Sistemas y Control

CLASE DE PRÁCTICO. HOJA 9, CLASE 2

Ejercicio 5

5) Se desea mejorar la respuesta de un sistema con ganancia de lazo abierto Gol dada por:

$$G_{ol}(s) = \frac{\omega_n^{\;2}}{s(s+2\zeta\omega_n)} \quad ,\zeta = 0{,}1 \quad ,\omega_n = 10$$

Para ello se lo compensará con un corrector serie de transferencia: **Gc(s) = 1 + Ks**

a) Determinar **K** de modo que los polos de lazo cerrado del sistema compensado sean complejos con un amortiguamiento de 0,9.

b) Determinar el margen de fase del sistema compensado y sin compensar.

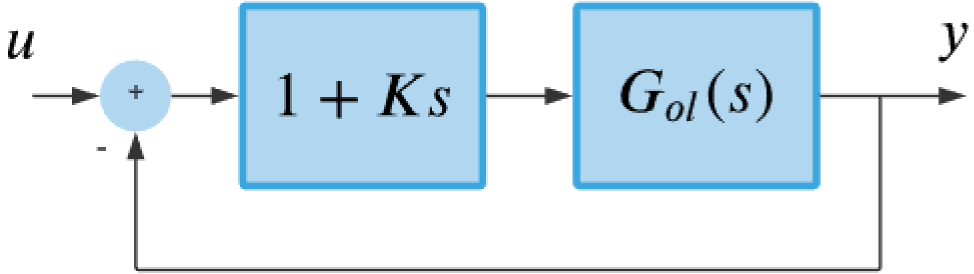
c) Determinar el ancho de banda del sistema compensado y sin compensar.

d) Calcular y graficar la respuesta al escalón del sistema compensado y sin compensar.

Ejercicio 5

Dada la estructura de la figura, sabemos que

$$G_{CL}(s) = \frac{(1+Ks)G_{OL}(s)}{1+(1+Ks)G_{OL}(s)}$$



Ejercicio 5

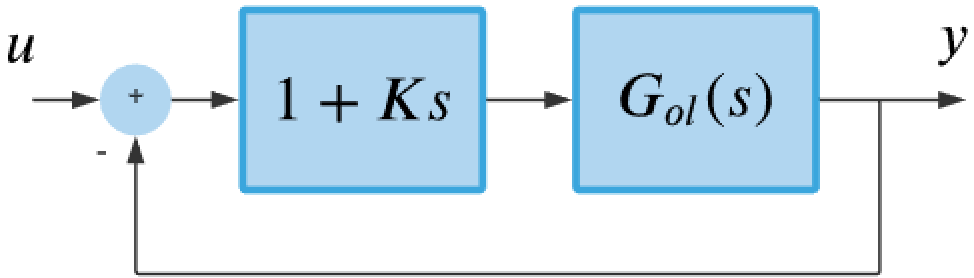
Dada la estructura de la figura, sabemos que

$$G_{CL}(s) = \frac{(1+Ks)G_{OL}(s)}{1+(1+Ks)G_{OL}(s)}$$

$$G_{CL}(s) = \frac{\omega_n^2(1+Ks)}{s(s+2\zeta\omega_n)+(1+Ks)\omega_n^2}$$

Sobre esta estructura, los polos del sistema compensado quedan dados por la expresión

$$s \mid s(s+2\zeta\omega_n) + (1+Ks)\omega_n^2 = 0$$

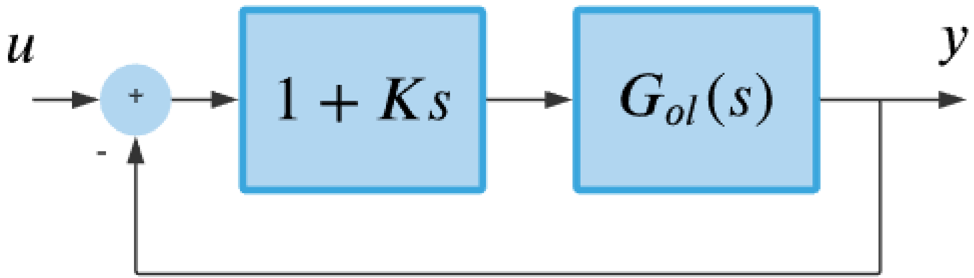


Ejercicio 5

Dada la estructura de la figura, sabemos que

$$G_{CL}(s) = \frac{(1+Ks)G_{OL}(s)}{1+(1+Ks)G_{OL}(s)}$$

$$G_{CL}(s) = \frac{\omega_n^2(1+Ks)}{s(s+2\zeta\omega_n)+(1+Ks)\omega_n^2}$$



Sobre esta estructura, los polos del sistema compensado quedan dados por la expresión

$$s \mid s(s+2\zeta\omega_n) + (1+Ks)\omega_n^2 = 0$$

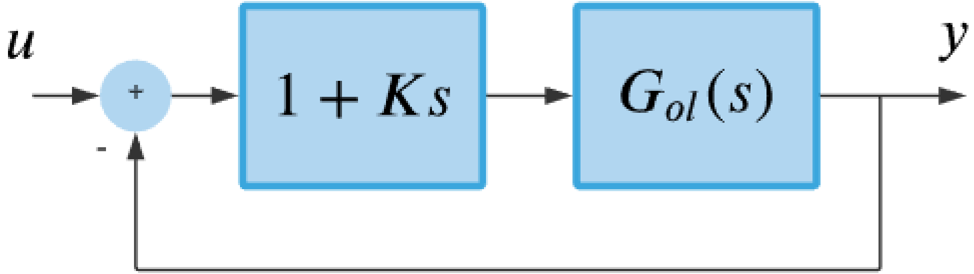
$$s(s+2\zeta\omega_n) + (1+Ks)\omega_n^2 = s^2 + (2\zeta\omega_n + K\omega_n^2)s + \omega_n^2$$

Ejercicio 5

Dada la estructura de la figura, sabemos que

$$G_{CL}(s) = \frac{(1+Ks)G_{OL}(s)}{1+(1+Ks)G_{OL}(s)}$$

$$G_{CL}(s) = \frac{\omega_n^2(1+Ks)}{s(s+2\zeta\omega_n)+(1+Ks)\omega_n^2}$$



Sobre esta estructura, los polos del sistema compensado quedan dados por la expresión

$$s \mid s(s+2\zeta\omega_n) + (1+Ks)\omega_n^2 = 0$$

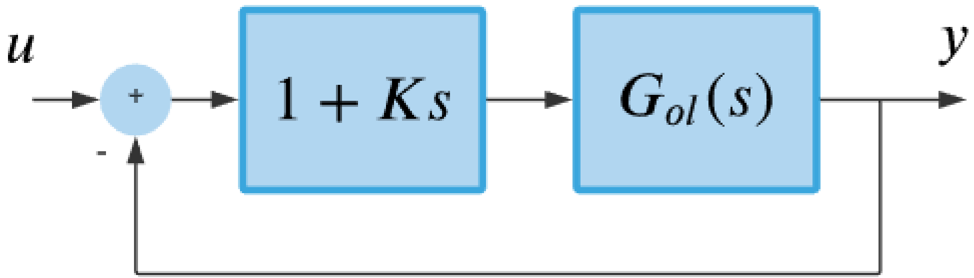
$$s(s+2\zeta\omega_n) + (1+Ks)\omega_n^2 = s^2 + (2\zeta\omega_n + K\omega_n^2)s + \omega_n^2 = s^2 + 2\zeta'\omega_n s + \omega_n^2$$

$$\zeta' = \left(\zeta + \frac{K}{2}\omega_n\right)$$

Ejercicio 5

Como buscamos $\zeta' = 0{,}9$

$$\left(\zeta + \frac{K}{2}\omega_n\right) = 0{,}1 + 5K = 0{,}9$$

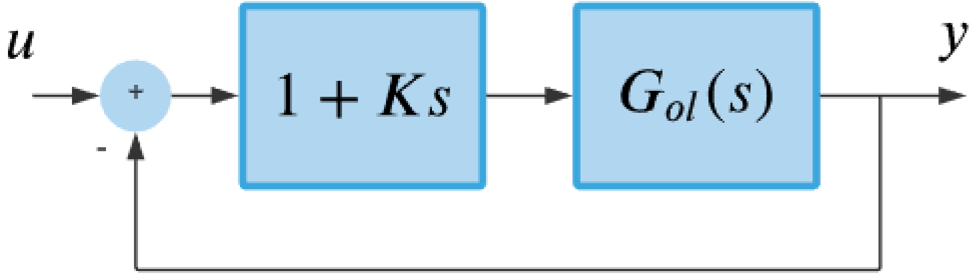


Ejercicio 5

Como buscamos $\zeta' = 0{,}9$

$$\left(\zeta + \frac{K}{2}\omega_n\right) = 0{,}1 + 5K = 0{,}9$$

$$K = 0{,}16$$



Ejercicio 5

5) Se desea mejorar la respuesta de un sistema con ganancia de lazo abierto Gol dada por:

$$G_{ol}(s) = \frac{\omega_n^{\;2}}{s(s+2\zeta\omega_n)} \quad ,\zeta = 0{,}1 \quad ,\omega_n = 10$$

Para ello se lo compensará con un corrector serie de transferencia: **Gc(s) = 1 + Ks**

a) Determinar **K** de modo que los polos de lazo cerrado del sistema compensado sean complejos con un amortiguamiento de 0,9.

b) Determinar el margen de fase del sistema compensado y sin compensar.

c) Determinar el ancho de banda del sistema compensado y sin compensar.

d) Calcular y graficar la respuesta al escalón del sistema compensado y sin compensar.

Margen de fase

- Conceptualmente, el MF corresponde a la máxima fase que puede sumarse a $G_{OL}(s)$ antes de que el sistema se vuelva inestable
- Definición
  - $\phi_M = 180° + \angle(G_{OL}(j\omega_C'))$, con $|G_{OL}(j\omega_C')| = 1$
- El margen de fase da una medida del grado de estabilidad de un sistema realimentado
- Relacionado con la tendencia a oscilar de la salida de un sistema (sobretiro, tiempo de asentamiento)
- Otras connotaciones prácticas (ejemplo: diseño de amplificadores)
  - Amplificadores tienen un retardo temporal en su salida respecto a su entrada
  - Amplificadores de varias etapas pueden acumular retardos considerables

Margen de fase

- Conceptualmente, el MF corresponde a la máxima fase que puede sumarse a $\boxed{G_{OL}(s)}$ antes de que el sistema se vuelva inestable
- Definición
  - $\phi_M = 180° + \angle(G_{OL}(j\omega_C'))$, con $|G_{OL}(j\omega_C')| = 1$
- El margen de fase da una medida del grado de estabilidad de un sistema realimentado
- Relacionado con la tendencia a oscilar de la salida de un sistema (sobretiro, tiempo de asentamiento)
- Otras connotaciones prácticas (ejemplo: diseño de amplificadores)
  - Amplificadores tienen un retardo temporal en su salida respecto a su entrada
  - Amplificadores de varias etapas pueden acumular retardos considerables

Ejercicio 5

Calculemos MF para el sistema sin compensar

$G_{OL_{sc}}(s)\,\frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)} \rightarrow \left|G_{OL_{sc}}(j\omega_C')\right|^2 = 1$

Ejercicio 5

Calculemos MF para el sistema sin compensar

$$G_{OL_{sc}}(s)\,\frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)} \rightarrow \left|G_{OL_{sc}}(j\omega_C')\right|^2 = 1$$

$$\frac{\omega_n^4}{{\omega_C'}^2\left({\omega_C'}^2+4\zeta^2\omega_n^2\right)} = 1$$

C.V: ${\omega_C'}^2 = x$

$$x(x + 4\zeta^2\omega_n^2) = \omega_n^4 \rightarrow x^2 + 4\zeta^2\omega_n^2 x - \omega_n^4 = 0$$

Ejercicio 5

Calculemos MF para el sistema sin compensar

$$G_{OL_{sc}}(s)\,\frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)} \rightarrow \left|G_{OL_{sc}}(j\omega_C')\right|^2 = 1$$

$$\frac{\omega_n^4}{{\omega_C'}^2\left({\omega_C'}^2+4\zeta^2\omega_n^2\right)} = 1$$

C.V: ${\omega_C'}^2 = x$

$$x(x+4\zeta^2\omega_n^2) = \omega_n^4 \rightarrow x^2 + 4\zeta^2\omega_n^2 x - \omega_n^4 = 0$$

$$x^2 + 4x - 10^4 = 0$$

Ejercicio 5

Calculemos MF para el sistema sin compensar

$$G_{OL_{sc}}(s)\frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)} \to \left|G_{OL_{sc}}(j\omega_C')\right|^2 = 1$$

$$\frac{\omega_n^4}{{\omega_C'}^2\left({\omega_C'}^2+4\zeta^2\omega_n^2\right)} = 1$$

C.V: ${\omega_C'}^2 = x$

$$x(x+4\zeta^2\omega_n^2) = \omega_n^4 \to x^2 + 4\zeta^2\omega_n^2 x - \omega_n^4 = 0$$

$$x^2 + 4x - 10^4 = 0$$

Resolviendo, $\omega_C' = 9{,}9\,\frac{rad}{s}$

Ejercicio 5

$$\omega'_C = 9{,}9\,\frac{rad}{s}$$

$$G_{OL_{sc}}(s)\,\frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}$$

$$\angle(G_{OL}(j\omega'_C)) = 0° - \left(90° + \operatorname{arctg}\frac{\omega'_C}{2\zeta\omega_n}\right) = 0° - (90° + 78.58°)$$

Ejercicio 5

$\omega_C' = 9{,}9\,\frac{rad}{s}$

$G_{OL_{sc}}(s)\,\frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}$

$\angle(G_{OL}(j\omega_C')) = 0° - \left(90° + \text{arctg}\,\frac{\omega_C'}{2\zeta\omega_n}\right) = 0° - (90° + 78.58°)$

$\phi_M = 180° - (90° + 78.58°) = 11.42°$

Ejercicio 5

Calculemos MF para el sistema compensado

$$G_{OL_{comp}}(s)\,\frac{\omega_n^2(1+0.16s)}{s(s+2\zeta\omega_n)} \to \left|G_{OL_{sc}}(j\omega_C')\right|^2 = 1$$

Ejercicio 5

Calculemos MF para el sistema compensado

$$G_{OL_{comp}}(s)\frac{\omega_n^2(1+0.16s)}{s(s+2\zeta\omega_n)} \rightarrow \left|G_{OL_{comp}}(j\omega_C')\right|^2 = 1$$

$$\frac{\omega_n^4(1+0.16^2{\omega_C'}^2)}{{\omega_C'}^2\left({\omega_C'}^2+4\zeta^2\omega_n^2\right)} = 1$$

C.V: ${\omega_C'}^2 = x$

$$x(x+4\zeta^2\omega_n^2) = \omega_n^4(1+0.16^2x) \rightarrow x^2 + (4\zeta^2\omega_n^2 - 0.16^2\omega_n^4)x - \omega_n^4 = 0$$

$$x^2 + 1.44x - 10^4 = 0$$

Ejercicio 5

Calculemos MF para el sistema compensado

$G_{OL_{comp}}(s)\frac{\omega_n^2(1+0.16s)}{s(s+2\zeta\omega_n)} \rightarrow \left|G_{OL_{comp}}(j\omega_C')\right|^2 = 1$

$\frac{\omega_n^4(1+0.16^2{\omega_C'}^2)}{{\omega_C'}^2\left({\omega_C'}^2+4\zeta^2\omega_n^2\right)} = 1$

C.V: ${\omega_C'}^2 = x$

$x(x+4\zeta^2\omega_n^2) = \omega_n^4(1+0.16^2x) \rightarrow x^2+(4\zeta^2\omega_n^2-0.16^2\omega_n^4)x-\omega_n^4 = 0$

$x^2+1.44x-10^4 = 0$

Resolviendo, $\omega_C' = 9{,}98\frac{rad}{s}$

Ejercicio 5

$\omega_C' = 9{,}98\,\frac{rad}{s}$

$G_{OL_{comp}}(s)\,\frac{\omega_n^2(1+0.16s)}{s(s+2\zeta\omega_n)}$

$\angle(G_{OL}(j\omega_C')) = 0° + \text{arctg}\,0.16\omega_C' - \left(90° + \text{arctg}\,\frac{\omega_C'}{2\zeta\omega_n}\right) = 0° + 57.94° - (90° + 78.58°)$

Ejercicio 5

$\omega'_C = 9{,}98\,\frac{rad}{s}$

$G_{OL_{comp}}(s)\,\frac{\omega_n^2(1+0.16s)}{s(s+2\zeta\omega_n)}$

$\angle(G_{OL}(j\omega'_C)) = 0° + \operatorname{arctg} 0.16\omega'_C - \left(90° + \operatorname{arctg}\frac{\omega'_C}{2\zeta\omega_n}\right) = 0° + 57.94° - (90° + 78.58°)$

$\phi_M = 180° + 57.94° - (90° + 78.58°) = 69.36°$

Ejercicio 5

5) Se desea mejorar la respuesta de un sistema con ganancia de lazo abierto Gol dada por:

$$G_{ol}(s) = \frac{\omega_n^{\;2}}{s(s+2\zeta\omega_n)} \quad ,\zeta = 0{,}1 \quad ,\omega_n = 10$$

Para ello se lo compensará con un corrector serie de transferencia: **Gc(s) = 1 + Ks**

a) Determinar **K** de modo que los polos de lazo cerrado del sistema compensado sean complejos con un amortiguamiento de 0,9.

b) Determinar el margen de fase del sistema compensado y sin compensar.

c) Determinar el ancho de banda del sistema compensado y sin compensar.

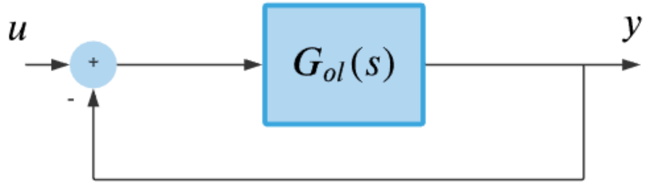
d) Calcular y graficar la respuesta al escalón del sistema compensado y sin compensar.

Ejercicio 5

Calculemos el ancho de banda del sistema realimentado sin compensar

$$G_{OL_{sc}}(s)\,\frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}$$

$$G_{CL_{sc}}(s)\,\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

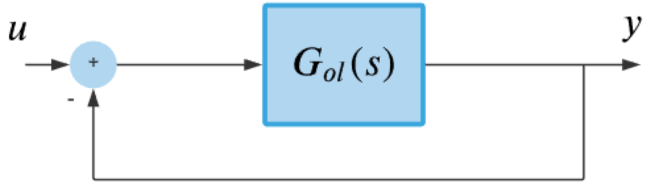


Ejercicio 5

Calculemos el ancho de banda del sistema realimentado sin compensar

$$G_{OL_{sc}}(s)\,\frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}$$

$$G_{CL_{sc}}(s)\,\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$



El sistema es de dos polos sin ceros.

Utilizando resultado de teórico

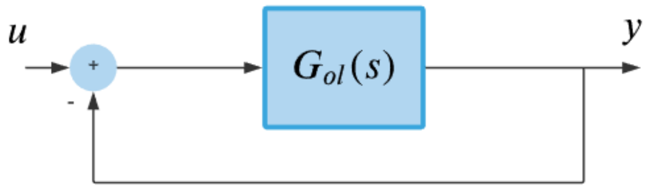
$$BW = \omega_n\sqrt{(1-2\zeta^2)+\sqrt{4\zeta^4-4\zeta^2+2}}$$

Ejercicio 5

Calculemos el ancho de banda del sistema realimentado sin compensar

$$G_{OL_{sc}}(s)\,\frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}$$

$$G_{CL_{sc}}(s)\,\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$



El sistema es de dos polos sin ceros.

Utilizando resultado de teórico

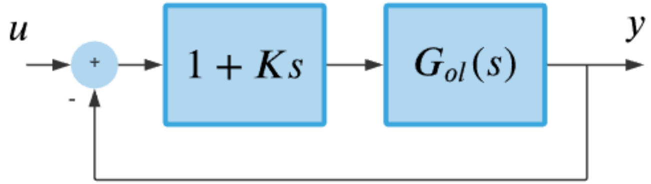
$$BW = \omega_n\sqrt{(1-2\zeta^2)+\sqrt{4\zeta^4-4\zeta^2+2}} = 15{,}4\,\frac{rad}{s}$$

Ejercicio 5

Repitamos el proceso para el sistema realimentado compensado

$$G_{OL_{comp}}(s)\,\frac{\omega_n^2(1+Ks)}{s(s+2\zeta\omega_n)}$$

$$G_{CL_{comp}}(s)\,\frac{\omega_n^2(1+Ks)}{s^2+2\zeta\omega_n s+(1+Ks)\omega_n^2}$$



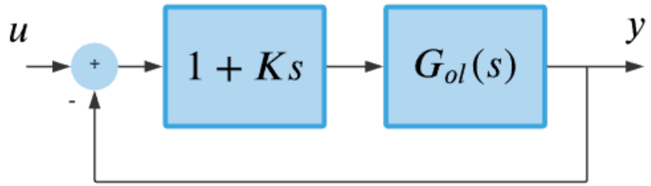
El sistema tiene dos polos y un cero. No tenemos un resultado teórico conocido

Ejercicio 5

Repitamos el proceso para el sistema realimentado compensado

$$G_{OL_{comp}}(s)\,\frac{\omega_n^2(1+Ks)}{s(s+2\zeta\omega_n)}$$

$$G_{CL_{comp}}(s)\,\frac{\omega_n^2(1+Ks)}{s^2+2\zeta\omega_n s+(1+Ks)\omega_n^2}$$



El sistema tiene dos polos y un cero. No tenemos un resultado teórico conocido

Apliquemos la definición:

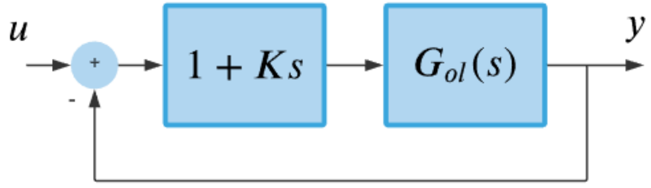
$$\omega_{BW} \mid \left|G_{CL_{comp}}(j\omega_{BW})\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Ejercicio 5

$\omega_{BW} \mid \left|G_{CL_{comp}}(j\omega_{BW})\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Varias opciones

- Solución numérica
- Solución iterativa
- Solución computacional



Ejercicio 5

$$\omega_{BW} \mid \left|G_{CL_{comp}}(j\omega_{BW})\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Varias opciones

- Solución numérica
- Solución iterativa
- Solución computacional
  - $BW = 20.27 \frac{rad}{s}$

```
wn = 10;
z  = 0.1;
k  = 0.16;

% Sistema en lazo cerrado NO compensado
sys = tf([wn^2],[1 2*z*wn wn^2]);
bandwidth(sys)

% Sistema en lazo cerrado compensado
syscomp = tf([wn^2*k wn^2],[1 2*z*wn+k*wn^2 wn^2]);
bandwidth(syscomp)

% Respuestas al escalón
t = 0:0.01:6;
u = ones(size(t));

% Sistema auxiliar para representar la entrada
sysin = tf(1,1);

figure(1)
hold on
lsim(sys,u,t)
lsim(syscomp,u,t)
lsim(sysin,u,t)
legend('Entrada','Resp. esc. GCL NO comp.','Resp. esc. GCL comp.')
hold off
```

Ejercicio 5

5) Se desea mejorar la respuesta de un sistema con ganancia de lazo abierto Gol dada por:

$$G_{ol}(s) = \frac{\omega_n{}^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)} \quad ,\zeta = 0{,}1 \quad ,\omega_n = 10$$

Para ello se lo compensará con un corrector serie de transferencia: **Gc(s) = 1 + Ks**

a) Determinar **K** de modo que los polos de lazo cerrado del sistema compensado sean complejos con un amortiguamiento de 0,9.

b) Determinar el margen de fase del sistema compensado y sin compensar.

c) Determinar el ancho de banda del sistema compensado y sin compensar.

$\boxed{\text{d) Calcular y graficar la respuesta al escalón del sistema compensado y sin compensar.}}$

Ejercicio 5

Respuesta al escalón para el sistema realimentado sin compensar

$$G_{CL_{sc}}(s)\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}\cdot\frac{1}{s}$$

Ejercicio 5

Respuesta al escalón para el sistema realimentado sin compensar

$$G_{CL_{sc}}(s)\,\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

$$Y(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}\cdot\frac{1}{s}$$

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}\cdot\frac{1}{s}\right\}$$

Ejercicio 5

Respuesta al escalón para el sistema realimentado sin compensar

$$G_{CL_{sc}}(s)\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

$$Y(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}.\frac{1}{s}$$

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}.\frac{1}{s}\right\}$$

A partir de la tabla de anti transformadas útiles

$$y(t)=1-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}sen\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t+Arctg\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)\right)$$

Ejercicio 5

Respuesta al escalón para el sistema realimentado compensado

$$G_{CL_{comp}}(s)\,\frac{\omega_n^2(1+Ks)}{s^2+2\zeta\omega_n s+(1+Ks)\omega_n^2}=\frac{\omega_n^2(1+Ks)}{s^2+\left(2\zeta\omega_n+K\omega_n^2\right)s+\omega_n^2}=\frac{\omega_n^2(1+Ks)}{s^2+2\left(\zeta+\frac{K}{2}\omega_n\right)\omega_n s+\omega_n^2}$$

Sea $\zeta^* = \left(\zeta + \frac{K}{2}\omega_n\right)$

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2(1+Ks)}{s^2+2\zeta^*\omega_n s+\omega_n^2}.\frac{1}{s} = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta^*\omega_n s+\omega_n^2}.\frac{1}{s} + K\,\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta^*\omega_n s+\omega_n^2}$$

Ejercicio 5

Respuesta al escalón para el sistema realimentado compensado

$$G_{CL_{comp}}(s)\frac{\omega_n^2(1+Ks)}{s^2+2\zeta\omega_n s+(1+Ks)\omega_n^2}=\frac{\omega_n^2(1+Ks)}{s^2+\left(2\zeta\omega_n+K\omega_n^2\right)s+\omega_n^2}=\frac{\omega_n^2(1+Ks)}{s^2+2\left(\zeta+\frac{K}{2}\omega_n\right)\omega_n s+\omega_n^2}$$

Sea $\zeta^*=\left(\zeta+\frac{K}{2}\omega_n\right)$

$$Y(s)=\frac{\omega_n^2(1+Ks)}{s^2+2\zeta^*\omega_n s+\omega_n^2}.\frac{1}{s}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta^*\omega_n s+\omega_n^2}.\frac{1}{s}+K\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta^*\omega_n s+\omega_n^2}$$

A partir de la tabla de anti transformadas útiles

$$y(t)=1-\frac{1}{\sqrt{1-{\zeta^*}^2}}e^{-\zeta^*\omega_n t}sen\left(\omega_n\sqrt{1-{\zeta^*}^2}t+Arctg\left(\frac{\sqrt{1-{\zeta^*}^2}}{\zeta^*}\right)\right)+K\frac{\omega_n}{\sqrt{1-{\zeta^*}^2}}e^{-\zeta^*\omega_n t}sen\left(\omega_n\sqrt{1-{\zeta^*}^2}t\right)$$

Ejercicio 5

Respuesta al escalón para el sistema realimentado compensado

$$G_{CL_{comp}}(s)\,\frac{\omega_n^2(1+Ks)}{s^2+2\zeta\omega_n s+(1+Ks)\omega_n^2}=\frac{\omega_n^2(1+Ks)}{s^2+\left(2\zeta\omega_n+K\omega_n^2\right)s+\omega_n^2}=\frac{\omega_n^2(1+Ks)}{s^2+2\left(\zeta+\frac{K}{2}\omega_n\right)\omega_n s+\omega_n^2}$$

Sea $\zeta^*=\left(\zeta+\frac{K}{2}\omega_n\right)$

$$Y(s)=\frac{\omega_n^2(1+Ks)}{s^2+2\zeta^*\omega_n s+\omega_n^2}.\frac{1}{s}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta^*\omega_n s+\omega_n^2}.\frac{1}{s}+K\,\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta^*\omega_n s+\omega_n^2}$$

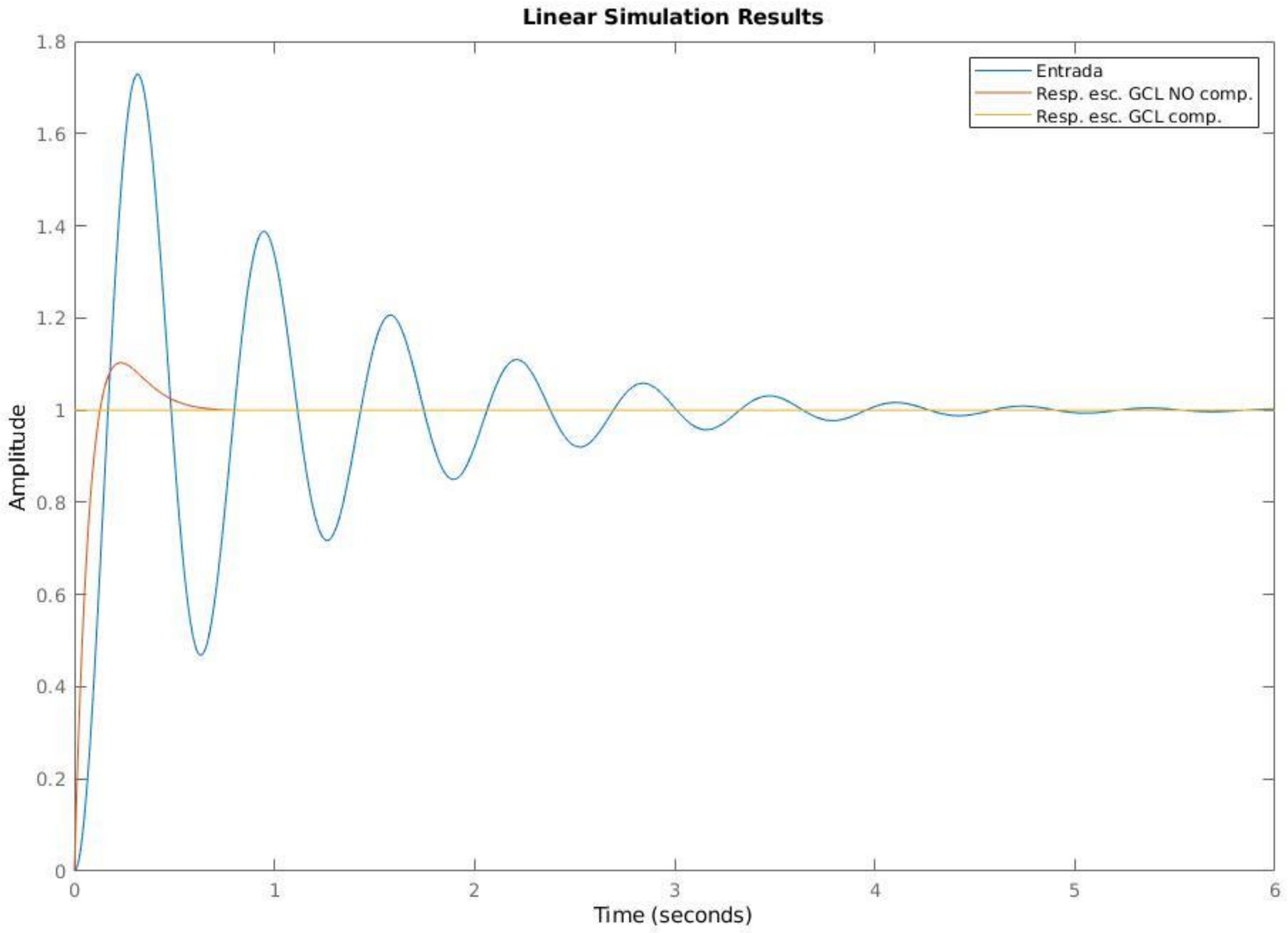
A partir de la tabla de anti transformadas útiles

$$y(t)=1-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^{*2}}}e^{-\zeta^*\omega_n t}sen\left(\boldsymbol{\omega_n}\sqrt{\boldsymbol{1-\zeta^{*2}}}\boldsymbol{t}+Arctg\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^{*2}}}{\zeta^*}\right)\right)+K\,\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^{*2}}}e^{-\zeta^*\omega_n t}sen\left(\boldsymbol{\omega_n}\sqrt{\boldsymbol{1-\zeta^{*2}}}\,t\right)$$

Ejercicio 5

Luego de aplicar identidades trigonométricas

$$y(t) = 1 + \alpha . e^{-\zeta^* \omega_n t} sen\left(\omega_n \sqrt{1 - {\zeta^*}^2} t + \beta\right)$$


Linear Simulation Results
Entrada
Resp. esc. GCL NO comp.
Resp. esc. GCL comp.
Amplitude
Time (seconds)
1.8
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
1
2
3
4
5
6