

Práctico 9: Estimación Puntual

Consistencia de un estimador

Definición 1 Sean $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ iid con distribución F_θ donde θ es un parámetro. Se considera la familia $\{T_n(X_1, \dots, X_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ donde T_n es una función de los n datos (que cumple ciertas hipótesis). $T_n(X_1, \dots, X_n)$ se llama un estimador de θ . Un estimador se dice consistente si $T_n(X_1, \dots, X_n) \xrightarrow[n]{c.s.} \theta$.

Ejercicio 1

Sean $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ iid tales que $\mathbf{E}(X_1) = \mu$ y $\mathbf{Var}(X_1) = \sigma^2 < \infty$ ($\sigma > 0$).

1. Demostrar que $\bar{X}_n$ es un estimador consistente de μ , esto es que $\bar{X}_n \xrightarrow[n]{c.s.} \mu$.
2. Demostrar que si $\sigma_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$ y $s_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$ entonces

$$\sigma_n^2 \xrightarrow[n]{c.s.} \sigma^2 \quad s_n^2 \xrightarrow[n]{c.s.} \sigma^2 \quad \sigma_n \xrightarrow[n]{c.s.} \sigma \quad s_n \xrightarrow[n]{c.s.} \sigma$$

Sugerencia: $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i)^2 - (\bar{X}_n)^2$ y usar los siguientes resultados:

Si $X_n \xrightarrow[n]{c.s.} X$ y $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces $g(X_n) \xrightarrow[n]{c.s.} g(X)$

Si $X_n \xrightarrow[n]{c.s.} X$ e $Y_n \xrightarrow[n]{c.s.} Y$ y $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces $g(X_n, Y_n) \xrightarrow[n]{c.s.} g(X, Y)$.

Ejercicio 2

Sean $X_1, X_2, \dots, X_n$ iid $\sim F$. Encontrar estimadores para los siguientes parámetros por el método de los momentos:

1. p si la distribución es $\text{Ber}(p)$
2. λ si la distribución es $\mathcal{P}(\lambda)$
3. p si la distribución es $\text{Geo}(p)$
4. μ y σ^2 si la distribución es $N(\mu, \sigma^2)$
5. a y b si la distribución es $\mathcal{U}[a, b]$.

Ejercicio 3

Una pieza de una máquina se verifica al final de cada hora de producción y se cambia por una nueva en caso de encontrarse rota. El tiempo de vida en horas de la pieza se puede modelar con una variable aleatoria T con distribución exponencial de parámetro λ ($T \sim \exp(\lambda)$), por lo tanto el tiempo en horas que transcurre hasta el recambio de la pieza se puede modelar con una variable aleatoria $X = [T] + 1$, donde $[T]$ es la parte entera de T (esto es, $X = n$ si y sólo si $n - 1 \leq T < n$).

1. Hallar la función de probabilidad de la variable aleatoria X y probar que tiene distribución geométrica de parámetro $1 - e^{-\lambda}$ ($X \sim \text{Geo}(1 - e^{-\lambda})$).
2. A partir de los tiempos en los que se realiza el recambio de las piezas se desea estimar el parámetro λ del tiempo de vida de dichas piezas.
 - a) Calcular λ en función de μ siendo $\mu = \mathbf{E}(X)$.
 - b) ¿Cómo estimaría μ a partir de las observaciones $X_1, X_2, \dots, X_n$ de los tiempos de recambio de las piezas?

- c) Construir un estimador consistente para λ en función de las observaciones $X_1, X_2, \dots, X_n$ de los tiempos de recambio de las piezas.

Ejercicio 4

Sea una sucesión de variables aleatorias $X_1, X_2, \dots, X_n$ iid tal que $P\{X_1 = 1\} = P\{X_1 = -1\} = a$ y $P\{X_1 = 0\} = 1 - 2a$ donde $0 < a < 1/2$. Dar por el método de los momentos un estimador consistente del parámetro a .

Estimación por máxima verosimilitud

Ejercicio 5

Sean $X_1, X_2, \dots, X_n$ iid $\sim F$ Encontrar los estimadores de máxima verosimilitud para los siguientes parámetros y compararlos con los respectivos estimadores por el método de los momentos:

1. p si la distribución es $\text{Ber}(p)$
2. λ si la distribución es $\mathcal{P}(\lambda)$
3. p si la distribución es $\text{Geo}(p)$
4. μ y σ^2 si la distribución es $N(\mu, \sigma^2)$
5. a y b si la distribución es $\mathcal{U}[a, b]$.

Sesgo de un estimador

Definición 2 Sean $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ iid con distribución F_θ . Se define el sesgo de un estimador de θ , $T_n = T_n(X_1, \dots, X_n)$ como $\mathbf{E}(T_n - \theta)$. Un estimador T_n se dice insesgado si su sesgo es cero, es decir, $\mathbf{E}(T_n) = \theta \forall n \in \mathbb{N}$. Decimos que es asintóticamente insesgado si $\mathbf{E}(T_n - \theta) \xrightarrow{n} 0$.

Ejercicio 6

Sean $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ iid tales que $\mathbf{E}(X_1) = \mu$ y $\mathbf{Var}(X_1) = \sigma^2 < \infty$ ($\sigma > 0$). Mostrar que $\bar{X}_n$ es insesgado como estimador de μ , que σ_n^2 no es insesgado como estimador de σ^2 y que s_n^2 es insesgado para σ^2 .

Ejercicio 7

Se considera una muestra $X_1, X_2, \dots, X_n$ iid con media $\mathbf{E}(X) = \mu$ y varianza $\mathbf{Var}(X) = \sigma^2$. Se considera el estimador $\hat{\mu} = \sum_{i=1}^n a_i X_i$ (una combinación lineal de las observaciones).

1. Hallar la relación que tienen que cumplir los coeficientes a_i para que $\hat{\mu}$ sea un estimador insesgado de la media μ .
2. Entre todos los estimadores lineales e insesgados de la media μ hallar el de varianza mínima.
Sugerencia: usar la desigualdad de Cauchy-Schwarz para vectores en $\mathbb{R}^n$.

Ejercicio 8

Sean $X_1, \dots, X_n$ iid $\sim \mathcal{P}(\lambda)$.

1. Estimar λ por el método de los momentos. Observar que es insesgado.
2. Probar que s_n^2 también es un estimador insesgado para λ .
3. Encontrar el estimador de máxima verosimilitud para λ y observar que coincide con el estimador obtenido por el método de los momentos.

Ejercicio 9

Sean $X_1, \dots, X_n$ iid $\sim \mathcal{U}[0, \theta]$. Interesa estimar el valor de θ .

1. Hallar el estimador de θ por el método de los momentos.
2. Estudiar su sesgo, varianza y error cuadrático medio.
3. Demostrar que el estimador de máxima verosimilitud de θ es X_n^* , el máximo de los valores muestrales.