Clase 26

<u>Recordar</u>: (TVM) $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ para algún $c \in (a,b)$

<u>TVM de Cauchy</u>: $\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ para algún $c \in (a,b)$

$$\Rightarrow \boxed{f'(c).(g(b)-g(a)) = g'(c)(f(b)-f(a))}$$

<u>teorema del valor medio de Cauchy</u>:

Sean $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que sean continuas en $[a,b]$ y derivables en (a,b)

$\Rightarrow \exists c \in (a,b) \,/\, f'(c).(g(b)-g(a)) = g'(c)(f(b)-f(a))$

<u>Dem</u>. Consideramos $h(x) = f(x).(g(b)-g(a)) - g(x)(f(b)-f(a))$

$$h(a) = f(a)g(b) - \cancel{f(a)g(a)} - g(a)f(b) + \cancel{g(a)f(a)}$$

$$h(b) = \cancel{f(b)g(b)} - f(b)g(a) - \cancel{g(b)f(b)} + g(b)f(a)$$

$$\Rightarrow h(a) = h(b) \underset{\text{Rolle}}{\Rightarrow} \exists c \in (a,b) \,/\, h'(c) = 0$$

Como $h'(x) = f'(x)(g(b)-g(a)) - g'(x).(f(b)-f(a))$

$\Rightarrow h'(c) = f'(c)(g(b)-g(a)) - g'(c)(f(b)-f(a)) = 0$

$\Rightarrow f'(c).(g(b)-g(a)) = g'(c)(f(b)-f(a))$. $\square$

Corolario: Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continuas en $[a,b]$ y derivables en (a,b). Supongamos que $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a,b)$. Entonces

$$\exists c \in (a,b) / \ \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

Dem. Por el TVM de Cauchy:

$$f'(c)(g(b)-g(a)) = g'(c)(f(b)-f(a)) \quad (*)$$

Observamos que $g(b) \neq g(a)$, caso contrario

si $g(b) = g(a) \underset{\text{Rolle}}{\Rightarrow} \exists x \in (a,b) / g'(x) = 0$ $\lightning$

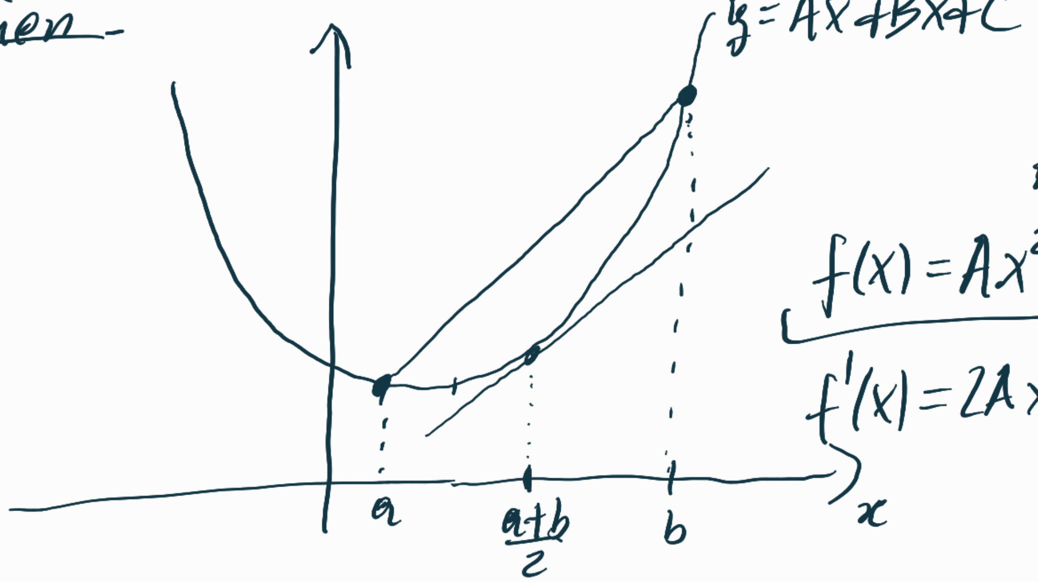
$\therefore g(b) \neq g(a) \Rightarrow g(b)-g(a) \neq 0$ y $g'(c) \neq 0$

Luego por $(*)$: $\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ $\square$

Ejercicios con valor medio

1. Considere la parábola $y = Ax^2 + Bx + C$. Probar que la cuerda que une los puntos para los cuales $x = a$ y $x = b$ es paralela a la tangente en el punto para el cual $x = \frac{a+b}{2}$. $(a \neq b)$

Solución.



$f(x) = Ax^2 + Bx + C$

$f'(x) = 2Ax + B$

Para probar que son paralelas debemos probar que tienen la misma pendiente.

La cuerda que pasa por $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ tiene pendiente $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

La recta tangente a la parábola por el punto $\left(\frac{a+b}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$ es $f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

tenemos que chequear que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$

$\Longleftrightarrow \quad f(b)-f(a) = f'\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)$.

$$f(b)-f(a) = Ab^2+Bb+c-Aa^2-Ba-c$$
$$= A(b^2-a^2)+B(b-a)$$
$$= A(b-a)(b+a)+B(b-a)$$
$$= (A(b+a)+B)(b-a) \qquad (*)$$

$$f'(x) = 2Ax+B$$
$$f'\left(\frac{a+b}{2}\right) = 2A\left(\frac{a+b}{2}\right)+B = A(a+b)+B \quad (**)$$

Luego $f(b)-f(a) \underset{(*)}{=} (A(a+b)+B)(b-a)$

$$\underset{(**)}{=} f'\left(\frac{a+b}{2}\right).(b-a) \quad \checkmark$$

2. Considera la ecuación cúbica $x^3-3x+b=0$ (con $b\in\mathbb{R}$ dado). Probar que la ecuación no puede tener más de una raíz en el intervalo $-1\leq x\leq 1$. (Usar Rolle)

<u>Solución</u>. Sea $f(x)=x^3-3x+b$.

Por absurdo, supongamos que existen $a,b\in\mathbb{R}$ / $-1\leq a<b\leq 1$ tales que $f(a)=0$ y $f(b)=0$.

Por el teo. de Rolle, $\exists\, c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=0$.

tenemos $f'(x)=3x^2-3$

$\Rightarrow 3c^2-3=0 \Rightarrow 3c^2=3 \Rightarrow c^2=1$

$\Rightarrow c=\pm 1$ es absurdo pues $-1\leq a<c<b\leq 1$.

Luego $x^3-3x+b=0$ solo puede tener a lo sumo una solución en el intervalo $-1\leq x\leq 1$.

$\square$

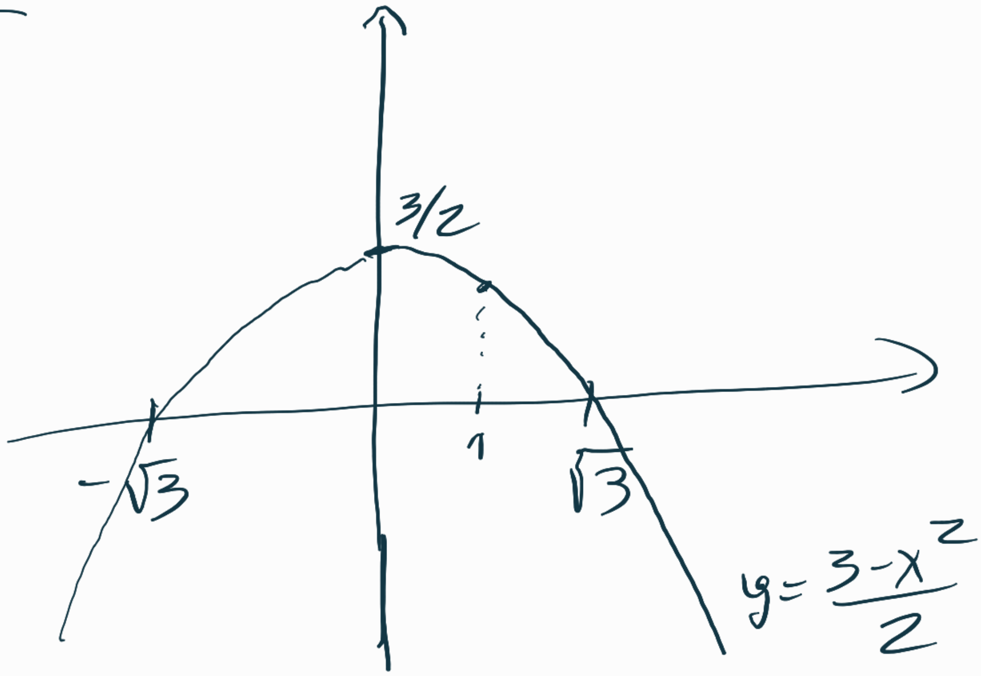
3. Sea $f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2} & \text{si } x \leq 1 \\ 1/x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

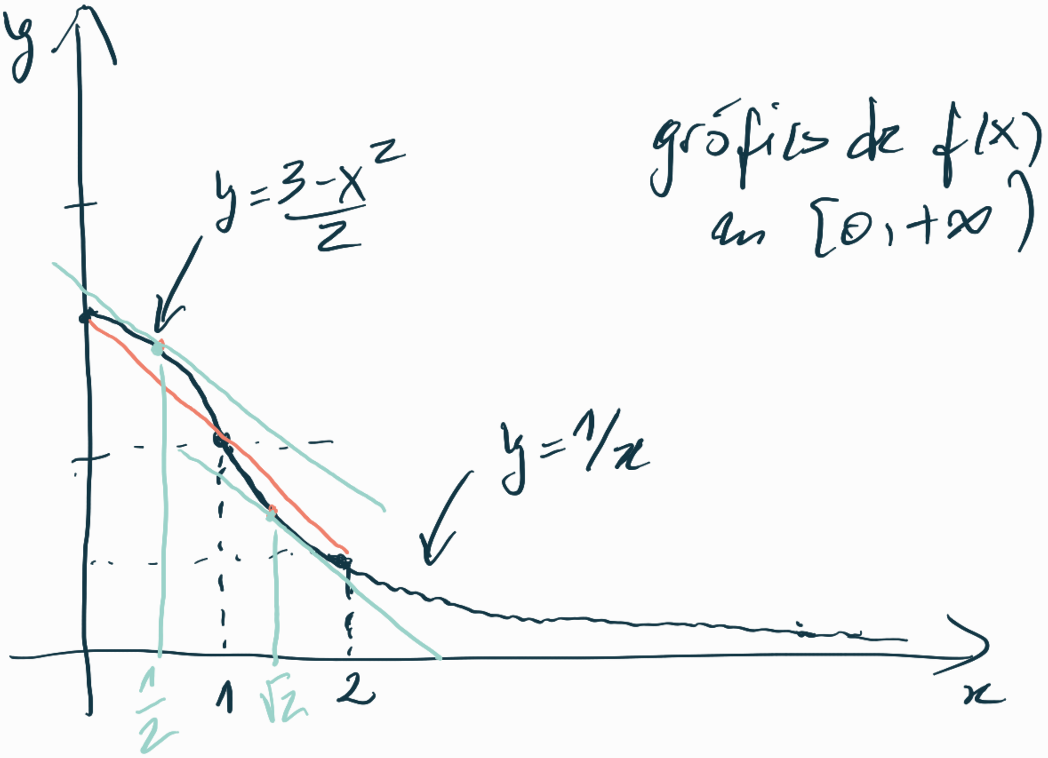
a - Dibujar la gráfica de $f(x)$ para $x \in [0,2]$.

b - Probar que f satisface las condiciones del teorema del valor medio en el intervalo $[0,2]$ y determinar todos los valores medios dados por el teorema.

Solución:

a)





b) $\left.\frac{3-x^2}{2}\right|_{x=1} = \frac{3-1^2}{2} = \frac{2}{2} = 1$

$\left.\frac{1}{x}\right|_{x=1} = \frac{1}{1} = 1$

$\Rightarrow$ f es continua en $x=1$

$f(x) = \frac{3-x^2}{2}$ es continua en $[0,1]$

$f(x) = \frac{1}{x}$ es continua en $[1,2]$

$\Rightarrow$ f es continua en $[0,2]$

Otra: $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{3-x^2}{2} = 1$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x} = 1$

$\Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = 1 = f(1)$

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} \left(\frac{3-x^2}{2}\right)' = \lim_{x\to 1^-} \frac{-2x}{2} = -1$$

$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} \left(\frac{1}{x}\right)' = \lim_{x\to 1^+} \left(\frac{-1}{x^2}\right) = -1$$

$\therefore$ $f'(1) = -1$ y f es derivable en $x=1$.

$f(x) = \dfrac{3-x^2}{2}$ es derivable en $(0,1)$

$f(x) = \dfrac{1}{x}$ es derivable en $(1,2)$

$\therefore$ f es derivable en $(0,2)$.

Luego estamos en la hipótesis del teo. del valor medio.

tenemos que hallar todos los $c \in (0,2)$ /

$$f'(c) = \frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \frac{1/2 - 3/2}{2} = \frac{-1}{2}$$

En $(0,1)$: $f'(x) = -x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \boxed{x = 1/2}$ ✓

Si $x=1$: $f'(1) = -1 \neq -1/2$.

En $(1,2)$: $f'(x) = -\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 = 2$

$$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

Como $x \in (1,2) \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{2}}$ ✓

Los valores de c que verifican el teorema del valor medio en $[0,2]$ son $c = 1/2$ y $c = \sqrt{2}$. $\square$

4. Probar que $\forall x, y \in \mathbb{R}$ se cumple que $|\operatorname{sen}(y) - \operatorname{sen}(x)| \leq |y-x|$.

Solución: $\frac{\operatorname{sen}(y) - \operatorname{sen}(x)}{y-x} = \operatorname{sen}'(c)$ para algún $c \in (x,y)$ $(x \neq y)$

$= \cos(c)$

$$\Rightarrow \left| \frac{\operatorname{sen}(y) - \operatorname{sen}(x)}{y - x} \right| = |\cos(c)| \leq 1$$

$$\Rightarrow |\operatorname{sen}(y) - \operatorname{sen}(x)| \leq |y - x| \quad \checkmark$$