Corrección de la demostración del 3/10/2023

Modelo de Leontief

En la clase del 3/10 demostramos el Lema donde se prueba que toda matriz B con diagonal dominante es invertible.

Lema: Sea $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, una matriz con **diagonal dominante**. Entonces B es invertible.
demostración:

Como B tiene daigonal dominante, existe un vector de coordenadas positivas $d = (d_1, d_2, \cdots, d_n)$ tal que

$$d_j.||b_{jj}|| > \sum_{i\neq j} d_i.||b_{ij}||; \text{ para todo } j = 1, 2, ..., n. \tag{1}$$

Consideramos la matriz $C = DB$, siendo D la matriz diagonal, con diagonal el vector d, o sea

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & d_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}.$$

Probaremos que $C = DB$ es invertible (con lo cual B es invertible). Recordar que una matriz es invertible si y solo si su transpuesta lo es. O sea, probaremos que C^T es invertible, y **esto lo haremos por absurdo**.
Asumamos C^T no es invertible. Esto implica que la transformación lineal definida por $C^T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ tiene núcleo no trivial, con lo cual existe $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ vector no nulo tal que $C^T.x = \vec{o}$. Teniendo en cuenta que $C^T.x = \vec{o}$ si y solo si $x^T.C = \vec{o}$, se obtiene la ecuación:

$$\sum_{i=1}^{i=n} x_i.c_{ij} = 0, \text{ para todo } 1 \leq j \leq n.$$

Por otro lado $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \neq \vec{o}$, con lo cual, si ordenamos en forma dcreciente los módulos de sus coordenadas, tenemos:

$$||x_{i_1}|| \geq ||x_{i_2}|| \geq ... \geq ||x_{i_{n-1}}|| \geq ||x_{i_n}||, \text{ con } ||x_{i_1}|| > 0.$$

Como $\sum_{i=1}^{i=n} x_i.c_{ij} = 0$, para todo $1 \leq j \leq n$, tomando $j = i_1$, se tiene $x_{i_1}.c_{i_1 i_1} = -\sum_{i\neq i_1} x_i.c_{ii_1}$, con lo cual $||x_{i_1}.c_{i_1 i_1}|| = ||-\sum_{i\neq i_1} x_i.c_{ii_1}|| = ||\sum_{i\neq i_1} x_i.c_{ii_1}||$.
Así:

$$||x_{i_1}||.||c_{i_1 i_1}|| = ||x_{i_1}.c_{i_1 i_1}|| = ||\sum_{i\neq i_1} x_i.c_{ii_1}|| \leq \sum_{i\neq i_1} ||x_i.c_{ii_1}|| = \sum_{i\neq i_1} ||x_i||.||c_{ii_1}|| \leq \sum_{i\neq i_1} ||x_{i_1}||.||c_{ii_1}||.$$

Dividiendo todo entre $||x_{i_1}|| \neq 0$, se obtiene:

$$||c_{i_1 i_1}|| \leq \sum_{i \neq i_1} ||c_{i i_1}||. \tag{2}$$

Como $C = DB$, se tiene que $c_{i_1 i_1} = d_{i_1}.b_{i_1 i_1}$ en tanto que $c_{i i_1} = d_i.b_{i i_1}$. Recordando que los elementos $d_i > 0$, para todo $1 \leq i \leq n$, entonces la desigualdad (2) de arriba se reescribe así:

$$d_{i_1}.||b_{i_1 i_1}|| = ||d_{i_1}.b_{i_1 i_1}|| \leq \sum_{i \neq i_1} ||d_i.b_{i i_1}|| = \sum_{i \neq i_1} d_i.||b_{i i_1}||; \tag{3}$$

y esta última desigualdad contradice la desigualdad de (1). Contradicción. Po lo tanto lo asumido arriba es falso, con lo cual C^T es invertible, por lo tanto C es invertible, con lo cual B es invertible. $\square$

Marcelo Lanzilotta