Clase 24:

Límites

CDIVV – 2023 - 2sem

Eugenia Ellis

eellis@fing.edu.uy

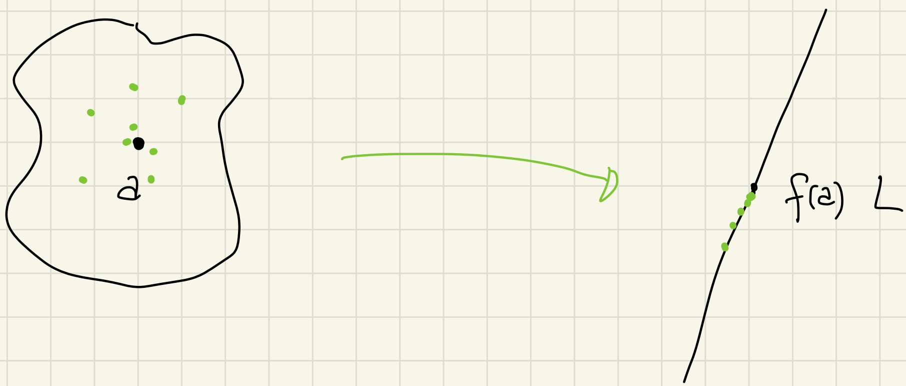
Teorema: $D \subseteq \mathbb{R}^n$ $\quad f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad a \in \mathbb{R}^n$ punto de acumulación de D

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \iff \forall \text{ sucesión } \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq D \setminus \{a\}$$

$$\text{tal que } \lim_{k\to+\infty} x_k = a \Rightarrow \lim_{k\to+\infty} f(x_k) = L$$

Teorema: $D \subseteq \mathbb{R}^n$ $\quad f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad a \in D$

f es continua en a $\iff \left[\begin{array}{l} \forall \text{ sucesión } \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq D \\ \lim\limits_{k\to+\infty} x_k = a \Rightarrow \lim\limits_{k\to+\infty} f(x_k) = f(a) \end{array} \right]$



Ejercicio:

$f_i : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$.

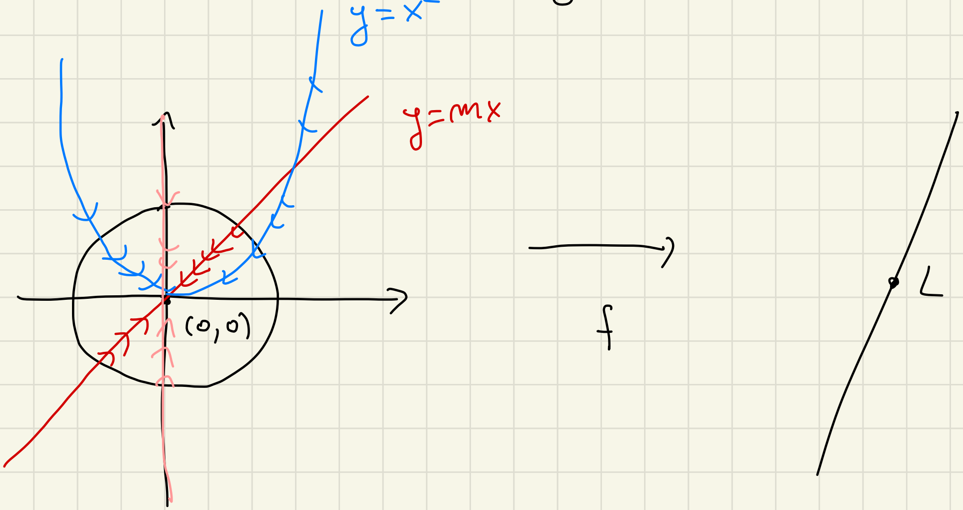
- $$f_1(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

- $$f_2(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$$

- $$f_3(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_i(x,y) \overset{?}{=}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_1(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$



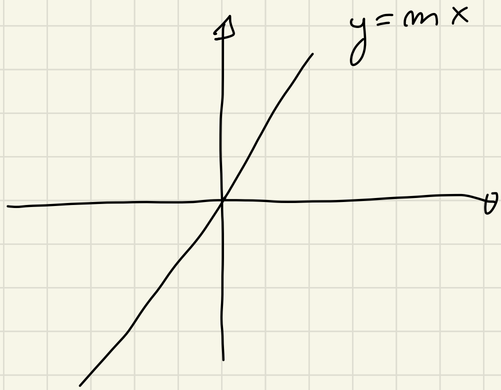
El límite direccional consiste en acercarnos a $a=(0,0)$ por una direcció́n especifica por ejemplo por las curvas

$$\begin{cases} y = mx \\ y = x^2 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{y=mx \\ x\to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x \cdot mx}{x^2+(mx)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{m\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}(1+m^2)}$$

$$= \frac{m}{1+m^2}$$

$$\lim_{\substack{y=mx \\ x \to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{m}{1+m^2}$$



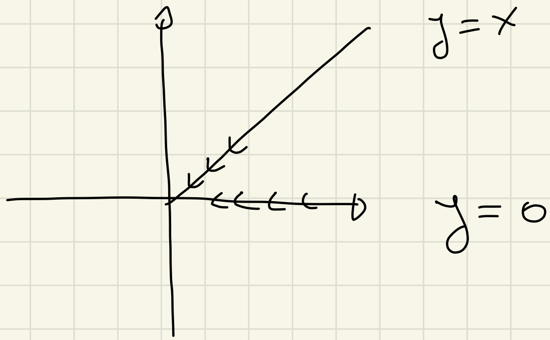
Obs:

Si $\lim_{(x,y)\to a} f(x,y) = L \Rightarrow \lim_{y=mx} f(x,y) = L$

límite

límite direccional

Esto nos sirve para garantizar cuando un límite **NO** existe



Como $\lim\limits_{\substack{\boxed{y=mx} \\ x\to 0}} \dfrac{xy}{x^2+y^2} = \boxed{\dfrac{m}{1+m^2}}$

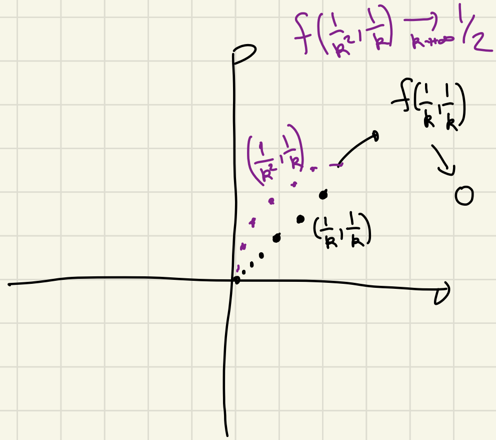
$$\lim_{\substack{\boxed{y=x} \\ x\to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{\substack{\boxed{y=0} \\ x\to 0}} \frac{0}{x^2} = \boxed{0}$$

son valores diferentes

$$\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f_1(x,y)$$

$$f_3(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$$



$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_3(x,y) \overset{?}{=}$$

$$\lim_{\substack{y=mx\\ x\to 0}} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{\substack{y=mx\\ x\to 0}} \frac{x\,m^2x^2}{x^2+m^4x^4}$$

$$= \lim_{\substack{y=mx\\ x\to 0}} \frac{x^{\cancel{3}}\,m^2}{\cancel{x^2}(1+m^4x^2)}$$

$$= \lim_{\substack{y=mx\\ x\to 0}} \overset{\to 0}{x} \cdot \overset{\to m^2}{\left(\frac{m^2}{1+m^4x^2}\right)} = \boxed{0}$$

$$\boxed{(x_k,y_k) = \left(\frac{1}{k},\frac{m}{k}\right)}$$

Esto $\boxed{\text{NO}}$ garantiza que

existe el límite.

$$\lim_{\substack{x=y^2\\ y\to 0}} \frac{y^2\cdot y^2}{(y^2)^2+y^4} = \lim_{y\to 0} \frac{y^4}{y^4+y^4} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

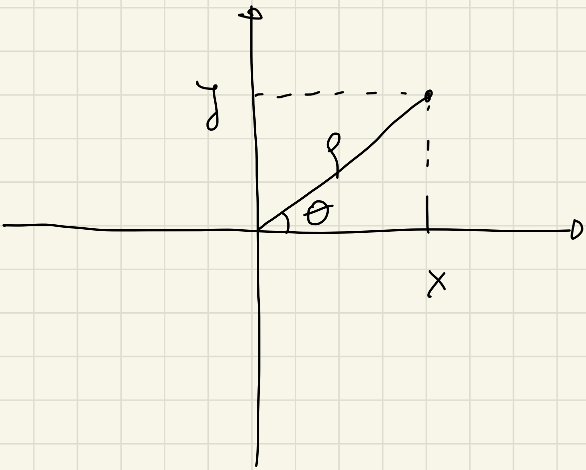
$$\boxed{(x_k, y_k) = \left(\frac{1}{k^2}, \frac{1}{k}\right)}$$

Como los límites direccionales $y=mx$ y $x=y^2$ son diferentes podemos asegurar que

$$\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$$

$$\boxed{¿\exists \quad f_2(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}?}$$

Coordenadas polares.



(x, y)

(ρ, θ) $\quad \rho > 0$

$\theta \in [0, 2\pi)$

$x = \rho \cos\theta$

$y = \rho \,\text{sen}\,\theta$.

$(x, y) \longrightarrow (0,0)$.

$(\rho\cos\theta, \rho \,\text{sen}\,\theta) \longrightarrow (0,0)$

$\updownarrow$

$\theta \in [0, 2\pi)$

$\rho \longrightarrow 0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{\theta\in[0,2\pi)\\ \rho\to 0}} \frac{\rho\cos\theta\,\rho^2\operatorname{sen}^2\theta}{\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\operatorname{sen}^2\theta}$$

coordenadas polares

$x = \rho\cos\theta$

$y = \rho\operatorname{sen}\theta$.

$$= \lim_{\substack{\theta\in[0,2\pi)\\ \rho\to 0}} \frac{\rho^{\cancel{3}}\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta}{\cancel{\rho^2}\underbrace{(\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta)}_{1}}$$

$$= \lim_{\substack{\theta\in[0,2\pi)\\ \rho\to 0}} \overbrace{\rho}^{\to 0}\underbrace{\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta}_{\text{acotado}} = 0$$

¡Ojo! cuando aseguremos que una función esta acotada.

$$\left.\begin{array}{l} -1 \leq \cos\theta \leq 1 \\ 0 \leq \operatorname{sen}^2\theta \leq 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{-1 \leq \cos\theta \operatorname{sen}^2\theta \leq 1}$$

¿ $\frac{1}{\cos\theta}$ esta ácotada?

NO

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{\theta\in[0,2\pi) \\ \rho\to 0}} \frac{\rho\cos\theta\,\rho\operatorname{sen}\theta}{\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\operatorname{sen}^2\theta}$$

coordenadas polares.

$x = \rho\cos\theta$

$y = \rho\operatorname{sen}\theta$.

$$= \lim_{\substack{\theta \in [0, 2\pi) \\ \rho \to 0}} \frac{\cancel{\rho^2} \cos\theta \operatorname{sen}\theta}{\cancel{\rho^2} \underbrace{(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta)}_{1}}$$

$$= \lim_{\substack{\theta \in [0, 2\pi) \\ \rho \to 0}} \cos\theta \operatorname{sen}\theta \quad \nexists$$

depende de θ

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x y^2}{x^2 + y^4} = \lim_{\substack{\theta \in [0, 2\pi) \\ \rho \to 0}} \frac{\rho\cos\theta \, \rho^2 \operatorname{sen}^2\theta}{\rho^2 \cos^2\theta + \rho^4 \operatorname{sen}^4\theta}$$

coordenadas polares

$$= \lim_{\substack{\theta \in [0, 2\pi) \\ \rho \to 0}} \frac{\cancel{\rho^3} \cos\theta \operatorname{sen}^2\theta}{\cancel{\rho^2} (\cos^2\theta + \rho^2 \operatorname{sen}^4\theta)}.$$

$$= \lim_{\substack{\theta \in [0, 2\pi) \\ \rho \to 0}} \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\rho} \cdot \frac{\cos\theta \,\mathrm{sen}^2\theta}{\cos^2\theta + \rho^2 \mathrm{sen}^4\theta} \quad ¿?$$

$$x = y^2$$

Estudiar existencia de

Ejercicios:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$$

Proposición: $f, g : \underset{\mathbb{R}^n}{D \cap} \longrightarrow \mathbb{R}$

f y g son funciones continuas en a

$\Rightarrow$ 1) $f+g$ es continua en a

2) $f \cdot g$ es continua en a

3) Si $g(a) \neq 0 \Rightarrow f/g$ es continua en a.

Dem: Ejercicio