Señales aleatorias y modulación
Primer Parcial

Instituto de Ingeniería Eléctrica

21 de septiembre de 2023

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva. Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Pregunta [10 pts.]

(a) Enunciar y dar las características del modelo simplificado de error de cuantización.

(b) Explicar qué es el dithering y para que se utiliza.

Problema 1 [20 pts.]

Se considera el sistema de transmisión digital binario en bandabase que se muestra en la figura. El sistema trabaja con una codificación con redundancia que corresponde a enviar M veces cada bit. Se desea analizar dos esquemas diferentes de recepción indicados en la figura. Por un lado se considera la combinación de la señal para cada uno de los M bits y luego hay una única instancia de decisión. Por otro lado se considera un esquema con M comparadores para cada uno de los bits redundantes enviados y luego la decisión se toma por el voto de mayoría de las M decisiones individuales. Ambos receptores tienen un filtro pasabajos de frecuencia de corte B_T. El canal se considera que no modifica la señal transmitida e introduce ruido blanco, gaussiano, aditivo, de media nula y densidad espectral de potencia $\eta/2$. Los bits se consideran equiprobables y la codificación es polar A/2 y -A/2, mientras que el conformador trabaja con pulsos rectangulares de ancho T y amplitud unitaria.

(a) Escribir la expresión temporal de la señal transmitida $x_T(t)$.

(b) Hallar y graficar el espectro de $x_T(t)$.

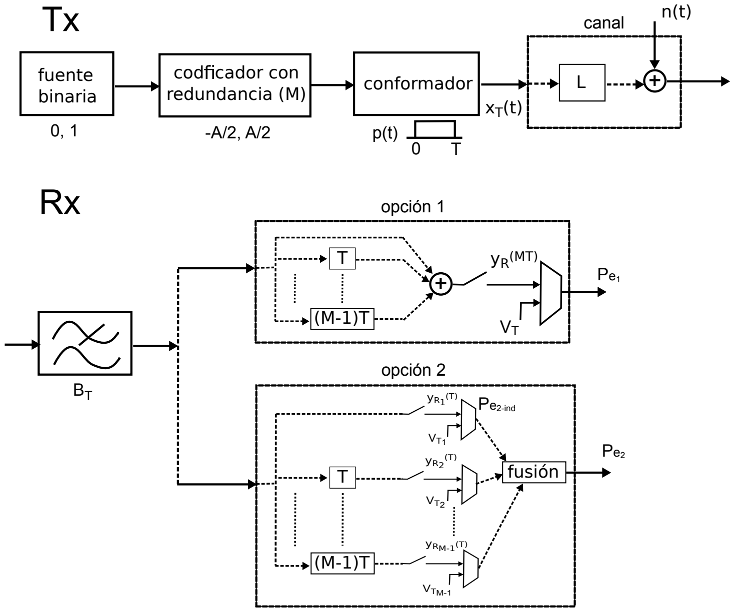
(c) Para la opción 1, determinar las características de $y_R(MT)$, valor que toma la señal muestreada que entra al comparador, identificando las componentes de señal y ruido.

(d) Para la opción 2, determinar las características de $y_{R_m}(T)$, valor que toma una cualquiera de las m señales individuales muestreadas que entran al correspondiente comparador, identificando las componentes de señal y ruido.

(e) Calcular la probabilidad de error P_{e_1} para la opción 1.

(f) Calcular la probabilidad de error $P_{e_{2-ind}}$ para la opción 2 de la decisión en cada comparador.

(g) Calcular la probabilidad de error P_{e_2} para la opción 2 al combinar la salida de los M comparadores.



Problema 2 [20 pts.]

Sea X_t es un proceso WSS de media nula con densidad espectral de potencia $S_X(f)$. Esta señal es enviada por un transmisor, recibiéndose en recepción la señal original y su eco amplificado con una constante A de la forma:

$$Y_t = X_t + AX_{t-\Delta_t}$$

(a) Mostrar que Y_t es WSS.

(b) Consideremos el caso en que Y_t se filtra con un filtro $H(f)$ LTI estable. Dar la expresión de la densidad espectral de potencia de la señal filtrada.

Supongamos ahora que el receptor recibe la señal original, su eco amplificado con una constante A y ruido blanco aditivo de la forma:

$$Y_t = X_t + AX_{t-\Delta_t} + Z_t$$

donde Z_t es ruido blanco gaussiano de media nula y densidad espectral de potencia $S_Z(f) = \eta/2$, independiente de X_t.

(c) Hallar $S_Y(f)$ en función de $S_x(f)$, Δ_t y η.

(d) Hallar la densidad de potencia conjunta $S_{XY}(f)$.

(e) ¿Cuál es el filtro que aplicado a Y produce el estimado $\hat{X}_t$ que minimiza el error cuadrático medio respecto a X_t? Hallar su expresión en función de $S_x(f)$, Δ_t y η.

(f) ¿Cómo actúa este filtro para las frecuencias en donde el ruido predomina sobre la señal y viceversa?

Solución

Problema 1

(a) $x_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \sum_{m=0}^{M-1} p_k(t - mT - kMT)$

(b) Dado que $x_T(t)$ es una señal PAM, para determinar su espectro usamos la función del espectro de una PAM con símbolos equiprobables (media nula).

$$X_T(f) = \frac{A^2}{4TM}|P(f)|^2 = \frac{A^2}{4TM}(T.M)^2\text{sinc}^2(fTM) = \frac{A^2TM}{4}\text{sinc}^2(fTM)$$

(c) La componente de señal queda $y_R(MT) = \frac{MA}{2}$ si el bit enviado fue un 1 o $y_R(MT) = -\frac{MA}{2}$ si el bit enviado fue un 0. La componente de ruido tiene media nula y potencia $M\eta B_T$.

(d) La componente de señal queda $y_{R_m}(T) = \frac{A}{2}$ si el bit enviado fue un 1 o $y_{R_m}(T) = -\frac{A}{2}$ si el bit enviado fue un 0. La componente de ruido tiene media nula y potencia ηB_T.

(e)

$$P_{e_1} = Q\left(\frac{MA}{\sqrt{M\eta B_T}}\right) = Q\left(\frac{\sqrt{M}A}{\sqrt{\eta B_T}}\right)$$

(f)

$$P_{e_{2-ind}} = Q\left(\frac{A}{\sqrt{\eta B_T}}\right)$$

(g) Para que la decisión sea equivocada en este caso, debo cometer un error en al menos la mitad más uno de los comparadores. Según si M es par o impar, esto significa que debo equivocarme en al menos M/2+1 o (M+1)/2 decisiones respectivamente. De esta forma, si es M es par la P_e queda

$$P_{e_2} = P_{e_{2-ind}}{}^{M/2+1}$$

mientras que si M es impar queda

$$P_{e_2} = P_{e_{2-ind}}{}^{(M+1)/2}$$

Problema 2

(a) En primer lugar tenemos que $\mathbb{E}[Y_t] = \mathbb{E}[X_t] + \mathbb{E}[X_{t-\Delta_t}] = m_X + Am_X$ que no depende de t pues X_t es WSS.

Por otra parte, tenemos que:

$$\begin{aligned} R_y(t,s) &= \mathbb{E}[(X_t + AX_{t-\Delta_t})(X_s + AX_{s-\Delta_t})] \\ &= \mathbb{E}[X_tX_s] + A\mathbb{E}[X_tX_{s-\Delta_t}] + A\mathbb{E}[X_{t-\Delta_t}X_s] + A^2\mathbb{E}[X_{t-\Delta_t}X_{s-\Delta_t}] \\ &= R_X(\tau) + AR_X(\tau+\Delta_t) + AR_X(\tau-\Delta_t) + A^2R_X(\tau) \end{aligned}$$

que depende de τ y luego al evaluarla en 0 queda $< +\infty$ por lo que Y_t es WSS.

(b) $S_Y(f) = (1+A^2)S_X(f) + AS_X(f)(e^{-j2\pi\Delta_t f} + e^{j2\pi\Delta_t f}) = (1+A^2)S_X(f) + 2AS_X(f)cos(2\pi\Delta_t f)$
Luego $S_{salida}(f) = |H(f)|^2 S_Y(f)$

(c) Podemos escribir Y_t como $Y_t = g(t) * X_t + Z_t$ donde $g(t) = \delta(t) + A\delta\left(t - \Delta_t\right)$. Por lo que tenemos:

$$S_Y(f) = |G(f)|^2 S_X(f) + S_Z(f) = \left|1 + Ae^{-j2\pi\Delta_t f}\right|^2 S_X(f) + \eta/2$$

(d) Escribimos la autocorrelación cruzada como:

$$R_{XY}(\tau) = E\left[X_{t+\tau}Y_t\right] = E\left[X_{t+\tau}\left(X_t + AX_{t-\Delta_t} + Z_t\right)\right] = E\left[X_{t+\tau}X_t\right] + AE\left[X_{t+\tau}X_{t-\Delta_t}\right] + E\left[X_{t+\tau}Z_t\right]$$

donde el último término es nulo por ser Z_t independiente de X_t y X_t de media nula.

Por lo tanto, como X_t es WSS, tenemos que:

$$R_{XY}(\tau) = E\left[X_{t+\tau}X_t\right] + AE\left[X_{t+\tau}X_{t-\Delta_t}\right] = R_X(\tau) + AR_X\left(\tau + \Delta_t\right) = \left(\delta(t) + A\delta\left(t + \Delta_t\right)\right) * R_X(\tau)$$

y finalmente

$$S_{XY}(f) = \mathcal{F}\left(R_{XY}(\tau)\right) = \left(1 + Ae^{j2\pi\Delta_t f}\right) S_X(f)$$

(e) El estimador óptimo es el que se obtiene al aplicar el filtro de Wiener a Y_t:

$$\hat{X}_t = \int_{-\infty}^{\infty} h(s) Y_{t-s} ds$$

donde

$$\mathcal{F}(h(t)) = H(f) = \frac{S_{XY}(f)}{S_Y(f)} = \frac{\left(1 + Ae^{j2\pi\Delta_t f}\right) S_X(f)}{\left|1 + Ae^{-j2\pi\Delta_t f}\right|^2 S_X(f) + \eta/2}$$

(f) La respuesta en frecuencia del filtro podemos escribirla como

$$\mathcal{F}(h(t)) = H(f) = \frac{S_{XY}(f)}{S_Y(f)} = \frac{\left(1 + Ae^{j2\pi\Delta_t f}\right)}{\left|1 + Ae^{-j2\pi\Delta_t f}\right|^2 + \frac{\eta}{2S_X(f)}}$$

A partir de esta expresión se observa que la respuesta en frecuencia del filtro se atenúa donde el ruido predomina respecto a la señal ($\eta \gg S_X(f)$) y se amplifica cuando la señal predomina respecto al ruido ($\eta \ll S_X(f)$).