Práctico 2

La resolución se entrega en modalidad informe (en .pdf) antes de la fecha indicada en la plataforma EVA. Se sugiere realizar la resolución utilizando algún software de su elección (Python, R, Julia, Matlab, Octave o una planilla electrónica). Los ejercicios marcados con asterisco (*) otorgan puntaje extra en la nota final del curso.

Ejercicio 1 - Absortividad espectral

En un medio no dispersivo, la *absortividad* o *aborbancia* en un intervalo de números de onda de ancho $\Delta\nu$ en torno a $\bar{\nu}$ se define mediante $A_{\bar{\nu}} = \frac{1}{\Delta\nu}\int_{\Delta\nu}\left(1 - e^{-k_\nu u}\right)\mathrm{d}\nu$, siendo u la *masa óptica* de la radiación que pasa por el medio ($u = \int \rho \mathrm{d}s$).

(a) Derive esta expresión a partir del concepto de transmisividad monocromática T_ν, la ley de Lambert-Beer, etc. Explique sus hipótesis.

(b) Definimos la intensidad de una línea de absorción mediante

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} k_\nu \mathrm{d}\nu.$$

Se habla de absorción *débil* cuando k_ν o u son pequeños, de manera que $k_\nu u \ll 1$. Muestre que entonces, independientemente de la forma exacta de la línea de absorción, la absortividad es directamente proporcional a u y a S (*región de absorción lineal*).

(c) La forma de las líneas espectrales debida a colisiones, llamada *ensanchamiento por presión*, se modela por el perfil de Lorentz,

$$k_\nu = \frac{S}{\pi}\frac{\alpha}{(\nu - \nu_0)^2 + \alpha^2},$$

donde k_ν es el coeficiente de absorción, ν_0 es el número de onda de una línea monocromática ideal y α es un parámetro que define el ancho del pico espectral (ancho mitad a la mitad de la altura).
Para líneas de Lorentz muy fuertes, el ancho a mitad de altura es mucho menor que la extensión de la línea, de manera que $\alpha \ll (\nu - \nu_0)$. En este régimen muestre que la absortividad espectral debida a una única línea es proporcional a la raíz cuadrada de la masa óptica.
Sugerencia:

$$\int_0^{\infty}\left(e^{-a^2/x^2} - e^{b^2/x^2}\right)\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}(b - a)$$

Ejercicio 2 - Atmósfera exponencial no dispersiva

Parte A

Considere una atmósfera homogénea no dispersiva con un perfil de densidad de masa que decae exponencialmente con la altura z; $\rho(z) = \rho_0\, e^{-z/H}$, donde ρ_0 y H son constantes conocidas.

(a) Demuestre que el coeficiente de absorción, $\beta_e(z)$, también decae exponencialmente con z y halle su expresión en función de z y del coeficiente de absorción de masa, k_a.

(c) Encuentre una expresión para $\tau(z)$.

(d) Dado un haz incidente según una dirección μ, muestre que el máximo de absorción se da a una altura z_M que verifica $\dfrac{\tau(z_M)}{\mu} = 1$, donde $\tau(z)$ es la profundidad óptica de la atmósfera a una altura z.

(e) Si para λ_1, λ_2 y λ_3 las secciones eficaces de masa son $k_1 = 0.05$, $k_2 = 0.10$ y $k_3 = 0.15$ m^2/kg, respectivamente, encuentre las altitudes correspondientes al máximo de absorción para un ángulo de incidencia de $\theta = 60°$. Use $\rho_0 = 4$ g/m^3 y $H = 8$ km

Parte B

Cuando la temperatura es aproximadamente constante, la sección eficaz de masa del vapor de agua en el rango 8–13 µm se puede aproximar como $k_a \simeq A\rho_w$, donde ρ_w es la densidad del vapor de agua. En adición $\rho(z) \simeq \rho_{w,0}\, e^{-z/H_w}$, donde $\rho_{w,0}$ es la densidad al nivel del mar y H_w es la altura de escala.

(a) Exprese en este caso $\beta_a(z)$ y $\tau(z)$.

(b) Sea z_{fm} la altura bajo la cual se encuentra una fracción f de la masa de la columna total de agua. ¿Cuál es la altura bajo la cual se encuentra la misma fracción pero de la profundidad óptica?

(c) Exprese la profundidad óptica total (τ^*) en términos de H_w y la columna total de vapor de agua V.

(d) Si $H_w = 2$ km y $V = 30$ kg/m^2 y la transmitancia vertical para cierta longitud de onda es 95 %, determine el valor de la constante A.

Ejercicio 3: Transmisión de banda ancha en el IR

Considere una atmósfera no dispersiva que es perfectamente transparente para el espectro entre los números de onda ν_1 y ν_2 y de coeficiente de absorción constante, β_a, entre ν_2 y ν_3.

(a) Exprese la transmitancia de banda ancha $\mathcal{T}$ para un camino de longitud s en la banda espectral $\Delta\nu = \nu_3 - \nu_1$.

(b) Grafique $\mathcal{T}(s)$ para el caso en que ν_2 es el punto medio del intervalo.

(c) Asumiendo que la radiación incidente en $s = 0$ es 'blanca' (igual intensidad monocromática para todo ν), calcule la fracción que es absorbida en su recorrido hasta $s = 1$ km. Use $\beta_a = 3$ km^{-1}.

(d) La radiación que se transmite en la parte (c) sigue atravesando su recorrido entre $s = 1$ km y $s = 2$ km. ¿Qué fracción de la radiación que atraviesa este segmento es absorbida?

(e) ¿Por qué la fracción absorbida en el primer kilómetro es tan diferente al a fracción absorbida en el segundo?

Ejercicio 4 - Dispersión en la atmósfera

Parte A - Función de dispersión de fase y factor de asimetría

Consideremos la radiación que pasa por un elemento infinitesimal en un medio dispersor. Escribimos la contribución $\mathrm{d}I_s$ a la intensidad de radiación en la dirección $\hat{\Omega}$ por efecto de la dispersión de la radiación $I(\hat{\Omega}')$ proveniente desde todas las direcciones $\hat{\Omega}'$, en un elemento infinitesimal de camino ds, como

$$\mathrm{d}I_{sc} = \frac{\beta_s}{4\pi} \int_{4\pi} p(\hat{\Omega}, \hat{\Omega}') I(\hat{\Omega}') \mathrm{d}w' \mathrm{d}s$$

donde β_s es el coeficiente de dispersión correspondiente al material y la integral es con respecto al elemento de ángulo sólido $\mathrm{d}w'$; la *función de dispersión de fase* $p(\hat{\Omega}, \hat{\Omega}')$ indica de qué manera la energía incidente se dispersa en cada dirección.

(a) Establezca una condición de normalización adecuada para $p(\hat{\Omega}, \hat{\Omega}')$ en un medio puramente dispersivo.

(b) Consideremos una partícula que dispersa radiación monocromática no polarizada en el régimen de Rayleigh. Entonces, la intensidad dispersada por la partícula verifica

$$I \propto \frac{1}{\lambda^4}\left(1 + \cos^2\theta\right),$$

donde θ es el ángulo entre la dirección de dispersión y la dirección incidente. Usando el resultado de la parte anterior, pruebe que la función de dispersión de fase de Rayleigh es

$$p_R(\theta) = \frac{3}{4}(1 + \cos^2\theta).$$

(c) Defina el factor de asimetría, g, y calcule su valor para la función de fase en la dispersión de Rayleigh. ¿Cómo se interpreta el resultado?

(d) La función de fase de Henyey-Greenstein se define utilizando g explícitamente:

$$p_{HG}(\cos\theta; g) = \frac{1}{4\pi}\frac{1 - g^2}{\left(1 + g^2 - 2g\cos\theta\right)^{3/2}}.$$

Pruebe que, efectivamente, g es el parámetro de asimetría de esta función de fase y represente $p_{HG}(\cos\theta; g)$ para $g = 0$, 0.2, 0.4, 0.6 y 0.8 (se sugiere utilizar escala logarítmica). ¿Cómo espera que sea el comportamiento de la función cuando $g \to 1$?

Parte B* - Sección eficaz de dispersión

Consideremos una partícula dispersora en el origen bajo el régimen de Rayleigh, sobre la cual incide radiación de longitud de onda λ e intensidad I_0. A esta radiación corresponde una densidad de flujo dada por $F_0 = I_0\Delta\Omega$. La intensidad de la radiación dispersada por la partícula resulta

$$I(\theta) = \frac{I_0}{r^2}\alpha^2\frac{128\pi^5}{3\lambda^4}\frac{p_R(\theta)}{4\pi}$$

donde α es la polarizabilidad de la partícula y $p_R(\theta)$ es la función de fase de Rayleigh (ver ejercicio anterior).

(a) Determine el *flujo dispersado* f (en unidades de energía sobre tiempo) integrando la densidad de flujo dispersada $I\Delta\Omega$ sobre un área apropiada situada a una distancia r de la partícula.

(b) La *sección eficaz de dispersión* (por molécula) se define como $\sigma_s = f/F_0$.
¿Cuáles son las dimensiones físicas de σ_s? Verifique que para la dispersión de Rayleigh la sección eficaz vale

$$\sigma_s = \frac{\alpha^2 128\pi^5}{3\lambda^4}.$$

(c) Una buena aproximación para la polarizabilidad del aire es

$$\alpha = \frac{1}{4\pi N_s}\left(m_r^2 - 1\right),$$

donde N_s es la densidad molecular y m_r es la parte real del índice de refracción. Por simplicidad tomaremos $m_r = 1.000293$ independiente de la longitud de onda.
El tamaño típico a de las moléculas de aire es próximo a 0.3 nm y el número de moléculas por centímetro cúbico a nivel del mar en condiciones atmosféricas estándar es de alrededor de $2.55 \times 10^{19}\,\mathrm{cm}^{-3}$.
Para las longitudes de onda de 0.3, 0.5 y 0.7 µm, calcule el parámetro de tamaño del aire (x) y la sección eficaz de dispersión.

Ejercicio 5 - Método de los dos flujos para la radiación difusa

Parte A - Aproximación de Eddington

Según lo visto en clase, la ecuación general para la radiación monocromática difusa, promediada en el ángulo azimutal, establece que

$$\mu \frac{dI(\mu)}{d\tau} = I(\mu) - \frac{\tilde{\omega}}{2} \int_{-1}^{1} I(\mu')\, p(\mu, \mu') d\mu' \tag{1}$$

(por detalles ver Sec. 13.2.1 de Petty, por ejemplo). Uno de los métodos de resolución de esta ecuación consiste utilizar desarrollos de Legendre para aproximar a los promedios azimutales de la función de fase, $p(\mu, \mu')$, y de la irradiancia $I(\mu)$. Es decir, estas cantidades se expresan como combinación lineal de N polinomios de Legendre dependientes de $\mu \in [-1, 1]$. La aproximación de Eddington propone utilizar N=2, de modo que del desarrollo se obtiene

$$p(\mu, \mu') = b_0 + b_1\, \mu\mu', \tag{2}$$

donde b_0 y b_1 son constantes, y

$$I(\mu) = I_0 + \mu I_1, \tag{3}$$

donde I_0 e I_1 dependen de τ y no dependen de μ. Considerando esta aproximación:

(a) Use la condición de normalización de p para demostrar que $b_0 = 1$.

(b) Determine b_1 en función de un factor de simetría dado, g, utilizando su definición. Muestre que $p(\mu, \mu') = 1 + 3g\mu\mu'$.

(c) Calcule el parámetro de retro-dispersión, $b(\mu)$, y su promedio en μ, $\bar{b}$. Interprete la dependencia de $\bar{b}$ con g. Compare el resultado con la hipótesis vista en clase de que $\bar{b} = (1 - g)/2$.

(d) Obtenga las dos ecuaciones diferenciales acopladas para I_0 e I_1;

$$\frac{dI_1}{d\tau} = \gamma_1 I_0 \tag{4}$$

$$\frac{dI_0}{d\tau} = \gamma_0 I_1, \tag{5}$$

siendo γ_0 y γ_1 constantes a determinar.
Sugerencia: Sustituya las ecuaciones 2 y 3 en la ecuación 1 y resuelva la integral para hallar una ecuación diferencial acoplada de primer orden. Para obtener las expresiones 4 y 5, integre la ecuación resultante en $\int_{-1}^{1} d\mu$ y en $\int_{-1}^{1} \mu d\mu$, respectivamente.

(e) A partir de las ecuaciones 4 y 5 obtenga las dos ecuaciones diferenciales desacopladas de segundo orden para I_0 e I_1 y luego resuélvalas para llegar a un resultado de la forma

$$I_0(\tau) = Ae^{\Gamma\tau} + Be^{\Gamma\tau}$$

$$I_1(\tau) = \alpha\, Ae^{\Gamma\tau} - \alpha\, Be^{\Gamma\tau},$$

donde $\alpha = \dfrac{\sqrt{3}\sqrt{1-\tilde{\omega}}}{\sqrt{1-g\tilde{\omega}}}$, $\Gamma = \sqrt{3}\sqrt{1-\tilde{\omega}}\sqrt{1-g\tilde{\omega}}$ y A, B son constantes dependientes de las condiciones de borde.

Parte B - Aplicación a nube semi-infinita

El resultado anterior es adecuado para estimar la densidad de flujo en capas de la atmósfera dispersoras y con gran espesor óptico, como en ciertos tipos de nubes. Consideremos una nube con un espesor óptico total $\tau^* \gg 1$, que a fines prácticos se puede asumir como $\tau^* = \infty$ (nube "semi-infinita").

(a) Demuestre que en la aproximación de Eddington la densidad de flujos hemisféricos de radiación difusa hacia arriba ($F^{\uparrow}$) y hacia abajo ($F^{\downarrow}$) se pueden expresar como

$$F^{\uparrow\downarrow}(\tau) = \pi \left(I_0(\tau) \pm \frac{2}{3} I_1(\tau) \right),$$

(b) Considere las condiciones de borde $F^{\downarrow}(0) = F_0$ y $F^{\uparrow}(\tau^*) = 0$. Estos valores implican que la densidad de flujo incidente en el tope de la nube es conocida y que no hay densidad de flujo hacia arriba desde la base de la nube, dado que no tiene base por ser semi-infinita. Utilice los resultados de las partes A-e y B-a para llegar a expresiones explícitas de los flujos $F^{\uparrow}$ y $F^{\downarrow}$ en función de τ.

(c) Calcule el albedo en el tope de la nube, $r = \dfrac{F^{\downarrow}(0)}{F^{\uparrow}(0)}$, en función de g y $\tilde{\omega}$. Grafique esta cantidad en función de $\tilde{\omega}$ para distintos valores de g (por ejemplo $-0.5, 0, 0.5, 0.85$ y 0.99) e interprete el resultado.

(d) ¿Qué sucede con r en el caso de una nube semi-infinita no absorbente ($\tilde{\omega} = 1$)? Interprete el resultado.