Clase 19:

Conjuntos abiertos

CDIVV – 2023 - 2sem

Eugenia Ellis

eellis@fing.edu.uy

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ conjunto $\qquad x_0 \in \mathbb{R}^n$

x_0 es punto interior a $A \iff \exists\, \delta > 0$ tq

$$B(x_0, \delta) \subseteq A$$

x_0 es punto exterior a $A \iff \exists\, \delta > 0$ tq

$$B(x_0, \delta) \subseteq A^c$$

x_0 es punto frontera de $A \iff \forall\, \delta > 0$

$$B(x_0, \delta) \cap A^c \neq \emptyset$$

y

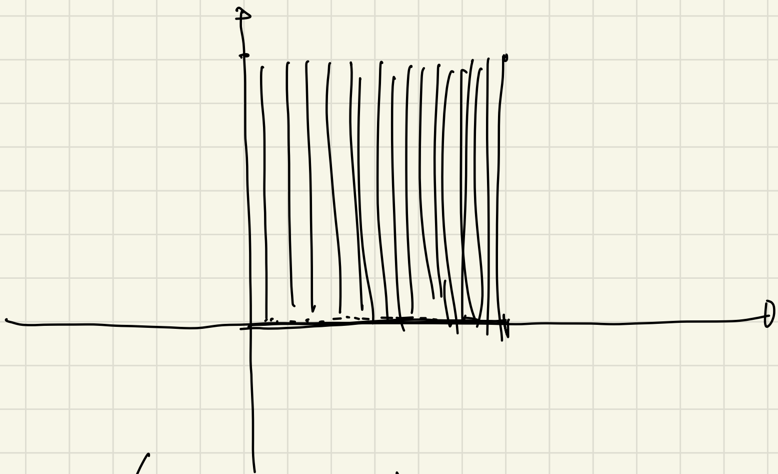
$$B(x_0, \delta) \cap A \neq \emptyset$$

Notación

- $A^{\circ} = \{ x \in \mathbb{R}^n : x \text{ es interior a } A \}$
- $A^{ext} = \{ x \in \mathbb{R}^n : x \text{ es exterior a } A \}$
- $\partial A = \{ x \in \mathbb{R}^n : x \text{ es frontera de } A \}$

Ejemplo:

1) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Q}\ 0 \leq x \leq 1 \quad 0 \leq y \leq 1\}$



$\mathring{A} = \emptyset \qquad \partial A = [0,1] \times [0,1]$.

$A^{ext} = (\partial A)^c$

Def: Decimos que un conjunto A es **abierto** si todos sus puntos son interiores es decir

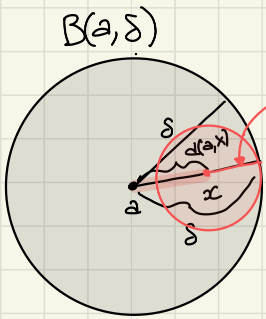
$$A = \mathring{A}$$

Proposición

$$B(a,\delta) = \{x\in \mathbb{R}^n : d(a,x)<\delta\}$$

es un conjunto abierto

Dem: Tenemos que probar que todo punto de $\overset{A}{B(a,\delta)}$ es interior



Sea $x \in \overset{A}{B(a,\delta)}$, x es interior a $\overset{A}{B(a,\delta)}$ si existe $\tilde{\delta} > 0$ tal que

$$B(x,\tilde{\delta}) \subseteq \overset{A}{B(a,\delta)}$$

Tomando $\tilde{\delta} = \delta - d(a,x) > 0$

Probemos que $B(x,\tilde{\delta}) \subseteq B(a,\delta)$:

Sea $y \in B(x,\tilde{\delta}) \Rightarrow d(x,y) < \tilde{\delta}$

$$d(x,y) < \delta - d(a,x)$$

$$\Rightarrow \quad d(a,x) + d(x,y) < \delta$$

$$\Rightarrow \quad d(a,y) \leq d(a,x) + d(x,y) < \delta$$

desigualdad triangular

$$\Rightarrow \quad d(a,y) < \delta$$

$$\Rightarrow \quad y \in B(a,\delta),$$

Pregunta: • Si A y B son conjuntos abiertos

¿que pasa con $A \cup B$ y $A \cap B$?

• $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de conjuntos

¿que pasa con $\bigcup_{i \in I} A_i$ y $\bigcap_{i \in I} A_i$?

Ej:

$$A_i = B(0, 1/i) \leftarrow \text{es un conjunto abierto}$$

$\uparrow$

$\mathbb{R}^n$

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = \{0\}$$

$\uparrow$ no es abierto

Prop: Si A y B son conjuntos abiertos $\Rightarrow$ $A \cap B$ es conjunto abierto

Dem:

Sea $x \in A \cap B \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} x \in A \\ A \text{ es abierto} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, \delta_1 > 0 \text{ tal que } B(x, \delta_1) \subseteq A$$

$$\left.\begin{array}{l} x \in B \\ B \text{ es abierto} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, \delta_2 > 0 \text{ tal que } B(x, \delta_2) \subseteq B$$

$$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$$

$$\Rightarrow \quad B(x,\delta) \subseteq B(x,\delta_1) \subseteq A$$
$$B(x,\delta) \subseteq B(x,\delta_2) \subseteq B$$

$$\Rightarrow \quad B(x,\delta) \subseteq A \cap B.$$

$\Rightarrow$ x es interior a $A \cap B$

$\Rightarrow$ $A \cap B$ es abierto

$$\boxed{\text{Prop: Sea } \{A_i\}_{i\in I} \text{ una familia de conjuntos abiertos} \Rightarrow \bigcup_{i\in I} A_i \text{ es abierto}}$$

Dem: Sea $x \in \bigcup_{i\in I} A_i \Rightarrow \exists\, i_0 \in I$

$$\left.\begin{array}{l} \text{tal que } x \in A_{i_0} \\ A_{i_0} \text{ abierto} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $\exists\, \delta > 0$ tal que $B(x,\delta) \subseteq A_{i_0}$

$$\Rightarrow \quad B(x,\delta) \subseteq A_{i_0} \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$$

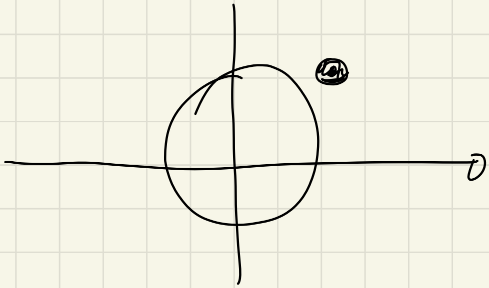
$\Rightarrow$ x es un punto interior a $\bigcup_{i\in I} A_i$

$$\Rightarrow \bigcup_{i\in I} A_i \text{ es abierto}$$

Def: $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto $\boxed{\text{cerrado}}$ si A^c es abierto.

Ejemplo:

1) $A = \overline{B(a,\delta)} = \{x \in \mathbb{R} : d(x,a) \leq \delta\}$ es cerrado.



Ejercicio: Probar

2) $A = \{a\}$ es cerrado

Ejercicio: Probar

3) $S^{n-1} = \{ x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1 \}$ es cerrado

Ejercicio: Probar.

Observaciones:

- Si $x \in \partial A \iff \forall \delta > 0$

$$B(x,\delta) \cap A \neq \emptyset$$
$$B(x,\delta) \cap A^c \neq \emptyset$$

$\iff \quad \forall \delta > 0 \quad B(x,\delta) \cap A^c \neq \emptyset$

$$B(x,\delta) \cap (A^c)^c \neq \emptyset$$

$(A^c)^c = A$

$\Leftrightarrow \quad x \in \partial A^c$

$$\boxed{\partial A = \partial A^c}$$

- $\left.\begin{array}{l} C \text{ conjunto cerrado.} \\ x \in \partial C \end{array}\right\} \Rightarrow x \in C$

Dem: $x \in C$ ó $x \in C^c$

$\left.\begin{array}{l}\text{Supongamos que } x \in C^c \\ \text{Como } C \text{ es cerrado} \Rightarrow C^c \text{ es abierto}\end{array}\right\}$

$\Rightarrow \exists\, \delta > 0$ tq $B(x,\delta) \subseteq C^c$

$\Rightarrow B(x,\delta) \cap C = \emptyset$ $\sum\!\!\!\!/$

porque $x \in \partial C$.

- C conjunto tal que $\partial C \subseteq C$ $\Big\} \Rightarrow C$ es cerrado

Dem:

Sea $x \in C^c$, queremos probar que $\exists\, \delta > 0$ tq $B(x,\delta) \subseteq C^c$.

Todo punto en $\mathbb{R}^n$ es $\begin{cases} \text{exterior a } C \\ \text{interior a } C \\ \text{frontera de } C, \end{cases}$

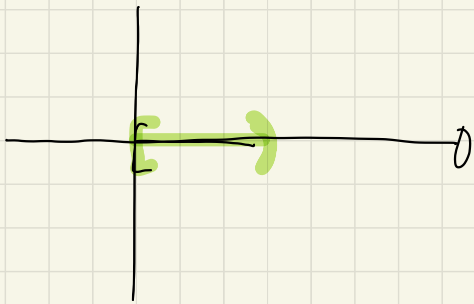
- x no puede ser interior a C porque $x \notin C$

- x no es frontera de C porque $\partial C \subseteq C$ $(y\ x \in C^c)$

- x no tiene otra que ser exterior a C, $\exists\, \delta > 0$ tq $B(x,\delta) \subseteq C^c$

$\Rightarrow C^c$ es abierto $\Rightarrow C$ es cerrado

Hay conjuntos que no son abiertos ni cerrados.



$A = [0,1)$

si $\partial A \subseteq A \Rightarrow A$ es cerrado.

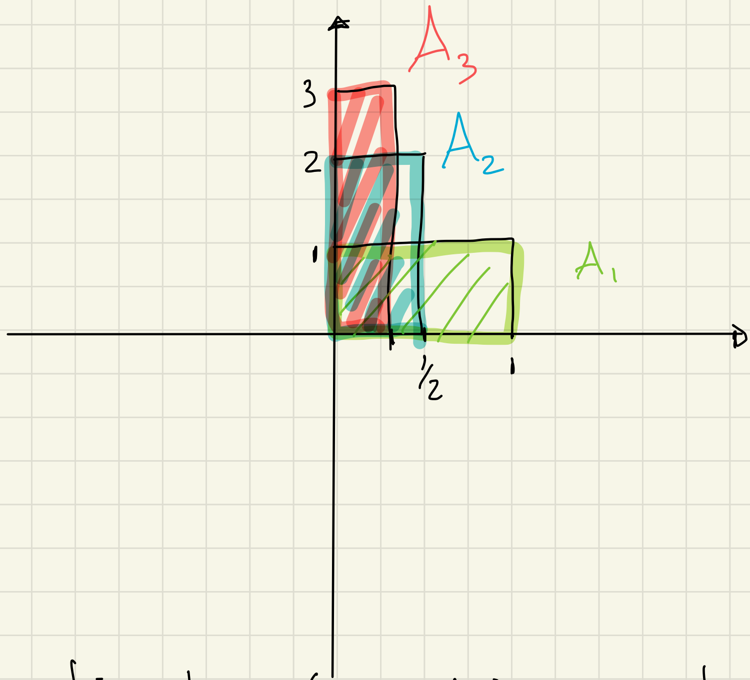
$\partial A \subseteq A^c \Rightarrow A$ es abierto.

Ejemplo:

$$A_i = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1/i \ , \ 0 < y < i\}$$

$$A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$$

A_i



A_i es abierto (no tiene puntos frontera dentro)

$\Rightarrow \quad A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ es abierto

por la proposición recién probada