Clase 29

Def: $y = mx + n$ es una asíntota para f

si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} |f(x) - mx - n| = 0$

Ej: $f(x) = \underbrace{x}_{\text{lineal}} + \underbrace{1/x}_{\downarrow 0} \Rightarrow y = x$ es asíntota

$f(x) = \underbrace{3x - 1}_{\text{lineal}} - \underbrace{1/x^2}_{\downarrow 0} \Rightarrow y = 3x - 1$ asíntota

. Si $f(x)$ tiene asíntota $y = mx + n$

¿Cómo hallar m y n?

Obs. Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} |f(x) - mx - n| = 0$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \pm\infty} \frac{|f(x) - mx - n|}{|x|} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \pm\infty} \left| \frac{f(x) - mx - n}{x} \right| = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} \left|\frac{f(x)}{x} - m - \underbrace{\frac{n}{x}}_{\downarrow \atop 0}\right| = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} \left|\frac{f(x)}{x} - m\right| = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m} \quad (I)$$

Si conocemos m:

$$\lim_{x\to\pm\infty} |\underbrace{f(x) - mx}| - n| = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx) = n} \quad (II)$$

<u>Def</u>. Decimos que una función es <u>par</u> si $f(x) = f(-x)$.

Obs.

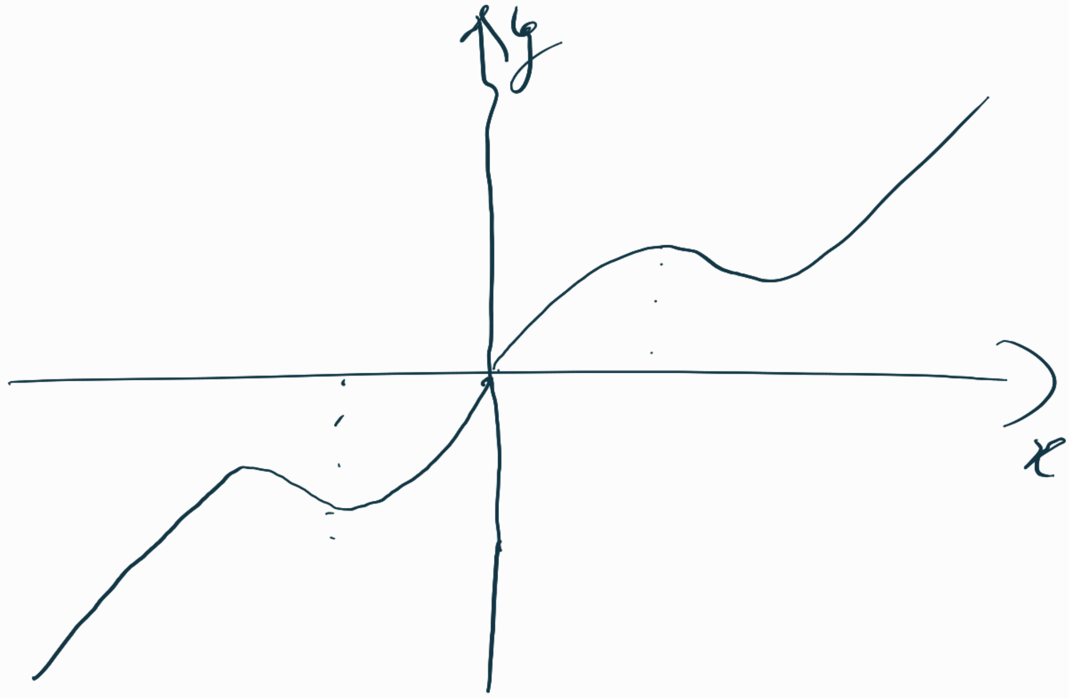
El gráfico de una función par va a ser simétrico con respecto al eje $\overline{Oy}$.

Ej: $f(x) = x^4 - \operatorname{sen}(x^2)$

Def. Decimos que una función es impar si $f(-x) = -f(x)$.

Obs. El gráfico de una función impar es simétrico respecto del origen

si $0 \in \operatorname{dominio}(f) \Rightarrow f(0) = 0$



Ej: $f(x) = \operatorname{sen}(x) + x$

$\boxed{\text{Obs: } f(x) = x^2 + x \text{ no es ni par ni impar.}}$

Ejercicio: Hacer el estudio analítico y graficar la función

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Obs: $f(-x) = \dfrac{1}{1+(-x)^2} = f(x), \ \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ es una función par

- $f > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

- $$\boxed{\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0}$$

- <u>Asíntotas $y = mx + n$</u>

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x+x^3} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{m = 0}$$

$$n = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) - mx = \lim_{x \to \pm\infty} \underbrace{\frac{1}{1+x^2}}_{\to 0} - \underbrace{0 \cdot x}_{= 0} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{n = 0}$$

f tiene asíntota $y = 0$

- $f'(x) = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$: $\operatorname{sgn}(f')$ $\quad + \quad 0 \quad - \quad$ (en $x = 0$)

crecimiento de f : $\quad \nearrow \quad 1 \quad \searrow \quad$ (en $x = 0$)

$f(0) = 1$

f tiene en $x=0$ un máximo relativo con valor $f(0)=1$.

Como $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0 \Rightarrow$ ese máximo es también absoluto

$$\cdot\ f''(x) = \frac{-2(1+x^2)^2-2(1+x^2)\cdot 2x\cdot(-2x)}{(1+x^2)^4}$$

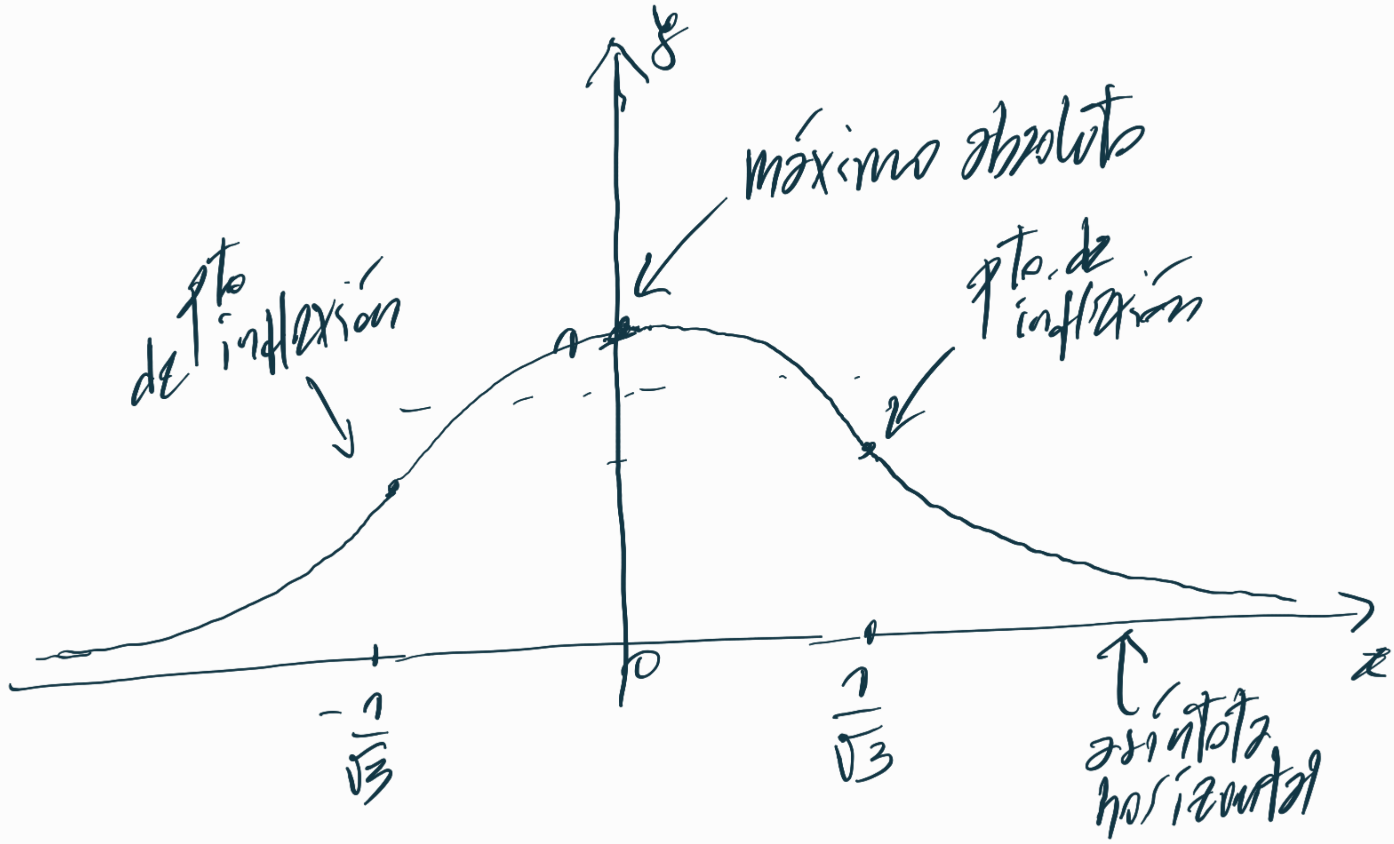
$$= \frac{-2(1+x^2)+8x^2}{(1+x^2)^3} = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$$

sgn(f''): $+$ $\quad -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad$ $-$ $\quad \frac{1}{\sqrt{3}} \quad$ $+$

ptos de inflexión

$$6x^2-2=0$$
$$3x^2-1=0$$
$$3x^2=1$$
$$x^2=1/3$$
$$x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{1+1/3} = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}$$



Problemas de optimización

1) Determinar la función objetivo que tenemos que maximizar o minimizar.

2) Expresar la función objetivo en función de un único parámetro.

3) Usar la derivada para determinar los extremos de la función.

Ejemplo 1: Si se sabe que la suma de dos números reales x e y vale 1, hallar el máximo valor posible del producto xy.

Queremos maximizar $P = xy$.

Como $x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - x$

$$\Rightarrow P(x) = x(1-x) = x - x^2$$

$$P'(x) = 1 - 2x$$

$\mathrm{sgn}(P')$: $\quad + \quad \overset{0}{\underset{1/2}{|}} \quad -$

crecimiento de P: $\quad \nearrow \quad \overset{1/4}{\underset{1/2}{|}} \quad \rightarrow$

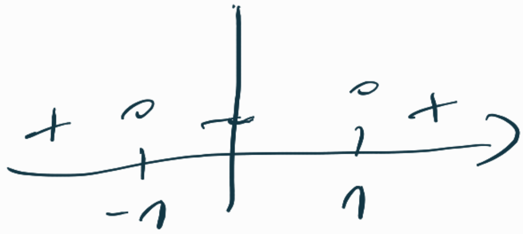
$\uparrow$ máximo relativo y absoluto

$$P\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

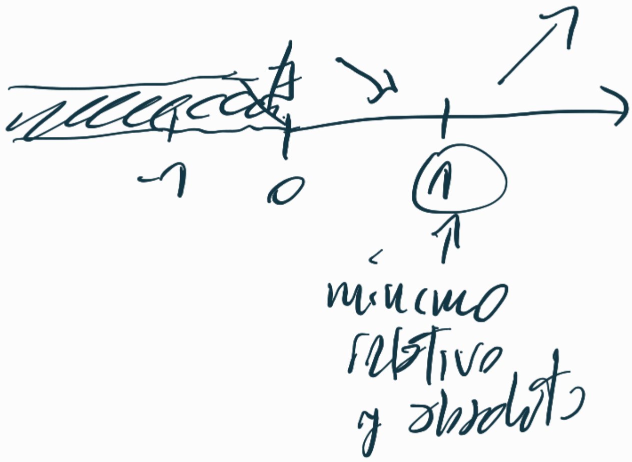
El máximo valor del producto $P = 1/4$ y se alcanza cuando $x = 1/2$, $y = 1 - 1/2 = 1/2$.

② Se sabe que el producto de dos reales positivos $xy=1$.
¿Cuánto es lo mínimo que puede valer la suma $x+y$?

- La función objetivo es $S=x+y$
- $xy=1 \Rightarrow y=\frac{1}{x}$
- $S(x)=x+\frac{1}{x}$ para $x\in\mathbb{R}^+$
- $S'(x)=1-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}$



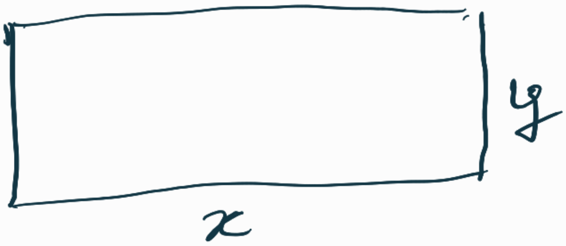
crecimiento de S



$S(1)=1+\frac{1}{1}=2$

∴ El mínimo valor posible de la suma $S=x+y$ es 2 y se alcanza cuando $x=1$, $y=\frac{1}{x}=1$.

③ Construir un rectángulo con perímetro 4 que tenga la máxima área posible.



$\boxed{x+y=2}$

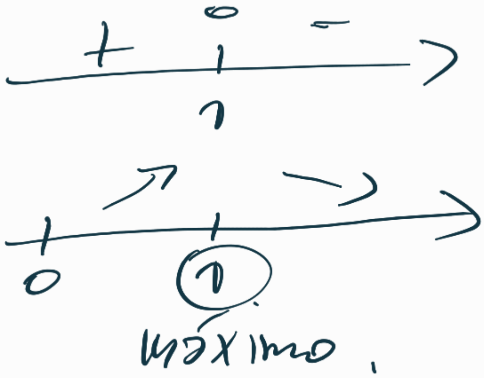
. La función objetivo para maximizar es $A = xy$

. $x+y=2 \Rightarrow y = 2-x$

. $A(x) = x(2-x) = 2x - x^2$ para $x \in \mathbb{R}^+$

$A'(x) = 2-2x = 2(1-x)$

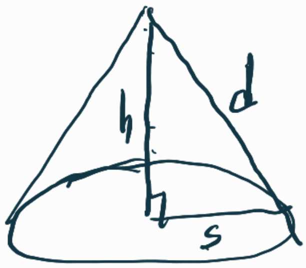
crecimiento de $A(x)$



$A(1) = 2-1 = 1$

∴ El área máxima es 1 y se alcanza cuando $x=1$, $y=2-x=1$, o sea que el que maximiza el área es el cuadrado de lado 1.

④ Un cono (sin la tapa) tiene área lateral igual a 1, ¿Cuánto es lo máximo que puede valer su volumen?



altura = h
directriz = d
radio de base = s

área lateral = $\pi s d$
volumen = $\dfrac{\pi s^2 h}{3}$

↑ base es un círculo de radio s

. Volumen : $V = \dfrac{\pi s^2 h}{3} = \dfrac{\pi}{3} \cdot s^2 h$

. Dato : $\pi s d = 1 \rightarrow \pi^2 s^2 d^2 = 1$

Por Pitágoras : $s^2 + h^2 = d^2$.

$\Rightarrow \boxed{\pi^2 s^2 (s^2 + h^2) = 1}$

$s^2 + h^2 = \dfrac{1}{\pi^2 s^2} \Rightarrow \boxed{h^2 = \dfrac{1}{\pi^2 s^2} - s^2}$

. Maximizar V es lo mismo que maximizar $s^2 h$ que es lo mismo que maximizar $s^4 h^2$

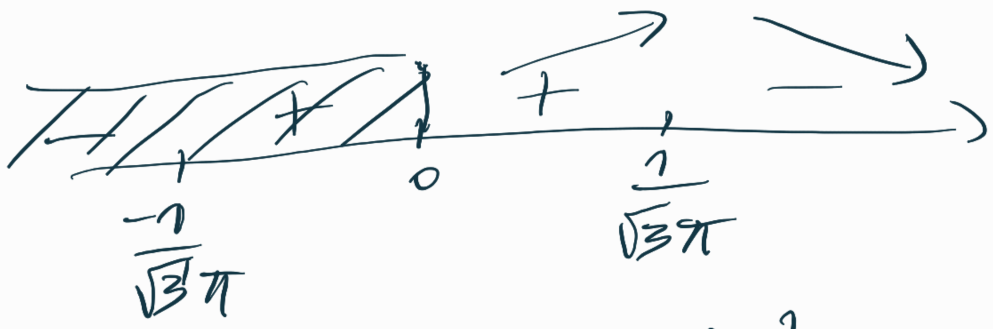
$$\cdot\ s^4h^2 = s^4\left(\frac{1}{\pi^2 s^2} - s^2\right) = \frac{s^2}{\pi^2} - s^6 = \frac{s^2}{\pi^2} - (s^2)^3$$

· Función objetivo (para maximizar)

$$f(x) = \frac{x}{\pi^2} - x^3 \quad \text{en } \underline{\underline{x \in \mathbb{R}^+}} \quad (s^2 = x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{\pi^2} - 3x^2 = 0$$

$$3x^2 = \frac{1}{\pi^2} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3\pi^2} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}\,\pi}$$



f tiene máximo absoluto en $x = \frac{1}{\sqrt{3}\,\pi}$

$$\Rightarrow s^2 = \frac{1}{\sqrt{3}\,\pi}$$

$$h^2 = \frac{1}{\pi^2 s^2} - s^2 = \frac{\sqrt{3}\,\pi}{\pi^2} - \frac{1}{\sqrt{3}\,\pi} = \frac{\sqrt{3}}{\pi} - \frac{1}{\sqrt{3}\,\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}\,\pi}(3-1) = \frac{2}{\sqrt{3}\,\pi}$$

El máximo volumen es

$$V = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}\,\pi} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}\,\sqrt{\pi}} = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}\,\sqrt[4]{3}\,\sqrt{\pi}}$$

(Chequear cuentas)