Introducción a las Ecuaciones Diferenciales
Solución primer parcial

16 de setiembre de 2023.

[**Ejercicio 1**]. Los valores propios de la matriz A son $1/2 \pm i\sqrt{15}/2$. Por lo tanto las trayectorias se alejan del origen en el futuro. El vector tangente a la solución que en $t = 0$ pasa por el punto $(1, 0)$ es el vector $(2, 3)$. Por lo tanto la solución es B).

[**Ejercicio 2**]. Recordamos que si λ es valor propio de una matriz A y v es vector propio asociado a λ ($A(v) = \lambda v$), entonces $\varphi(t) = e^{\lambda t}v$ es solución de la ecuación $\dot{X} = AX$. Los valores propios de la matriz son $\lambda_1 = 1$ doble y $\lambda_2 = -1$ simple. El vector propio asociado a $\lambda_2 = -1$ es $(0, y_0, y_0)$. Por lo tanto $\varphi(t) = e^{-t}(0, y_0, y_0)$ es solución y tiende al origen en el futuro. La opción correcta es C).

[**Ejercicio 3**]. Recordar que en este ejercicio llamaremos $H(t)$ al escalón de Heaviside, definido como:

$$H(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases} .$$

1. Usando la definición de transformada de Laplace, tenemos que:

$$\mathcal{L}\left(tH(t)\right)(s) = \int_0^{+\infty} te^{-st}\,dt = \lim_{T\to+\infty} -\frac{e^{-st}}{s^2}(st+1)\Big|_{t=0}^{t=T} = \lim_{T\to+\infty}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{e^{-sT}}{s^2}(sT+1)\right) = \frac{1}{s^2}$$

ya que

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{e^{-sT}}{s^2}(sT+1) = 0\,.$$

2. Si llamamos $h(t) = f(t-a)H(t-a)$, observar que

$$h(t) = \begin{cases} f(t-a) & \text{si } t \geq a \\ 0 & \text{si } t < a \end{cases}$$

Por lo tanto, la transformada de Laplace de h es:

$$\mathcal{L}\left(h\right)(s) = \int_0^{+\infty} h(t)e^{-st}\,dt = \int_a^{+\infty} f(t-a)e^{-st}\,dt$$

Observar que usamos que $a > 0$ para la segunda integral. Haciendo el cambio de variable $u = t - a$, tenemos que $du = dt$ y entonces:

$$\mathcal{L}\left(h\right)(s) = \int_a^{+\infty} f(t-a)e^{-st}\,dt = \int_0^{+\infty} f(u)e^{-s(u+a)}\,du = e^{-sa}\int_0^{+\infty} f(u)e^{-su}\,du = e^{-sa}F(s)$$

3. Usando la definición de transformada, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(g)(s) &= \int_0^{+\infty} g(t)e^{-st}\,dt = \int_0^1 te^{-st}\,dt + \int_1^2 (2-t)e^{-st}\,dt \\
&= \int_0^1 te^{-st}\,dt + 2\int_1^2 e^{-st}\,dt - \int_1^2 te^{-st}\,dt \\
&= -\frac{e^{-st}}{s^2}(st+1)\Big|_{t=0}^{t=1} - 2\frac{e^{-st}}{s}\Big|_{t=1}^{t=2} + \frac{e^{-st}}{s^2}(st+1)\Big|_{t=1}^{t=2} \\
&= \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s^2}(s+1) + 2\frac{e^{-s}}{s} - 2\frac{e^{-2s}}{s} + \frac{e^{-2s}}{s^2}(2s+1) - \frac{e^{-s}}{s^2}(s+1) \\
\Rightarrow \mathcal{L}(g)(s) &= \frac{1}{s^2} - 2\frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{s^2}.
\end{aligned}$$

Otra forma de hallar la transformada de g es escribir

$$g(t) = tH(t) - 2(t-1)H(t-1) + (t-2)H(t-2)$$

y usar la parte anterior.

4. Si llamamos $G(s)$ a la transformada de $g(t)$ y $X(s)$ a la de $x(t)$, transformando la ecuación y usando las condiciones iniciales tenemos que:

$$s^2X(s)+X(s) = G(s) \Rightarrow X(s) = \frac{G(s)}{s^2+1} = \frac{1}{s^2+1}\left(\frac{1}{s^2} - 2\frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{s^2}\right) = \frac{1}{s^2(s^2+1)}\left(1 - 2e^{-s} + e\right.$$

Observando que $\frac{1}{s^2(s^2+1)} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1}$, vemos que la antitransformada de ese término es $H(t)(t-\sin(t))$. Entonces, usando la propiedad de la parte 2 tenemos que:

$$x(t) = H(t)(t-\sin(t)) - 2H(t-1)(t-1-\sin(t-1)) + H(t-2)(t-2-\sin(t-2)).$$

[Ejercicio 4].

Consideremos la ecuación $x' = 2t\cos(x-t^2)$.

Parte 1). La ecuación es $x' = 2t\cos(x-t^2) = f(t,x)$. Como la función $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es de clase C^1 en todo $\mathbb{R}^2$, está en las hipótesis del Teorema de Picard. Por lo tanto, existe una única solución maximal con $x(t_0) = x_0$.

Parte 2). Buscamos soluciones de la forma $x(t) = a + t^2$, con $a \in \mathbb{R}$. Entonces debe cumplirse que $\dot{x}(t) = 2t = 2t\cos(a+t^2-t^2)$. Simplificando queda que $1 = \cos(a)$. Por lo tanto $a = 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Luego las soluciones son de la forma $x_k(t) = 2k\pi + t^2$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Parte 3). Primero observemos que cada parábola de la forma $x = a + t^2$ separa al plano en dos regiones: $\{(t,x) : \quad x > a + t^2\}$ (la parte de arriba de la parábola) y $\{(t,x) : \quad x < a + t^2\}$ (la parte de abajo de la parábola).

Sea (I, φ) una solución maximal con $\varphi(t_0) = x_0$. Para cada $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ existen $k_0, k_1 \in \mathbb{Z}$ tal que (t_0, x_0) queda por arriba de la parábola $x_{k_0}(t) = 2k_0\pi + t^2$ y por debajo de la parábola $x_{k_1}(t) = 2k_1\pi + t^2$ (mirar figura 1 (a)). Vamos a probar que el intervalo maximal I no está acotado superiormente. Supongamos que $I = (a, b)$ con $b \in \mathbb{R}$. Sea K el compacto de la figura 1 (b). Por el Teorema de salida de compactos, sabemos que tiene que existir $t_1 \in I$, $t_1 > t_0$, tal que $(t_1, \varphi(t_1)) \notin K$. El gráfico de φ no se puede "salir"por los lados superior e inferior de K porque cortarían a las soluciones x_{k_0} y x_{k_1}. Por lo tanto se sale por el lado derecho, contradiciendo que I es el intervalo maximal. Análogamente se prueba que el intervalo maximal es no acotado inferiormente.

Figura 1: