Trabajo obligatorio

Introducción

El Sistema de Posicionamiento Global (GPS por su sigla en inglés, *Global Positioning System*) es un sistema que permite a un dispositivo receptor localizar su posición sobre la tierra. Utiliza varios satélites que llevan relojes atómicos y que orbitan la tierra a una altura de unos 20200 km. Las órbitas de los satélites están diseñadas para que, en todo momento, desde cualquier punto de la tierra haya al menos entre cinco y ocho satélites visibles. La misión de cada satélite es simplemente transimitir señales sincronizadas desde su posición conocida en el espacio, que los receptores en la tierra pueden recibir para determinar su posición.

Sean (x, y, z) las coordenadas del receptor en un sistema de coordenadas cuyo origen es el centro de la tierra. En un instante dado, el receptor toma la señal sincronizada del i-ésimo satélite y determina su *tiempo de transmisión* t_i, que es la diferencia entre los momentos en que la señal fue transmitida y recibida. La velocidad de la señal es la velocidad de la luz, $c \approx 299792{,}458\, km/s$.

Al multiplicar el tiempo de transmisión por c obtenemos la distancia entre el satélite y el receptor, lo que permite ubicar al receptor en la superficie de una esfera centrada en el satélite y con radio $R_i := ct_i$. Si hay tres satélites visibles, entonces conocemos tres esferas, y la intersección de estas tres esferas consiste de dos puntos (ver Figura 1). Uno de estos puntos de intersección es la ubicación del receptor; el otro típicamente está lejos de la superficie de la tierra y puede ser descartado en forma segura. Teóricamente, el problema se reduce a computar esta intersección, que se podría determinar a partir de las ecuaciones de las tres esferas.

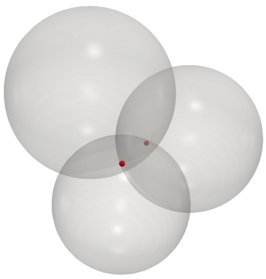

Figura 1: Tres esferas que se intersectan en dos puntos.

Sin embargo, en la práctica este enfoque tiene algunos problemas. En primer lugar, aunque las transmisiones desde los satélites están temporizadas con aproximadamente 1 nanosegundo (10^{-9} segundos) de precisión gracias a que llevan relojes atómicos a bordo, el reloj del receptor típico en la tierra (por ejemplo, un teléfono celular) tiene mucho menos precisión. Si resolvemos el sistema formado por las tres ecuaciones de esferas con un pequeño error en los tiempos, entonces la posición puede estar equivocada por varios kilómetros. Afortunadamente, este problema se puede resolver agregando un satélite adicional.

Sea d la diferencia entre el tiempo sincronizado entre los cuatro relojes satelitales y el reloj del receptor en la tierra, a la que llamaremos *corrección temporal.* Sea (A_i, B_i, C_i) la posición del satélite i-ésimo. Entonces, el punto de intersección (x, y, z) satisface

$$\begin{cases} \sqrt{(x-A_1)^2+(y-B_1)^2+(z-C_1)^2} - c(t_1-d) = 0 \\ \sqrt{(x-A_2)^2+(y-B_2)^2+(z-C_2)^2} - c(t_2-d) = 0 \\ \sqrt{(x-A_3)^2+(y-B_3)^2+(z-C_3)^2} - c(t_3-d) = 0 \\ \sqrt{(x-A_4)^2+(y-B_4)^2+(z-C_4)^2} - c(t_4-d) = 0 \end{cases}. \tag{1}$$

Resolver este sistema no solo nos da las coordendas (x, y, z) del receptor, sino que también permite al receptor determinar la hora correcta a partir de la hora satelital, ya que determinamos el valor de la corrección temporal d. Por lo tanto, la falta de precisión en el reloj del receptor GPS puede ser corregida agregando un cuarto satélite.

Surgen dos problemas más cuando se implementa el GPS. Por una parte, como investigaremos, el sistema de ecuaciones (1) está mal condicionado en caso de que los satélites estén cerca entre sí. La segunda dificultad es que la velocidad de transmisión de las señales no es exactamente c. Las señales pasan a través de 100 kilómetros de ionósfera y 10 kilómetros de tropósfera, cuyas propiedades electromagnéticas afectan la velocidad de transmisión. Además, las señales pueden encontrar obstáculos en la tierra antes de llegar al receptor, un efecto llamado *interferencias por multicamino*. En la medida en que estos obstáculos tengan el mismo impacto en cada trayectoria de señal satelital, introducir la la corrección de tiempo d en el lado derecho de (1) puede ayudar. Sin embargo, esta suposición no es viable en general; para mitigar el problema se suele agregar información de más satélites y por lo tanto resolver un problema de mínimos cuadrados.

El radio de la tierra es de aproximadamente $6370\,km$ y, a los fines prácticos, los receptores van a estar sobre la superficie de la tierra[1].

Tarea

Primera parte. Determinación de posiciones y condicionamiento.

1. Hallar la posición del receptor (x, y, z) y la corrección temporal d para las posiciones satelitales simultáneas

$$(15600, 7540, 20140), \quad (18760, 2750, 18610),$$
$$(17610, 14630, 13480), \quad (19170, 610, 18390)$$

en kilómetros, y tiempos de transmisión de 0,07074, 0,07220, 0,07690, 0,07242 segundos, respectivamente. Para ello, resolver el sistema (1) usando el método de Newton-Raphson con iterado inicial $(x^0, y^0, z^0, d^0) = (0, 0, 6370, 0)$.

2. Queremos investigar el condicionamiento del sistema, esto es, cómo pequeñas perturbaciones en los datos pueden afectar los cálculos. Fijamos un receptor en la tierra con coordenadas $x = 0$, $y = 0$, $z = 6370$, y corrección temporal $d = 0,0001$.

Para definir las posiciones satelitales (A_i, B_i, C_i), puede ser útil expresarlas en coordenadas esféricas $(\rho, \varphi_i, \theta_i)$:

$$\begin{cases} A_i = \rho\cos(\varphi_i)\cos(\theta_i) \\ B_i = \rho\cos(\varphi_i)\,\mathrm{sen}(\theta_i) \\ C_i = \rho\,\mathrm{sen}(\varphi_i), \end{cases}$$

[1]Esto quiere decir que, en caso de tener un método que arroje más de una solución, se debe seleccionar la que corresponda a un punto cuya distancia al centro de la tierra sea más cercano a $6370\,km$.

donde $\rho = 26570$ km, $0 \leq \varphi_i \leq \pi/2$ y $0 \leq \theta_i \leq 2\pi$, para $i = 1, 2, 3, 4$. La restricción de la coordenada φ es para que los cuatro satélites estén en el mismo hemisferio. Elegir

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = \pi/6, \quad \varphi_3 = \pi/4, \quad \varphi_4 = \pi/3$$

y $\theta_1, \ldots, \theta_4$ distintos entre sí. Una vez calculadas las coordenadas cartesianas de los satélites, determinar las distancias $R_i = \sqrt{A_i^2 + B_i^2 + (C_i - 6370)^2}$ y el tiempo de transmisión $t_i = d + R_i/c$.

Para las coordenadas satelitales y tiempos de viaje determinados, repetir la parte 1. y computar la distancia entre la ubicación calculada y el punto $(0, 0, 6370)$.

Definimos un factor de incremento del error para el problema de localización de receptores. Supongamos que tenemos m satélites[2]. El reloj atómico a bordo de los satélites es correcto hasta 10 nanosegundos, o 10^{-8} segundos, por lo que es importante estudiar el efecto de cambios de esta magnitud en el tiempo de transmisión. Definimos el error de entrada como la diferencia de entrada en metros: por ejemplo, a la velocidad de la luz, $\Delta t_i = 10^{-8}$ segundos corresponde a $10^{-8}c \approx 3$ metros. Definimos el error de salida como la diferencia de posición $\|(\Delta x, \Delta y, \Delta z)\|_\infty$, causada por un cambio en $t_1, \ldots, t_m$, y también medimos este error en metros. Consideramos

$$\text{factor de incremento del error} = \frac{\|(\Delta x, \Delta y, \Delta z)\|_\infty}{c\|(\Delta t_1, \ldots, \Delta t_m)\|_\infty},$$

y el número de condición del problema como el máximo factor de incremento del error para todos los Δt_i chicos (10^{-8} o menos).

Perturbar cada tiempo de transmisión t_i recién calculado por $\Delta t_i = \pm 10^{-8}$. Denotamos la nueva solución de la ecuación (1) por $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{d})$, y calcular la diferencia en la posición $\|(\Delta x, \Delta y, \Delta z)\|_\infty$ y el factor de incremento del error. Probar con las 16 variantes posibles en los Δt_i. ¿Cuál es el máximo error de salida calculado (en metros)? Estimar el número de condición del problema, basado en los cálculos hechos.

3. Veamos qué pasa cuando los satélites se encuentran más juntos entre sí. Repetir la parte anterior para las siguientes coordenadas satelitales:

$$\begin{aligned} &(-5749, 6326, 25157), \quad (-5269, 7172, 25035), \\ &(-5038, 8349, 24716), \quad (-4800, 7698, 24973). \end{aligned}$$

Usar los mismos datos de coordenadas y de corrección temporal para el receptor que en el punto 2. Resolver con y sin el error de entrada usado en la parte anterior, probando con todas las perturbaciones en los tiempos de transmisión. Encontrar el mayor error de salida y el factor de incremento del error.

Comparar el condicionamiento del problema cuando los satélites están más cerca entre sí o más separados entre sí.

4. Consideramos ahora ocho satélites con coordenadas:

$$\begin{aligned} &(133, 347, 26567), && (-10347, -16476, 18096), \\ &(24214, -7393, 8061), && (4948, 19967, 16816), \\ &(-25087, -5690, 6651), && (-6251, 25465, 4291), \\ &(-24025, 2219, 11129), && (-13410, -21235, 8673). \end{aligned}$$

[2] En la parte 2. tomamos $m = 4$.

Nuevamente, consideramos un receptor en la tierra con coordenadas $x = 0$, $y = 0$, $z = 6370$, y corrección temporal $d = 0,0001$. Determinar los tiempos de viaje t_i como en la parte 2.

Diseñar una iteración usando el método de Gauss-Newton para resolver el sistema de mínimos cuadrados con ocho ecuaciones y cuatro variables (x, y, z, d). ¿Cuál es un buen vector inicial? Como antes, encontrar el mayor error de salida al perturbar los tiempos t_i y estimar el número de condición del problema.

Resumir los resultados de las partes 2., 3. y 4: comparar los resultados obtenidos para cuatro satélites lejanos entre sí, cuatro satélites cercanos entre sí y ocho satélites lejanos entre sí. En base a los resultados obtenidos, estimar cuánto es el error máximo esperable en la determinación de la posición del receptor.

Segunda parte. Trayectorias en un plano.

En esta parte, vamos a considerar que los movimientos tanto de los satélites como de los receptores están comprendidos en el plano $\{(\rho, \varphi, \theta) : \varphi = 0\} = \{(x, y, z) : z = 0\}$. Esto implica que podemos expresar las posiciones de satélites y receptores con dos coordenadas,

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\theta), \\ y = \rho\,\mathrm{sen}(\theta). \end{cases}$$

Un globo meteorológico venía viajando por el aire, pero en determinado momento se pinchó, la caja con instrumental que llevaba comenzó a caer y se perdió su señal. Tomamos como $t = 0$ el instante en que se pierde la señal. Los siguientes son los dos últimos datos de 6 satélites respecto a la posición del globo, tomadas con una separación de 5 segundos[3]:

θ_i	t_i (en $t = -5\,s$)	t_i (en $t = 0\,s$)
$\pi/3$	0.0678669	0.0678670
$7\pi/11$	0.0735332	0.0735332
$4\pi/5$	0.0835988	0.0835987
$9\pi/8$	0.1031279	0.1031277
$4\pi/3$	0.1093036	0.1093034
$16\pi/9$	0.0990338	0.0990337

Aquí, los valores de θ_i son las coordenadas angulares de los satélites, para los que recordamos que $\rho = 26570\,km$, y los t_i son los tiempos de transmisión correspondientes.

Se modela el movimiento del globo como una caída en la que actúan la fuerza de la gravedad y el rozamiento del aire,

$$\begin{cases} \rho'' = -g(\rho) - \dfrac{k}{M}\left(\rho'^2 + \rho^2\theta'^2\right)^{1/2}\rho' + \rho\theta'^2, \\ \theta'' = -\dfrac{k}{M}\left(\rho'^2 + \rho^2\theta'^2\right)^{1/2}\theta' - 2\dfrac{\rho'\theta'}{\rho}. \end{cases} \tag{2}$$

Aquí, $M = 1kg$ es la masa de la caja de instrumental, $g(\rho) = \frac{3{,}986\times 10^5 km^3/s^2}{\rho^2}$ es la aceleración gravitatoria, que depende de la altura del globo, k es una constante de rozamiento del aire, y $v = \sqrt{\rho'^2 + \rho^2\,\theta'^2}$ es la magnitud de la velocidad del globo expresada en coordenadas polares.

[3] Por simplicidad, aquí hacemos la hipótesis que los satélites no se desplazaron en ese intervalo de 5 segundos.

5. Usar las dos últimas mediciones para determinar los valores iniciales en (2). Para estimar los valores de ρ' y θ' iniciales, usar una fórmula de diferencias primeras,

$$\rho'(t) \approx \frac{\rho(t) - \rho(t - \Delta t)}{\Delta t}, \quad \theta'(t) \approx \frac{\theta(t) - \theta(t - \Delta t)}{\Delta t}.$$

En las partes que siguen, vamos a utilizar estas condiciones iniciales.

6. Se considera que el coeficiente de resistencia del aire es $k = 1\, kg/km$, y que la superficie de la tierra corresponde a $\rho = 6370\, km$. Determinar cuánto demora el equipamiento en llegar a la superficie de la tierra, la coordenada θ donde lo hace y la magnitud de su velocidad en el momento de la caída. Para ese fin, usar el *solver* de Octave que se considere más apropiado. Puede ser útil usar la opción de eventos de Octave/Matlab; se puede encontrar información en la Sección 7.10 del libro *Numerical computing with Matlab*, de Cleve Moler.

7. En esta parte asumimos desconocido el coeficiente k de resistencia del aire. El instrumental sufre un daño irreparable si impacta con la tierra a una velocidad mayor a $200\, km/h$. Determinar cuánto es el valor mínimo del coeficiente k que permitiría tener esperanza de que el instrumental resista al impacto.
[Sugerencia: las condiciones iniciales, masa, y constante gravitatoria son iguales a las de la parte 6. Reescribir el código de la parte anterior como una función que, dado k, devuelva la velocidad en el momento del impacto con la tierra. Usar el método que se crea más conveniente para resolver el problema no lineal resultante.]