Programación 3
Año 2023

Práctico 13

Ejercicio 1. Consideramos un sistema **lineal** de inecuaciones sobre un conjunto de variables $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. El *Problema de la Programación Entera Binaria, (0–1) IPROG*, consiste en decidir si existe una asignación de valores enteros en $\{0, 1\}$ a las variables tal que el sistema se satisface. Por ejemplo, para el sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 & \leq 3 \\ x_1 & \leq 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 & \geq 2 \end{cases}$$

la respuesta al problema de decisión es SÍ, porque la asignación $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ satisface todas las inecuaciones.

(a) Demuestre que *(0–1) IPROG* pertenece a la clase $\mathcal{NP}$.

(b) Demuestre que $SAT \leq_P$ *(0–1) IPROG*, donde recordamos que SAT es el problema de *Satisfacción Booleana*.

Sugerencia: Para construir una reducción de tiempo polinomial

- Construya una instancia de *(0–1) IPROG* con la misma cantidad de variables que la de SAT.
- Interprete los valores de verdad como enteros del conjunto $\{0, 1\}$.
- Exprese cada cláusula de la instancia de SAT como una inecuación entre variables de la instancia de *(0–1) IPROG*.

(c) Concluya que *(0–1) IPROG* es NP-Completo.

Ejercicio 2 (Kleinberg & Tardos, Ex. 8.9)**.** Consideramos una red de comunicaciones, modelada por un grafo dirigido $G = (V, E)$. Hay c usuarios a los cuales les interesa usar la red. Cada usuario i, $1 \leq i \leq c$, hace un requerimiento para reservar un camino específico P_i en G sobre el cual transmitir sus datos. Al operador de la red le interesa aceptar la máxima cantidad de solicitudes de caminos posible, bajo la restricción de que no puede haber nodos en común entre ningún par de caminos que sean aceptados.

Definimos el *Path Selection Problem* (*PSP*) de la siguiente manera. Dado un grafo dirigido $G = (V, E)$, un conjunto de caminos $\{P_1, P_2, ..., P_c\}$ en G y un entero k, $0 \leq k \leq c$, ¿es posible seleccionar al menos k de dichos caminos

de modo que ningún par de ellos tenga nodos en común? Muestre que *PSP* es NP-completo.
Sugerencia: Busque una reducción desde el problema *Set Packing*.

Ejercicio 3 (Kleinberg & Tardos, Ex. 8.6)**.** Consideramos el problema de *Satisfacción Booleana* (*SAT*), especificado por un conjunto de cláusulas, $C_1, ..., C_k$, cada una de las cuales es una disyunción de términos sobre variables booleanas $x_1, ..., x_n$. Se dice que una instancia es *monótona* si cada término de cada cláusula consiste en una variable no negada, esto es, ningún término es de la forma $\bar{x}_i$.

Las instancias monótonas de *SAT* son muy fáciles de resolver, ya que asignándole valor de verdad 1 a todas las variables las cláusulas siempre se satisfacen. Por ejemplo, el conjunto de cláusulas $\{(x_1 \vee x_2), (x_1 \vee x_3), (x_2 \vee x_3)\}$ define una instancia monótona de *SAT*, y la asignación de 1 a todas las variables satisface todas las cláusulas. Sin embargo, observamos que asignar el valor 1 a las variables x_1 y x_2 es suficiente para satisfacer las tres cláusulas, independientemente del valor que asignemos a x_3. Resulta entonces natural preguntarse cuál es la cantidad mínima de variables x_i que es necesario fijar en 1 para satisfacer una determinada instancia monótona de *SAT*.

Dada una instancia monótona de *SAT* y un entero k, el problema de decisión *Satisfacción Monótona con Pocas Variables Verdaderas* (*SAT-MON*) pregunta: ¿hay alguna asignación de valores de verdad en la cual a lo sumo a k variables se les asigna el valor 1 y todas las cláusulas se satisfacen? Muestre que *SAT-MON* es NP-completo.
Sugerencia: Busque una reducción desde un problema sobre grafos.