

Herramientas de representación tiempo-frecuencia

Instituto de Ingeniería Eléctrica
Facultad de Ingeniería
Universidad de la República

Práctico 2 - 2023

Ejercicio 1

En este ejercicio se analizan algunas representaciones tiempo-frecuencia respecto al cumplimiento de los marginales, en particular el marginal en frecuencia.

1. Considere la transformada de Fourier de tiempo corto,

$$S_t(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int s(\tau) h(\tau - t) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

y a partir de ella la distribución denominada Espectrograma,

$$P(t, \omega) = |S_t(\omega)|^2 = |s_\omega(t)|^2.$$

Muestre que el espectrograma no cumple el marginal en frecuencia, i.e.,

$$P(\omega) = \int |s_\omega(t)|^2 dt \neq |S(\omega)|^2.$$

2. Considere la transformada de Wigner-Ville,

$$W(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int s^*(t - \frac{1}{2}\tau) s(t + \frac{1}{2}\tau) e^{-j\tau\omega} d\tau = \frac{1}{2\pi} \int S^*(\omega - \frac{1}{2}\theta) S(\omega + \frac{1}{2}\theta) e^{-j\theta t} d\theta.$$

Muestre que satisface el marginal en frecuencia, i.e.,

$$P(\omega) = \int W(t, \omega) dt = |S(\omega)|^2.$$

3. Considere la clase general $C(t, \omega)$ de representaciones tiempo-frecuencia,

$$C(t, \omega) = \frac{1}{4\pi^2} \iiint s^*(u - \frac{1}{2}\tau) s(u + \frac{1}{2}\tau) \phi(\theta, \tau) e^{-j\theta t - j\tau\omega + j\theta u} du d\tau d\theta$$

$$C(t, \omega) = \frac{1}{4\pi^2} \iiint S^*(u + \frac{1}{2}\theta) S(u - \frac{1}{2}\theta) \phi(\theta, \tau) e^{-j\theta t - j\tau\omega + j\tau u} d\theta d\tau du.$$

Muestre que el kernel debe ser $\phi(0, \tau) = 1$ para que se cumpla el marginal en frecuencia, i.e.,

$$P(\omega) = \int C(t, \omega) dt = |S(\omega)|^2.$$

Ejercicio 2

En este ejercicio se buscará mejorar la representación de una señal multicomponente utilizando distribuciones basadas en la Wigner-Ville. Como señal de prueba se empleará el sonido de murciélago provisto en la página del curso. Se recomienda usar el toolbox “The Time-Frequency Toolbox”¹ para el cálculo de las distribuciones de Wigner-Ville (WD) y la pseudo distribución de Wigner-Ville suavizada (*Smoothed Pseudo Wigner-Ville Distribution*, SPWVD).

1. Calcular y graficar el Espectrograma, la WD y la SPWVD. Elegir los parámetros de forma que la visualización del contenido espectral sea adecuada según su criterio.

Una forma de mejorar la resolución, minimizando el efecto de los términos cruzados es aislando cada componente, calculando su distribución y luego mostrando el resultado en conjunto.

2. Utilice el método de Overlap-Add basado en el espectrograma con una ventana de Hann adecuada para aislar las cuatro componentes que identifique en la señal del murciélago.
3. Calcule la WD y la SPWVD de cada componente por separado. Elegir nuevamente los parámetros de forma de que la visualización del contenido espectral sea adecuada según su criterio.
4. Construya una nueva distribución basada la suma de las componentes separadas para la WD y SPWVD.
5. Analizar los resultados, comparándolos con los obtenidos en la primera parte.

Ejercicio 3

En este ejercicio se buscará encontrar una representación tiempo-frecuencia basada en alguna de las representaciones vistas y utilizando Matching Pursuit. Se utilizará la señal de audio glockenspiel.wav como señal de prueba.

1. Calcule el espectrograma que considere el mejor compromiso para la representación tiempo-frecuencia.
2. Calcule el Espectrograma para 2 largos de ventana sensiblemente diferentes de manera de tener diferentes representaciones razonablemente buenas de banda ancha y banda angosta para la señal.
Se considerará como diccionario a la unión de los átomos que corresponden a las representaciones T-F halladas en la parte anterior.
3. Utilice el algoritmo de Matching Pursuit para encontrar una representación T-F con el diccionario considerado, recalculando las representaciones sobre el residuo si es necesario. Defina un criterio de parada que considere adecuado.

¹Disponible en <http://tftb.nongnu.org/> y <https://github.com/scikit-signal/pytftb>

4. Analice el resultado comparándolo con el de la primera parte. Explique las ventajas y limitaciones que tiene buscar una representación mediante este procedimiento.

Ejercicio 4

En este ejercicio se estudia el *método de reasignación*, una técnica para mejorar la resolución de una representación tiempo-frecuencia, mediante el mapeo de cada punto del plano a nuevas coordenadas tiempo-frecuencia, de modo que se refleje mejor la distribución de energía de la señal analizada. En este caso la técnica se aplicará sobre el Espectrograma. Se recomienda usar el toolbox “The Time-Frequency Toolbox” para el cálculo del Espectrograma reasignado.

1. Explique brevemente en qué consiste el *método de reasignación*.
2. Genere una señal de prueba como la suma de dos componentes sintéticos con diferente ley de evolución de frecuencia (e.g. lineal y sinusoidal). Grafique la evolución de la frecuencia de cada componente de la señal.
3. Calcule el Espectrograma y su versión reasignada para la señal de prueba. Grafique ambas representaciones y compare la resolución obtenida.
4. Repita lo anterior usando como señal de prueba el sonido de murciélago provisto en la página del curso. Comente los resultados obtenidos.