Solución Práctico 7

1. Ver el manual del curso o las notas de Marco.
2. Para cada parte se muestra una de las propiedades que falla, pero puede haber otras.
   a. No existe el neutro del producto.
   b. No existe el neutro del producto.
   c. No existe el neutro de la suma.
   d. No existe el opuesto.
   e. No se cumple la propiedad asociativa.
3. No se cumple la propiedad asociativa.
4. Ver el manual del curso o las notas de Marco.
5. a. Es un subespacio vectorial.
   b. Es un subespacio vectorial.
   c. No es un subespacio vectorial: La matriz nula no es una matriz invertible.
   d. No es un subespacio vectorial: la suma de dos matrices no invertibles puede dar una invertible.
   e. No es un subespacio vectorial: el rango no se preserva al sumar matrices.
   f. Es un subespacio vectorial: La matriz nula tiene traza cero. Además, sean A, B dos matrices de traza 0 y $\lambda \in \mathbb{R}$. Veamos que $A + B$ y λA tienen traza 0.

   $$tr(A + B) = tr(A) + tr(B) = 0 + 0 = 0$$
   $$tr(\lambda A) = \lambda tr(A) = \lambda 0 = 0$$

   Tenemos que el conjunto es cerrado bajo la suma y el producto por escalar.
   Aquí usamos propiedades sobre la traza vistas en el teórico y prácticos anteriores.
6. a. S es un subespacio vectorial sii $d = 0$.
   b. S es un subespacio vectorial sii $v = 0$.
   c. S es un subespacio vectorial sii $r = 0$.
7. a. 1) No es un subespacio vectorial: El vector $(0, 0, 0)$ no pertenece a S.

2) No es un subespacio vectorial: Podemos escribir a S como $S = \{(a, b, c \in V : 3a - 3b - c = 2)\}$ y vemos que el vector $(0, 0, 0)$ no cumple la condición.
3) Es un subespacio vectorial.

b. 1) No es un subespacio vectorial: Sea $(x_1, ..., x_n) \in S$ tal que $x_1 > 0$ y $\lambda < 0$. Es claro que $\lambda x_1 < 0$ por lo que $\lambda(x_1, ..., x_n) = (\lambda x_1, ..., \lambda x_n) \notin S$.
2) Es un subespacio vectorial.
3) No es un subespacio vectorial: Sea $(x_1, ..., x_n) \in S$ y $\lambda \neq 1$, entonces $\lambda x_1 = ... = \lambda x_n = \lambda 1 \neq 1$ por lo que $\lambda(x_1, ..., x_n) \notin S$.

c. 1) Es un subespacio vectorial.
2) Es un subespacio vectorial: El polinomio nulo tiene raíz en α trivialmente. Sean $p, q \in S$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Tenemos que

$$(p+q)(\alpha) = p(\alpha) + q(\alpha) = 0 + 0 = 0$$

$$(\lambda p)(\alpha) = \lambda p(\alpha) = \lambda 0 = 0$$

$$(p+q)'(\alpha) = (p' + q')(\alpha) = p'(\alpha) + q'(\alpha) = 0 + 0 = 0$$

$$(\lambda p)'(\alpha) = \lambda p'(\alpha) = \lambda 0 = 0$$

Es decir, $p + q, \lambda p \in S$.
3) No es un subespacio vectorial: sumar dos polinomios del mismo grado puede dar un polinomio de menor grado.

d. 1) Es un subespacio vectorial.
2) No es un subespacio vectorial: Si $f \in S$ y $\lambda \neq 0, 1$ entonces

$$(\lambda f)(x^2) = \lambda f(x^2) = \lambda f(x)^2 \neq (\lambda f(x))^2$$

3) Es un subespacio vectorial: Recordar que f es par si $f(-x) = f(x)$. Claramente la función nula cumple esta propiedad. Sean $f, g \in S$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces

$$(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f+g)(x)$$

$$(\lambda f)(-x) = \lambda f(-x) = \lambda f(x) = (\lambda f)(x)$$

Es decir, $f + g, \lambda f \in S$.

8. b) Debemos probar que $S = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x_0) = f(x_1) = ... = f(x_n) = 0\}$ es un subespacio vectorial. Para esto podemos pensar a S como intersección de conjuntos del tipo $S_i = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x_i) = 0\}$.

9. a. Es un subespacio vectorial.

   b. Es un subespacio vectorial: La función nula es derivable, la suma de funciones derivables es derivable y el producto de una función derivable por un escalar, es una función derivable.

c. Es un subespacio vectorial.

d. Es un subespacio vectorial: La función nula es acotada. Además, sean $f, g \in S$, entonces existen K, K' reales positivos tales que $|f(x)| < K$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y $|g(x)| < K'$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Tenemos entonces que para todo $x \in \mathbb{R}$

$$|(f+g)(x)| = |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq K + K'$$

$$|(\lambda f)(x)| = |\lambda f(x)| = |\lambda||f(x)| \leq |\lambda| K$$

Es decir, $f + g$ y λf son funciones acotadas.

10. b. Probamos solo que $W_1 \subset W$ pues la otra demostración es análoga. Sea $w_1 \in W_1$, entonces, es claro que

$$w_1 = w_1 + 0_V$$

Como W_2 es un subespacio vectorial, $0_V \in W_2$ y logramos escribir a w_1 como una suma de un elemento de W_1 más uno de W_2, entonces $w_1 \in W$.

c. Sea S un subespacio vectorial de V que contiene a W_1 y W_2 y sea $w \in W$. Sabemos que existen $w_1 \in W_1$ y $w_2 \in W_2$ tales que $w = w_1 + w_2$. Como W_1 y W_2 son subconjuntos de S, tenemos que $w_1, w_2 \in S$ y como éste es un subespacio vectorial, $w_1 + w_2 \in S$. Es decir $w \in S$.