Universidad de la República – Facultad de Ingeniería – IMERL.
Curso: Int. a las Ecuaciones Diferenciales.

PRIMER PARCIAL – 16 DE SETIEMBRE DE 2023. DURACIÓN: 3:30 HS

Nº Lista	Apellido, Nombre	Cédula	Firma

RESPUESTAS MO	
Ej 1	Ej 2

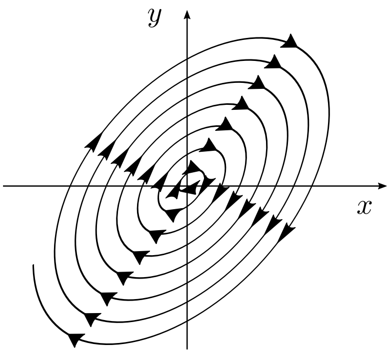
PARA USO DOCENTE				
Ej 1	Ej 2	Ej 3	Ej 4	**Total**

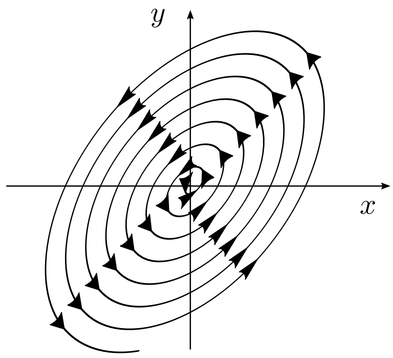
Ejercicio 1. (Correcta: 7 puntos. Incorrecta: −1 punto. No responder: 0 puntos)

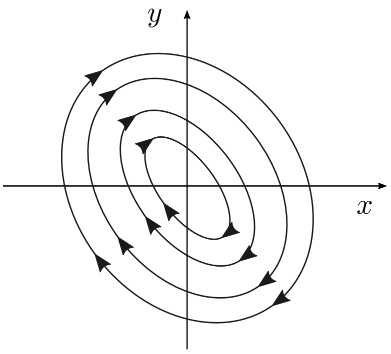
Consideremos la ecuación $\dot{X} = AX$ para la matriz:

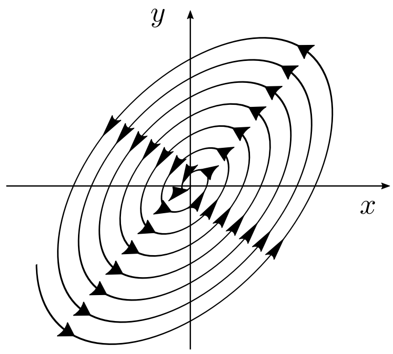
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Solo una de las siguientes figuras se corresponde con el diagrama de fase de la ecuación. Indicar cuál:

(A)


(B)


(C)


(D)


Ejercicio 2. (Correcta: 7 puntos. Incorrecta: −1 punto. No responder: 0 puntos)

Sea el problema

$$\begin{cases} \dot{X} = AX \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

donde A es la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solo una de las siguientes condiciones iniciales hace que la solución de la ecuación esté acotada a futuro. Indicar cuál:

(A) $X_0 = (3, 0, 3)$ (B) $X_0 = (1, 1, 0)$ (C) $X_0 = (0, 2, 2)$ (D) $X_0 = (2, 1, 2)$

Ejercicio 3. (13 puntos)

En este ejercicio llamaremos $H(t)$ al escalón de Heaviside, definido como:

$$H(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}.$$

1. Probar que la transformada de Laplace de $tH(t)$ es $\dfrac{1}{s^2}$.
2. Dada una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y un $a > 0$, probar que si $F(s)$ es la transformada de Laplace de $f(t)H(t)$ entonces $F(s)e^{-as}$ es la transformada de Laplace de $f(t-a)H(t-a)$.
3. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida como:

$$g(t) = \begin{cases} t, & \text{si } t \in [0,1] \\ 2-t, & \text{si } t \in (1,2] \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

   Hallar la transformada de Laplace de g.
4. Hallar la solución de la ecuación $\ddot{x} + x = g(t)$ con $x(0) = \dot{x}(0) = 0$.

<u>**Nota:**</u> Para este ejercicio puede ser de utilidad la igualdad $\displaystyle\int te^{-st}\,dt = -\frac{e^{-st}}{s^2}(st+1)$ y la siguiente tabla de transformadas de Laplace:

$f(t)$	$\mathcal{L}(f)(s)$
$H(t)$	$\dfrac{1}{s}$
$H(t)t$	$\dfrac{1}{s^2}$
$H(t)e^{at}$	$\dfrac{1}{s-a}$
$H(t)\cos(\omega t)$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$
$H(t)\sin(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$H(t)\cosh(\omega t)$	$\dfrac{s}{s^2-\omega^2}$
$H(t)\sinh(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{s^2-\omega^2}$

Ejercicio 4. (13 puntos)

Consideremos la ecuación $x' = 2t\cos(x - t^2)$.

1. Probar que para cada punto $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ existe una única solución maximal con $x(t_0) = x_0$.
2. Buscar soluciones de la forma $x(t) = a + t^2$, con $a \in \mathbb{R}$.
3. Probar que el intervalo maximal de cualquier solución maximal es $\mathbb{R}$.