Práctico 8: Convergencia Casi Segura y Ley de los Grandes Números

Desigualdad de Chevishoff

Ejercicio 1
Se realiza una encuesta para tratar de estimar el porcentaje de votos de determinado candidato. Al final de la misma se tendrán n respuestas (que asumimos independientes), representadas en la muestra $X_1, X_2, \cdots, X_n$ de realizaciones de la variable de Bernoulli de parámetro p (la probabilidad de que una persona elegida al azar en la población vote por el candidato en cuestión).

1. A partir de la mencionada muestra ¿Qué valor usaría usted para estimar p?.
2. Usando la Desigualdad de Chevishoff (y antes de tomar la muestra) ¿Cuántos datos tomaría para que, con una probabilidad de al menos 0,95, el estimador no distara del valor de p más de un 0,03?. (Sugerencia: Demuestre y use que para cualquier valor de $p \in [0,1]$ se cumple $p(1-p) \leq 1/4$).

Convergencia Casi Segura

Definición. Sea $X_1, X_2, \cdots, X_n$ una sucesión de variables aleatorias. Se dice que $X_n \xrightarrow[n]{c.s.} a \in R$ si se cumple que $\mathbf{P}(\{X_n \to a\}) = 1$. Se dice en este caso que la sucesión X_n converge casi seguramente a a.

Ejercicio 2
Demostrar que si $X_n \xrightarrow[n]{c.s.} a$ e $Y_n \xrightarrow[n]{c.s.} b$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua entonces

1. $X_n + Y_n \xrightarrow[n]{c.s.} a + b$
2. $X_n Y_n \xrightarrow[n]{c.s.} ab$
3. $g(X_n) \xrightarrow[n]{c.s.} g(a)$.

Aplicaciones de la Ley Fuerte de los Grandes Números

Ejercicio 3
Este ejercicio describe el *método de Montecarlo* para el cálculo de integrales.

1. Sean $(U_i)_{i\in\mathbb{N}} \sim \mathcal{U}[a,b]$ *iid* y $f \in R[a,b]$ (f es integrable Riemann en $[a,b]$), mostrar que:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(U_i) \xrightarrow[n]{c.s.} \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

2. Sea D una región arbitraria de $[0,1]\times[0,1]$ y sean $U_1,\ U_2, \ldots, U_n$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución $\mathcal{U}([0,1]\times[0,1])$, es decir que se cumple que $\mathbf{P}(U \in A) = \text{área}(A \cap [0,1]\times[0,1])$.
   Si $a_n = \dfrac{\#\{i : 1 \leqslant i \leqslant n \text{ y } U_i \in D\}}{n}$ probar que $a_n \xrightarrow[n]{c.s.} \text{área}(D)$.

Ejercicio 4
Sean $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ variables independientes e idénticamente distribuidas.
Suponga que $\mathbf{E}(X_1) = 0$ y sea $Y_i = \dfrac{X_i + X_{i+1}}{2}$.
Demostrar que $\overline{Y}_n \xrightarrow[n]{c.s.} 0$, aunque $Y_n,\ Y_{n+1}$ pueden ser dependientes para todo n.

Ejercicio 5
Sea $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de v.a. *iid* con $\mathbf{E}(X_1) = a > 0$. Probar que entonces

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[n]{c.s.} +\infty$$

Ejercicio 6
Sea $X_1, X_2, \cdots, X_n$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución exponencial de parámetro λ.

1. Hallar el límite casi seguro de $(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i)^2$.
2. Hallar el límite casi seguro de $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2$.