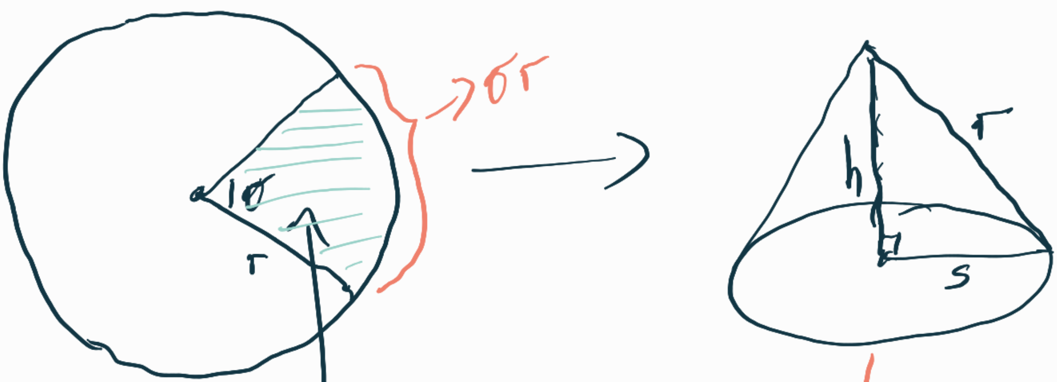
Clase 30

<u>Ejercicio:</u> Queremos construir un gorro de cumpleaños (cono) a partir de un círculo de radio $\underline{r>0}$ de la siguiente forma:



recortamos una sección angular de ángulo σ

perímetro $= 2\pi r - \sigma r$
perímetro $= 2\pi s$

en radianes

Hallar el valor del ángulo $\sigma \in [0, 2\pi)$ de forma de maximizar el volumen del cono.

Solución:

Obs: $2\pi s = 2\pi r - \theta r$

$\Rightarrow \theta r = 2\pi r - 2\pi s$

$\rightarrow \boxed{\theta = 2\pi - 2\pi\left(\frac{s}{r}\right)}$ (en radianes)

Obs: $h^2 + s^2 = r^2 \rightarrow \boxed{s^2 = r^2 - h^2}$

Volumen $V = \dfrac{\pi s^2 h}{3}$

Función a maximizar: $V(h) = \dfrac{\pi(r^2 - h^2)h}{3}$

$$V(h) = \frac{\pi r^2}{3} \cdot h - \frac{\pi}{3} \cdot h^3$$

$$V'(h) = \frac{\pi r^2}{3} - \frac{\pi}{3} \cdot 3h^2 = 0 \Leftrightarrow r^2 - 3h^2 = 0$$

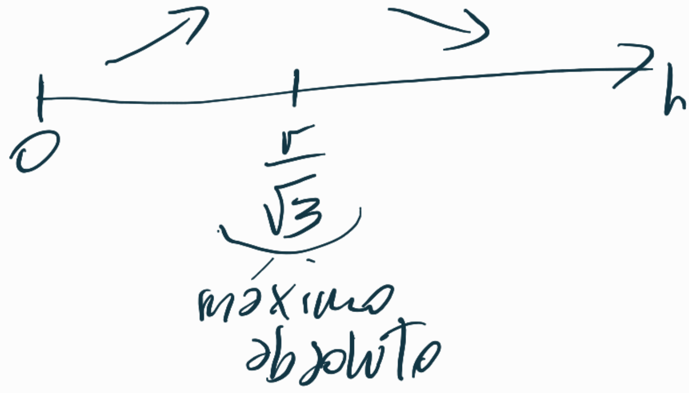
$$\Leftrightarrow 3h^2 = r^2$$

$$\Leftrightarrow h^2 = \frac{r^2}{3}$$

$$\Leftrightarrow h = \frac{\pm r}{\sqrt{3}}$$

sgn(V'): $\quad - \quad -r/\sqrt{3} \quad + \quad | \quad + \quad r/\sqrt{3} \quad - \quad \rightarrow h$

Crecimiento de V :



El máximo volumen se alcanza cuando

$$h = \frac{r}{\sqrt{3}}$$

$$s^2 = r^2 - h^2 = r^2 - \frac{r^2}{3} = \frac{2}{3} \cdot r^2$$

$$s = \sqrt{\frac{2}{3}}\, r \longrightarrow \frac{s}{r} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\sigma = 2\pi - 2\pi \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = 2\pi\left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

= el ángulo a recortar para maximizar el volumen

En grados σ vale $360\left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right) \approx 66^\circ$.

teo. fundamental del cálculo (Apostol 5.1 - 5.3)

Primer teo. fundamental del cálculo

teo. Sea f integrable en $[a,b]$ y sea $c \in (a,b)$.

Definimos $F(x) = \int_c^x f(t)\,dt$, $x \in [a,b]$.

Si f es continua en $x_0 \in (a,b)$

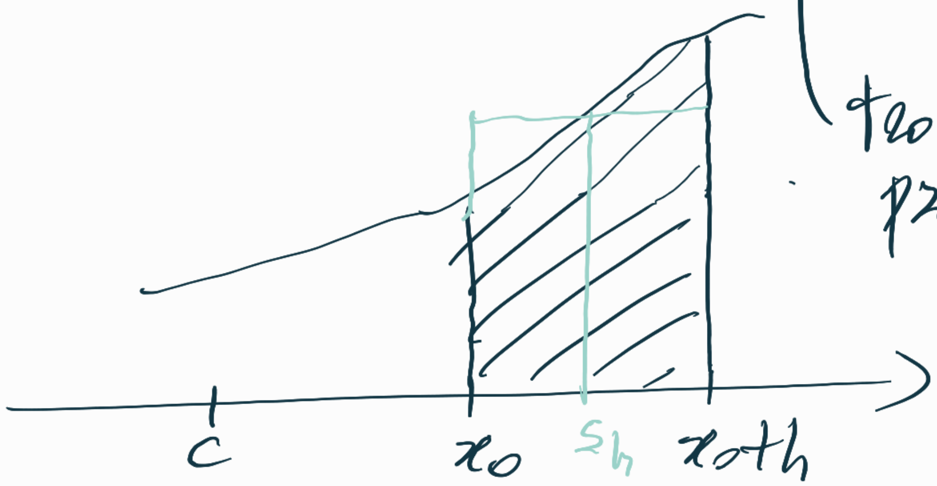
$\Rightarrow F$ es derivable en x_0 y $F'(x_0) = f(x_0)$.

Obs. Caso "fácil": si f es continua en $[a,b]$

$$F(x_0+h) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt = h\, f(s_h)$$

con $s_h \in [x_0, x_0+h]$

teo. valor 1/2 para integrales



$$\Rightarrow \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = f(s_h) \to f(x_0) \text{ cuando } h \to 0$$

$$\Rightarrow F'(x_0) = f(x_0).$$

Dem del teo.

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = \frac{1}{h}\cdot\int_{x_0}^{x_0+h} \overbrace{f(t)}^{f(x_0)+f(t)-f(x_0)}\,dt$$

$$= \underbrace{\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)\,dt}_{= h f(x_0)} + \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}(f(t)-f(x_0))\,dt$$

$$= f(x_0) + \underbrace{\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}(f(t)-f(x_0))\,dt}_{= G(h)}$$

Nos queda por probar que $\lim_{h\to 0} G(h) = 0$

Sea $\varepsilon>0$, queremos hallar $\delta>0$ tal que si $|h|<\delta \Rightarrow |G(h)|<\varepsilon$.

Como f es cont. en $x_0 \Rightarrow \lim_{t\to x_0} f(t) = f(x_0)$

$\therefore\ \exists\, \delta'>0$ t.q. si $|t-x_0|<\delta' \Rightarrow |f(t)-f(x_0)|<\varepsilon$

$\underline{\text{Obs}}$: $$|G(h)| = \frac{1}{|h|}\left|\int_{x_0}^{x_0+h}(f(t)-f(x_0))\,dt\right|$$

$$\underset{\text{des. }\Delta}{\leq} \frac{1}{|h|}\int_{\min\{x_0,x_0+h\}}^{\max\{x_0,x_0+h\}}|f(t)-f(x_0)|\,dt$$

tomamos $\delta = \delta'$:

$\boxed{h \geq 0}$ $$|G(h)| \leq \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}|f(t)-f(x_0)|\,dt$$

Si $|h| < \delta'$ y $t \in [x_0, x_0+h]$

$\Rightarrow |t - x_0| \leq h < \delta'$

$\Rightarrow |f(t)-f(x_0)| < \varepsilon$

$$\Rightarrow |G(h)| < \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}\varepsilon\,dt = \frac{1}{h}\cdot\varepsilon\cdot h = \varepsilon$$

$\boxed{h \leq 0}$ $\quad |G(h)| \leq \dfrac{1}{-h} \displaystyle\int_{x_0+h}^{x_0} |f(t) - f(x_0)|\, dt$

si $\underset{\substack{\parallel \\ -h}}{|h|} < \delta'$ y $t \in [x_0+h, x_0]$

$\Rightarrow |t - x_0| \leq -h < \delta'$

$\Rightarrow |f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$

$$\Rightarrow |G(h)| < \frac{1}{-h} \int_{x_0+h}^{x_0} \varepsilon\, dt = \frac{1}{-h} \cdot \varepsilon \cdot (-h) = \varepsilon$$

Luego

$$\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = f(x_0) + G(h) \xrightarrow[h \to 0]{} f(x_0)$$

$\therefore F'(x_0) = f(x_0)$. $\square$

Def. Sea f definida en $[a,b]$, decimos que F es una primitiva de f si $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in (a,b)$.

Obs: Si F_1 y F_2 son dos primitivas de f

$$\Rightarrow (F_1 - F_2)' = F_1' - F_2' = f - f = 0$$

en (a,b) $\Rightarrow F_1 - F_2 = \text{constante}$ en $[a,b]$

$$\left(\exists k \in \mathbb{R} : F_1(x) - F_2(x) = k, \ \forall x \in [a,b] \right.$$
$$\left. F_1(x) = F_2(x) + k, \ \forall x \in [a,b] \right)$$

Ejemplo: Si $f(x) = x^2 \Rightarrow F_1(x) = \dfrac{x^3}{3}$

es una primitiva de f pues

$$F_1'(x) = \frac{3x^2}{3} = x^2 = f(x), \ \forall x \in \mathbb{R}$$

también $F_2(x) = \dfrac{x^3}{3} + 8$, $F_3(x) = \dfrac{x^3}{3} - 1$

son primitivas de $f(x)$.

teo (2º teo. fundamental del cálculo):

Sea f continua en $[a,b]$, $c \in [a,b]$.

Sea F una primitiva de f.

Entonces $F(x) = F(c) + \int_c^x f(t)\,dt$

Dem. Llamamos $A(x) = \int_c^x f(t)\,dt$

Por el 1er teo. fundamental del cálculo

$A'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a,b)$

$\Rightarrow$ A es una primitiva de f.

$\Rightarrow$ $F(x) = A(x) + k$ con $k \in \mathbb{R}$

F prim. de f

Con $x = c$: $F(c) = \underbrace{A(c)}_{0} + k = k$

$\Rightarrow F(x) = A(x) + F(c) = F(c) + \int_c^x f(t)\,dt$

$\square$