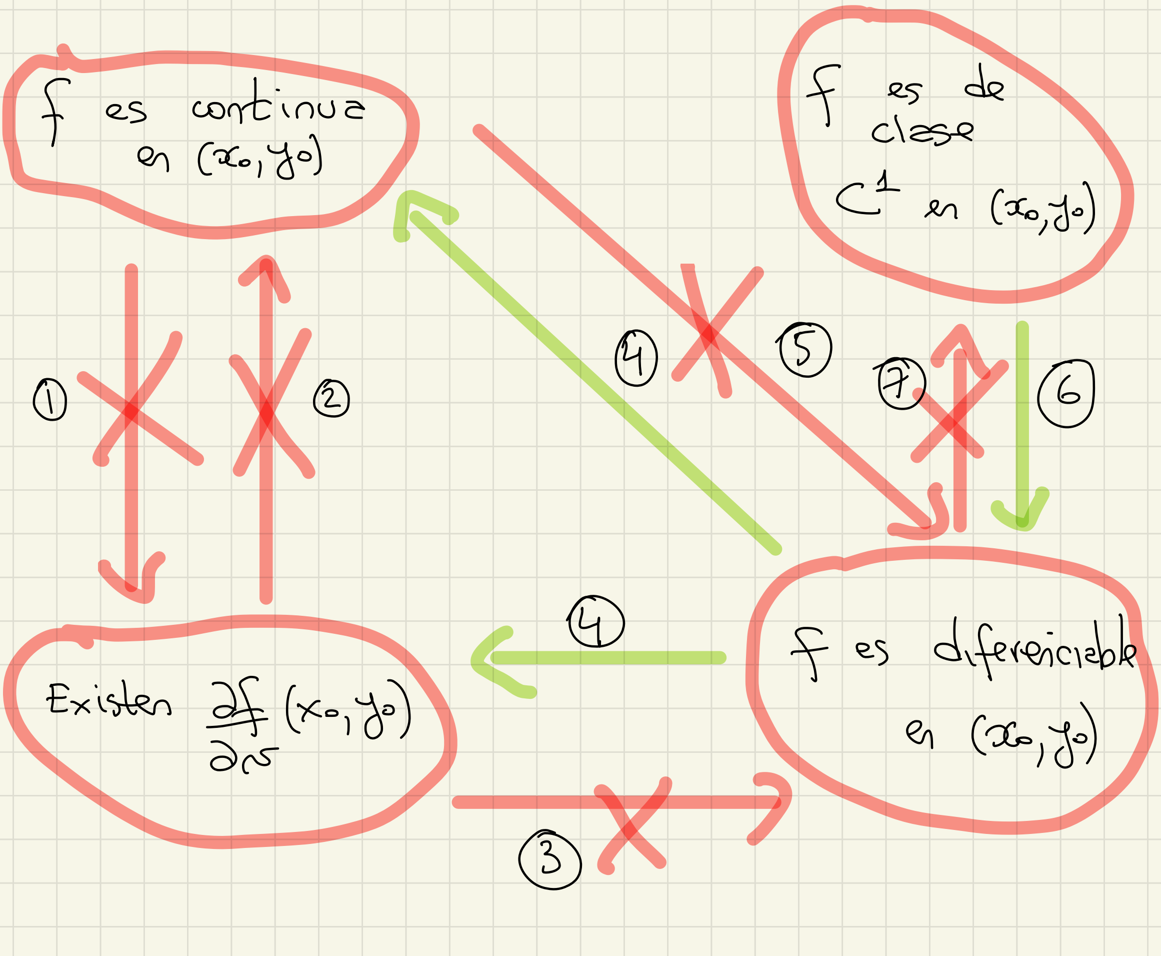
$$z = f(1,2) + f_x(1,2)(x-1) + f_y(1,2)(y-2)$$

$$= 5 + 2(x-1) + 4(y-2).$$

$$\boxed{z = 5 + 2(x-1) + 4(y-2)}$$

Def

f es de clase C^1 en (x_0, y_0) si existe $B((x_0, y_0), \delta)$ en donde $\forall (x,y) \in B((x_0,y_0),\delta)$ existen las derivadas parciales y f_x y f_y son continuas en (x_0, y_0).



① Encontrar una función continua en (x_0, y_0) que no tenga derivadas direccionales en (x_0, y_0)

② Encontrar una función que tenga todas las derivadas direccionales y que no sea continua.

③ = ②

④ Teorema de condiciones necesarias de diferenciabilidad.

⑤ = ①

⑥ Teorema de condición suficiente de diferenciabilidad

⑦ Ver un ejemplo de función diferenciable que no es C^1

⑦

Sea $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\,\text{sen}\,\dfrac{1}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

Derivadas parciales de f en (0,0)

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2\cdot\text{sen}\left(\frac{1}{h^2}\right)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\underbrace{h}_{\to 0}\cdot\underbrace{\text{sen}\left(\frac{1}{h^2}\right)}_{\text{acotado}}=0$$

$$f_y(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2\,\text{sen}\left(\frac{1}{h^2}\right)}{h}$$

$$=0$$

$$\nabla f(0,0)=\left(f_x(0,0),f_y(0,0)\right)=(0,0).$$

f es diferenciable

$v = (h,k)$

$$r(h,k) = h^2+k^2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h^2+k^2}\right).$$

$$\lim_{v \to 0} \frac{r(v)}{\|v\|} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{(h^2+k^2)\cdot \operatorname{sen}\frac{1}{h^2+k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \lim_{\substack{\rho \to 0 \\ \theta \in [0,2\pi)}} \frac{\rho^2 \overbrace{(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta)}^{=1} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\rho^2 (\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta)}\right)}{\sqrt{\rho^2 \underbrace{(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta)}_{=1}}}$$

polares

$h = \rho\cos\theta$

$k = \rho \operatorname{sen}\theta$

$$= \lim_{\rho \to 0} \frac{\rho^{\cancel{2}} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\rho^2}\right)}{\cancel{\sqrt{\rho^2}}}$$

$$= \lim_{\rho \to 0} \underbrace{\rho}_{\to 0} \; \overbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\rho^2}\right)}^{\text{acotado}} = 0$$

$\Rightarrow$ f es diferenciable en $(0,0)$.

f no es de clase C^1:

$$f_x(0,0) = 0 \qquad f_y(0,0) = 0.$$

$$f(x,y) = (x^2+y^2) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$$

$(x,y) \neq (0,0)$

$$f_x(x,y) = 2x \operatorname{sen} \frac{1}{(x^2+y^2)} + (x^2+y^2) \cdot \frac{\partial \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)}{\partial x}$$

$$= 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x^2+y^2} + (x^2+y^2) \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\left(\frac{-2x}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

$$= 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x^2+y^2} + \cos \frac{1}{x^2+y^2} \frac{-2x}{(x^2+y^2)}$$

$$= 2x \left(\operatorname{sen} \frac{1}{x^2+y^2} - \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right)$$

$$f_x(x,y) = \begin{cases} 2x \cdot \left(\operatorname{sen} \frac{1}{x^2+y^2} - \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) \frac{1}{x^2+y^2} \right) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

¿Es $f_x(x,y)$ continua en $(0,0)$?

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y) = \text{?} \qquad \nexists$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ x=0}} f_x(x,y) = 0$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y=x}} \underbrace{2x\left(\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2x^2}\right) - \cos\left(\frac{1}{2x^2}\right) \frac{1}{2x^2} \right)}_{\underbrace{2x}_{\downarrow\, 0} \underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2x^2}\right)}_{\text{acotado}} - \underbrace{\cos\left(\frac{1}{2x^2}\right) \cdot \frac{\cancel{2}x}{x^{\cancel{2}}}}_{\nexists}}$$

$f_x(x,y)$ no es continua en $(0,0)$

$\Rightarrow$ f no es de clase C^1.