

Radiación en la atmósfera

Clase VIII: Dispersión

Nicolás Casaballe

ncasabal@fing.edu.uy

Universidad de la República

2023



Dispersión

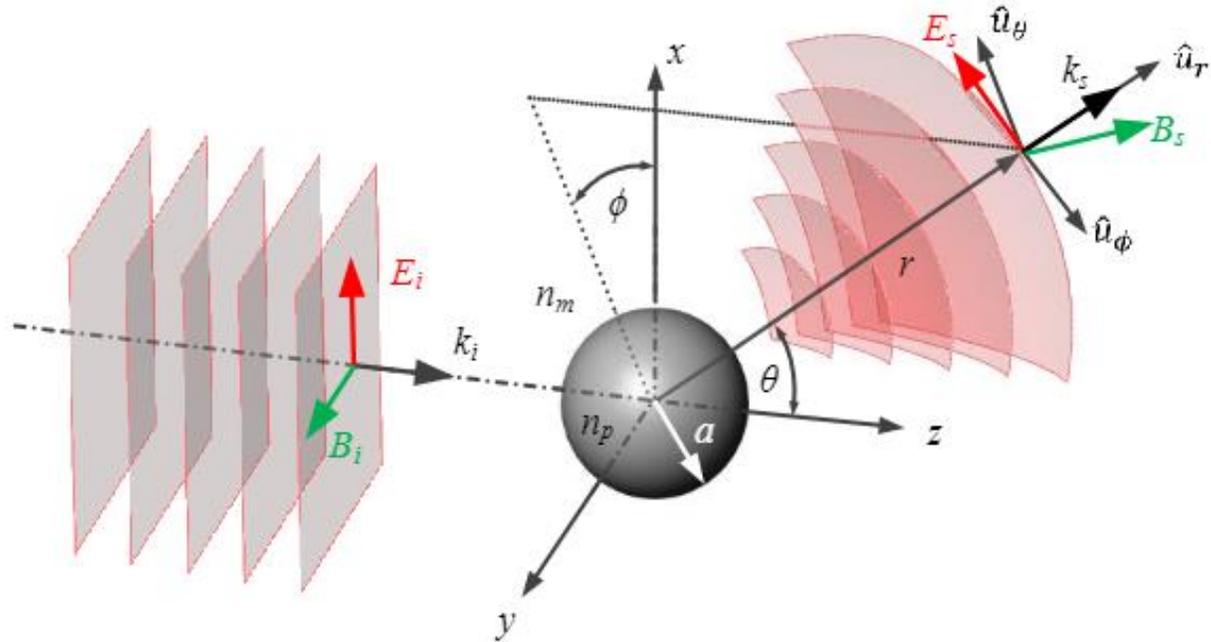
Definición:

- *Scatter*: 1. Throw in various random directions. 2. A small, dispersed amount of something.
- *Dispersión*: 1. Acción y efecto de dispersar (Dispersar: separar y diseminar lo que estaba o solía estar reunido). 2. Descomposición de una radiación en sus diferentes longitudes de onda por la acción del medio de propagación, como la luz cuando atraviesa las gotas de lluvia formando el arco iris.

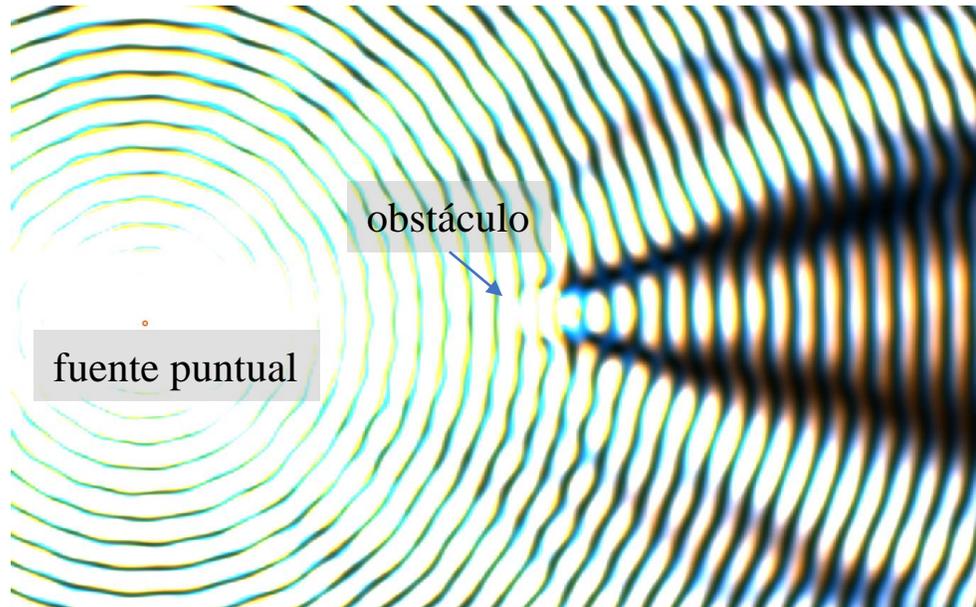
Dispersión de la radiación en la atmósfera:

- Ocurre cuando la radiación se **desvía** de su dirección de propagación original. Es uno de los mecanismos que producen **extinción** de la radiación.
- Predomina en el caso de dispersión por moléculas y aerosoles en la región UV, Visible e IR cercano.





Efficient computation of arbitrary beam scattering on a sphere (DOI: 10.1016/j.jqsrt.2020.106887)
 Yuval Kashter, Falek Eran, Pavel Ginzburg.



https://www.reddit.com/r/Physics/comments/dmxgh3/i_made_a_webbased_interactive_simulator_for/

<https://cemsim.com/>

Albedo de dispersión

extinción = absorción + dispersión:

$$\beta_e = \beta_a + \beta_s$$

Albedo de dispersión única (single scatter albedo):

$$\tilde{\omega} := \frac{\beta_s}{\beta_e} = \frac{\beta_s}{\beta_a + \beta_s}$$

Si $\tilde{\omega} = 0 \rightarrow$ solo hay absorción

Si $\tilde{\omega} = 1 \rightarrow$ solo hay dispersión

Dispersión en la ecuación de transferencia radiativa y función de fase de dispersión (**scattering phase function**)

Cambio de intensidad cuando la radiación atraviesa un camino ds en dirección $\hat{\Omega}$:

$$dI = dI_{\text{ext}} + dI_{\text{emit}} + dI_{\text{scat}}$$

- * $dI_{\text{emit}} = \beta_a B(T) ds$: contribución por emisión térmica.
- * $dI_{\text{ext}} = -\beta_e I ds$: absorción y dispersión fuera de $\hat{\Omega}$.
- * dI_{scat} : contribución de radiación que **entra** desde direcciones $\hat{\Omega}'$ y se dispersa hacia $\hat{\Omega}$.

$$dI_{\text{scat}} = \frac{\beta_s}{4\pi} \int_{4\pi} p(\hat{\Omega}', \hat{\Omega}) I(\hat{\Omega}') d\omega' ds$$

$p(\hat{\Omega}', \hat{\Omega})$: **función de fase de la dispersión.**

Corresponde a la fracción de energía que es desviada desde $\hat{\Omega}'$ hacia $\hat{\Omega}$.

Normalización:

$$\frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} p(\hat{\Omega}', \hat{\Omega}) d\omega' = 1$$

Función de fase $p(\hat{\Omega}', \hat{\Omega})$

- Se puede interpretar como la probabilidad de que un fotón que proviene de la dirección $\hat{\Omega}'$ se desvíe a una dirección dentro de un elemento infinitesimal de ángulo sólido $d\omega$ en torno a $\hat{\Omega}$.
- Sería *más general* tomar en cuenta la polarización de la luz.
 - Para ello se utiliza una matriz 4×4 ...
- Si asumimos ciertas simetrías de los procesos de dispersión, podemos simplificar y decir que la función de fase solo depende del ángulo relativo entre $\hat{\Omega}'$ y $\hat{\Omega}$.

En ese caso:

$$\cos \Theta := \hat{\Omega}' \cdot \hat{\Omega}$$

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} p(\cos \Theta) \sin \Theta d\Theta d\phi = 1$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} p(\cos \Theta) d \cos \Theta = 1$$

PARA PENSAR...

¿Por qué normalmente no ‘vemos’ los rayos de luz?



Escena de
Los Archivos X

¿Bajo qué condiciones esperaríamos que la dispersión solo dependa del ángulo relativo entre las direcciones $\hat{\Omega}$ y $\hat{\Omega}'$?

Parámetro de Asimetría

$$g := \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} p(\cos \Theta) \cos \Theta d\omega$$

- Cuantifica la proporción relativa de dispersión frontal contra la reversa (*forward vs backward*).
- $-1 \leq g \leq 1$
- Si $g > 0$ predomina la dispersión hacia adelante.
- Si $g < 0$ predomina la dispersión hacia atrás.

Modelos sencillos de función de fase: existen muchas situaciones donde se pueden utilizar modelos simples. Por ejemplo:

Dispersión isotrópica: $p_{iso}(\cos \Theta) = 1$; $g = 0$.

Función de Henyey-Greenstein:

$$p_{HG}(\cos \Theta; g) = \frac{1 - g^2}{(1 + g^2 - 2g \cos \Theta)^{3/2}}$$

Función de Henyey-Greenstein doble:

$$p_{HG2}(\cos \Theta; g_1, g_2) = b p_{HG}(\cos \Theta; g_1) + (1 - b) p_{HG}(\cos \Theta; g_2)$$

Función de fase escalada por δ :

$$p(\cos \Theta) \approx (1 - B)p'(\cos \Theta) + 4B\delta(\cos \Theta - 1)$$

Expansión mediante polinomios de Legendre:

$$p(\cos \Theta) \approx \sum_{l=0}^{N-1} \beta_l P_l(\cos \Theta)$$

donde las funciones $P_l(x)$ son polinomios de grado l , determinadas por la condición $P_l(1) = 1$ junto con

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{mn}$$

$$P_0(x) = 1; P_1(x) = x; P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1); P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x); \dots$$

Los coeficientes de la función de fase se obtienen mediante

$$\beta_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 P_l(\cos \Theta) p(\cos \Theta) dx$$

Para resolver el problema físico de la dispersión:

- Nos preocupamos de las ondas monocromáticas

Una función arbitraria(*) se puede representar como superposición de exponenciales complejas de una frecuencia angular definida:

$$f(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\mathbf{r}, \omega) e^{i\omega t} d\omega \leftrightarrow F(\mathbf{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}, t) e^{-i\omega t} d\omega$$

- Resolvemos las Ecuaciones de Maxwell clásicas en un medio homogéneo sin carga libre,

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = 0,$$

junto con las condiciones de frontera correspondiente, suponiendo una onda incidente plana monocromática que incide sobre el cuerpo dispersor en el origen.

- Lo anterior implica que, escribiendo $\mathbf{E} = \mathbf{E} e^{i\omega t}$ y $\mathbf{H} = \mathbf{H} e^{i\omega t}$, los campos satisfacen la ecuación de onda vectorial en la forma

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{E} + k^2 m^2 \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla^2 \mathbf{H} + k^2 m^2 \mathbf{H} &= 0 \end{aligned}$$

donde $k = 2\pi/\lambda$ y $m = \sqrt{\mu\varepsilon}$.

Nota: aquí se utilizan unidades gaussianas siguiendo a Liou.

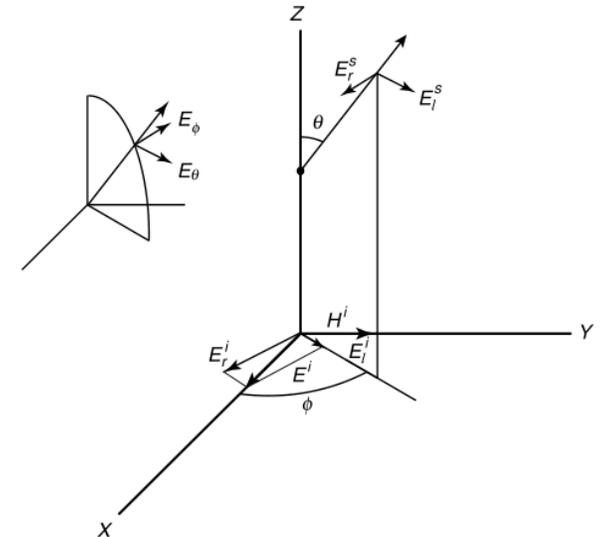
El campo electromagnético (total) es visto como la superposición del campo incidente y el dispersado:

$$\mathbf{E}^t = \mathbf{E}^i + \mathbf{E}^s$$

$$\mathbf{H}^t = \mathbf{H}^i + \mathbf{H}^s$$

Se encuentran resultados analíticos para ciertos casos específicos:

- Dispersión de Rayleigh:** se aplica si $\lambda \gg a$, de tal manera que el cuerpo se puede considerar como un dipolo puntual.
- Dispersión de Mie:** es válido si el objeto dispersor tiene simetría esférica. Se suele emplear cuando $\lambda \lesssim a$.
- Óptica geométrica:** se aplica si $\lambda \ll a$, de forma de poder tratar con los rayos y las leyes de la reflexión y refracción. El objeto debe tener una forma tratable.



Parámetro de tamaño

Se define como

$$x := \frac{2\pi a}{\lambda}$$

donde a es el radio de la partícula y λ es la longitud de onda de la radiación electromagnética.

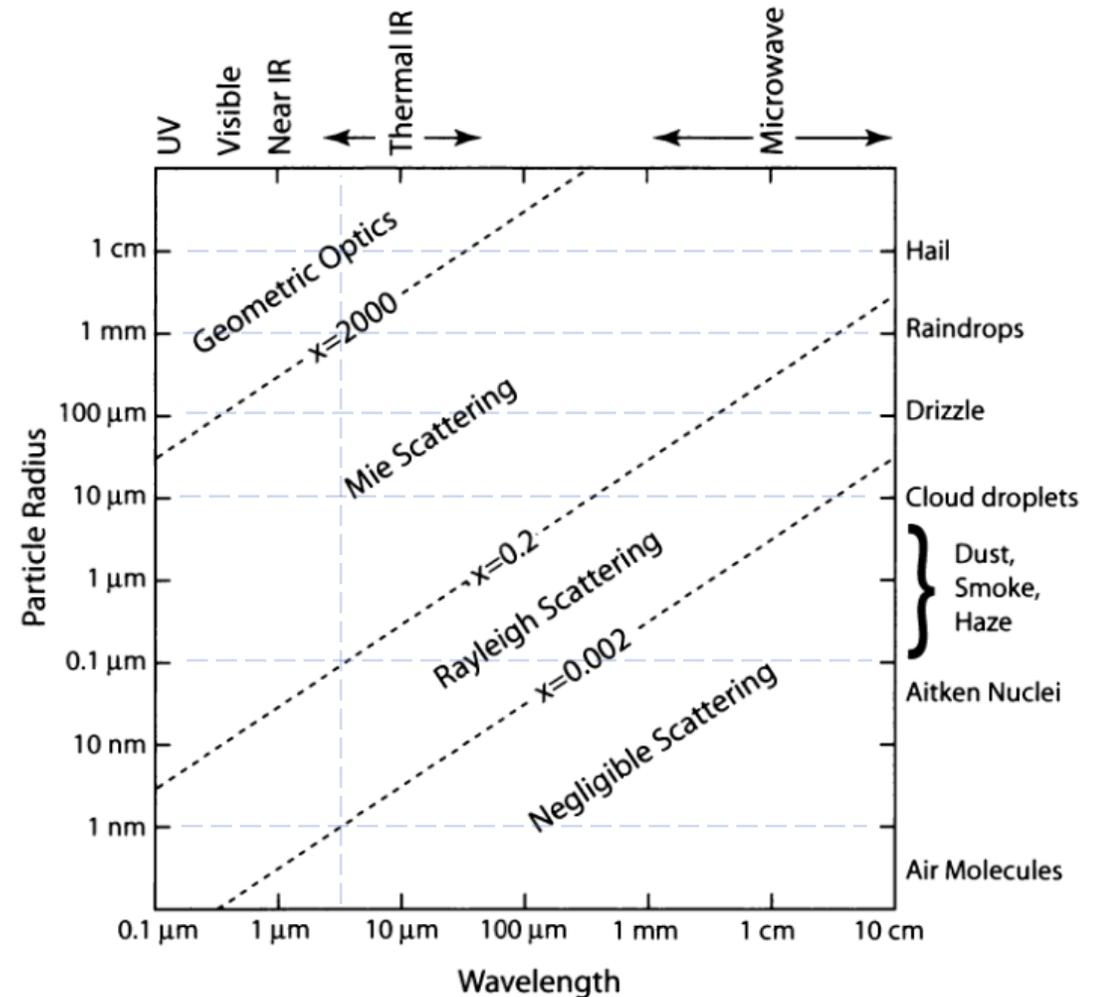
Las propiedades de la dispersión habitualmente se caracterizan en términos de x (en lugar de r o λ separadamente).

Si $x \ll 1$: régimen de Rayleigh

Si $1 \lesssim x < \infty$: dispersión de Mie*

Si $x \rightarrow \infty$: óptica geométrica

* la dispersión de Mie solo es exacta para partículas con simetría esférica.



Relación entre el tamaño de las partículas atmosféricas, longitud de onda de la radiación y el régimen de dispersión (Petty, Fig. 12.1).

RETOMAMOS LUEGO DE UNA PAUSA > - 10:00

- 08:00

- 06:00

- 04:00

- 02:00

- 00:00



Dispersión de Rayleigh (1871)

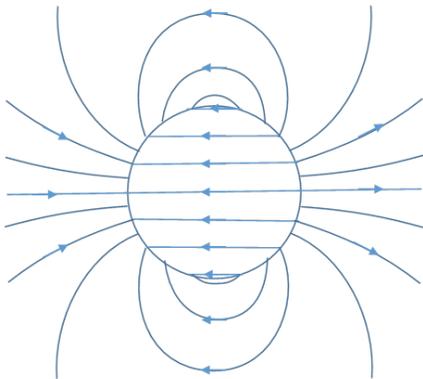
Imaginemos una partícula esférica, homogénea e isotrópica, de radio $a \ll \lambda$.

La radiación incidente es vista por partícula como un campo eléctrico homogéneo \mathbf{E}_0 , que induce un momento dipolar eléctrico \mathbf{p}_0 :

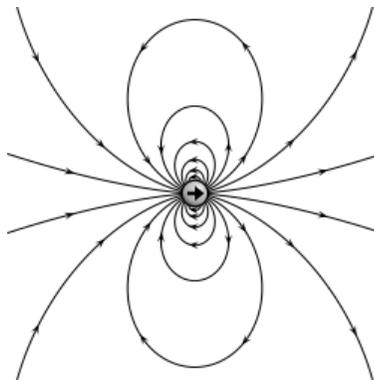
$$\mathbf{p}_0 = \alpha \mathbf{E}_0$$

El campo eléctrico producido por un dipolo oscilatorio a una distancia r , en una dirección que forma un ángulo γ con \mathbf{p}_0 resulta (Hertz, 1889):

$$\mathbf{E} = -\mathbf{E}_0 \frac{e^{-ik(r-ct)}}{r} k^2 \alpha \sin \gamma$$



Líneas de campo de una esfera polarizada.



Líneas de campo de un dipolo puntual.

α es la **polarizabilidad** de la partícula (asumimos el caso más simple).

- Para hallar la expresión para la polarizabilidad:

$$\varepsilon \mathbf{E} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P} \rightarrow \varepsilon = m^2 = 1 + 4\pi \mathbf{P} \cdot \mathbf{E} / E^2 \rightarrow \dots$$

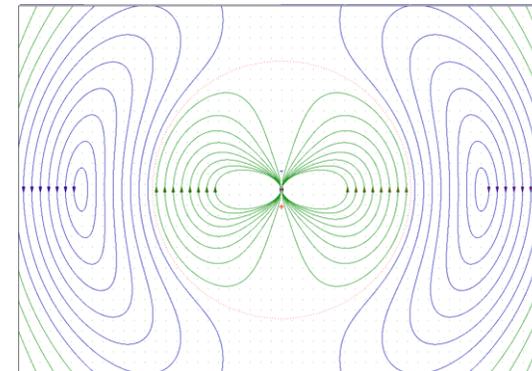
- Si $m = m_r + im_i$ es el índice de refracción y N_s es la densidad de moléculas, entonces

$$\alpha = \frac{3}{4\pi N_s} \left(\frac{m^2 - 1}{m^2 + 2} \right)$$

- En el caso de las moléculas en la atmósfera, m_i es despreciable en el rango espectral visible.
- Empíricamente se encuentra que (λ en μm):

$$(m_r - 1) \times 10^8 = 6432.8 + \frac{2,949,810}{146 - \lambda^{-2}} + \frac{25,540}{41 - \lambda^{-2}}$$

- Como $m_r \cong 1 \rightarrow \alpha \cong (m_r^2 - 1) / 4\pi N_s$.



<https://www.didaktikonline.physik.uni-muenchen.de/programme/dipolstr/DipoleRadiation.html#>

Dispersión de Rayleigh (1871)

Consideramos las componentes del campo eléctrico perpendicular (r) y paralela (l) al plano de dispersión:

$$\begin{cases} E_r = -E_{0r} \frac{e^{-ik(r-ct)}}{r} k^2 \alpha \sin \gamma_1 \\ E_l = -E_{0l} \frac{e^{-ik(r-ct)}}{r} k^2 \alpha \sin \gamma_2 \end{cases}$$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} E_r \\ E_l \end{bmatrix} = -\frac{e^{-ik(r-ct)}}{r} k^2 \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos \Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{0r} \\ E_{0l} \end{bmatrix}$$

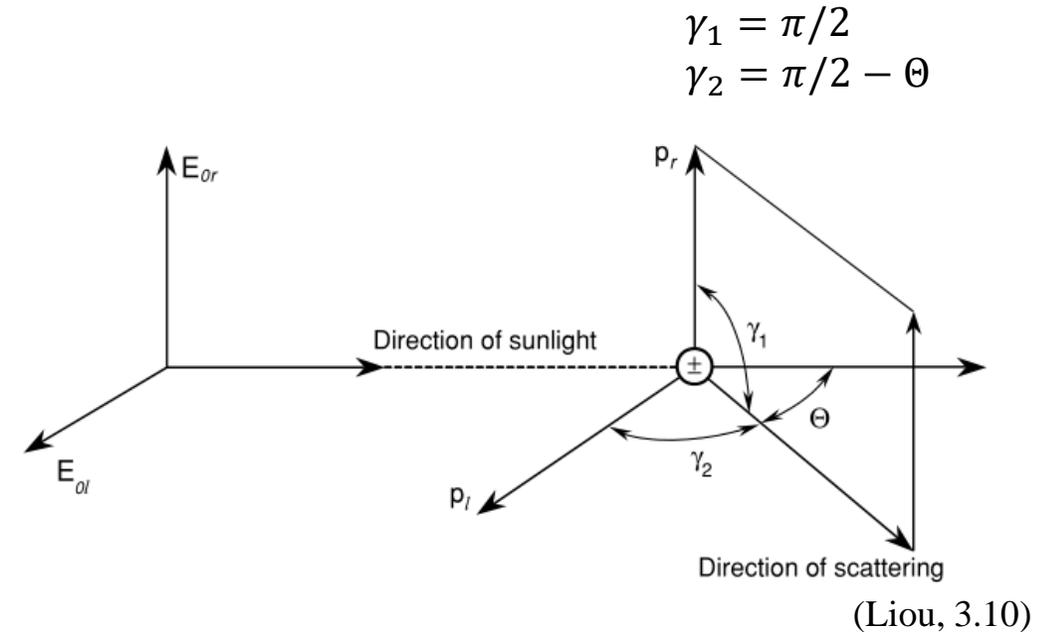
Intensidad:

Como $I_0 = C|E_0|^2$ y $I = C|E|^2$ (con C constante), entonces

$$\begin{cases} I_r = I_{0r} \frac{k^4 \alpha^2}{r^2} \\ I_l = I_{0l} \frac{k^4 \alpha^2 \cos^2 \Theta}{r^2} \end{cases}$$

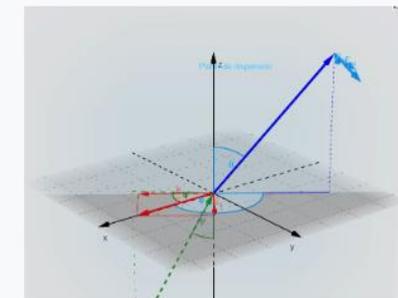
Para **luz natural** se tiene que la intensidad vale

$$I = I_r + I_l = (I_{0r} + I_{0l} \cos^2 \Theta) \frac{k^4 \alpha^2}{r^2} = \frac{I_0}{r^2} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^4 \frac{1 + \cos^2 \Theta}{2}$$



URL

Ángulos de dispersión y componentes del campo eléctrico

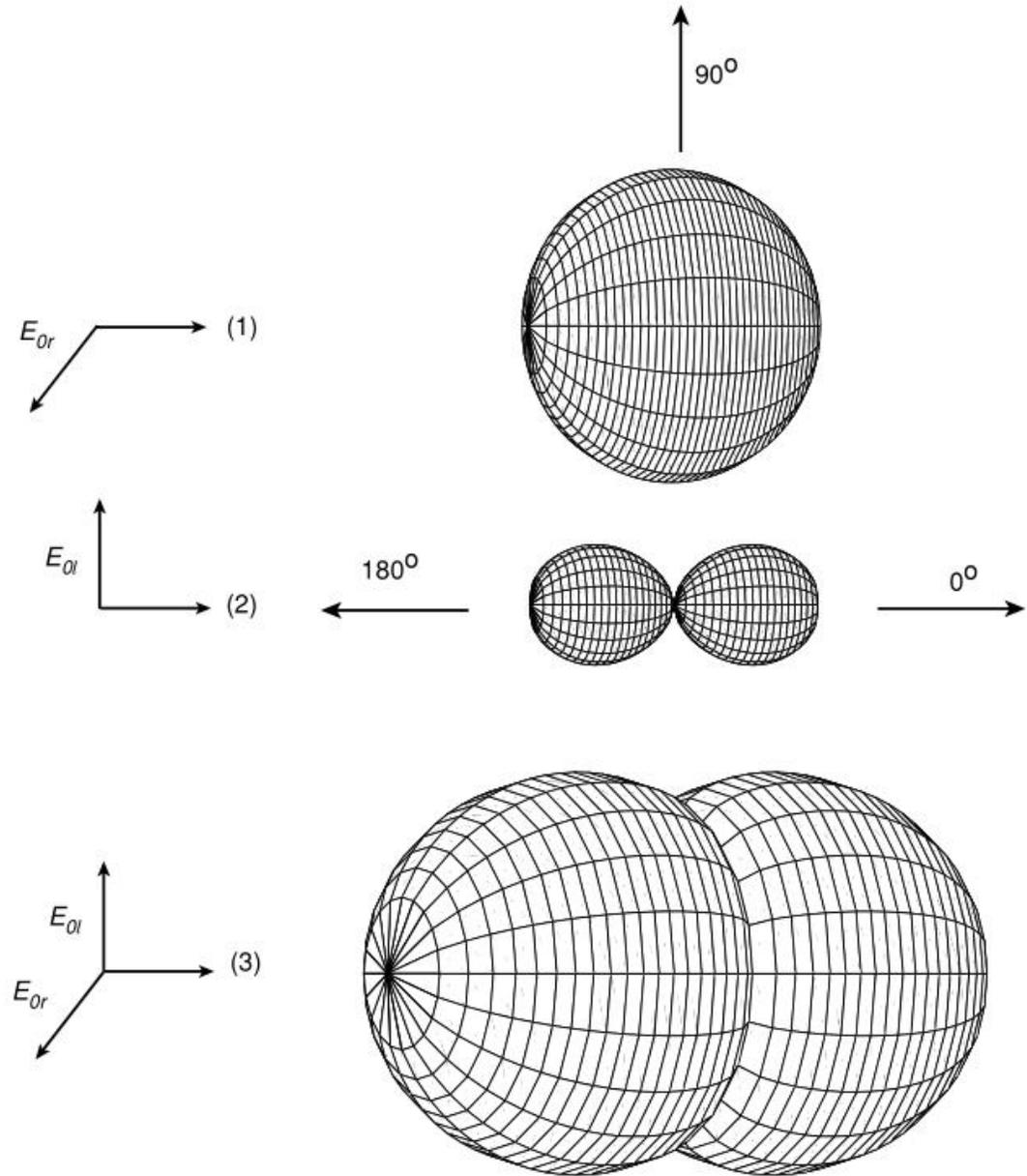
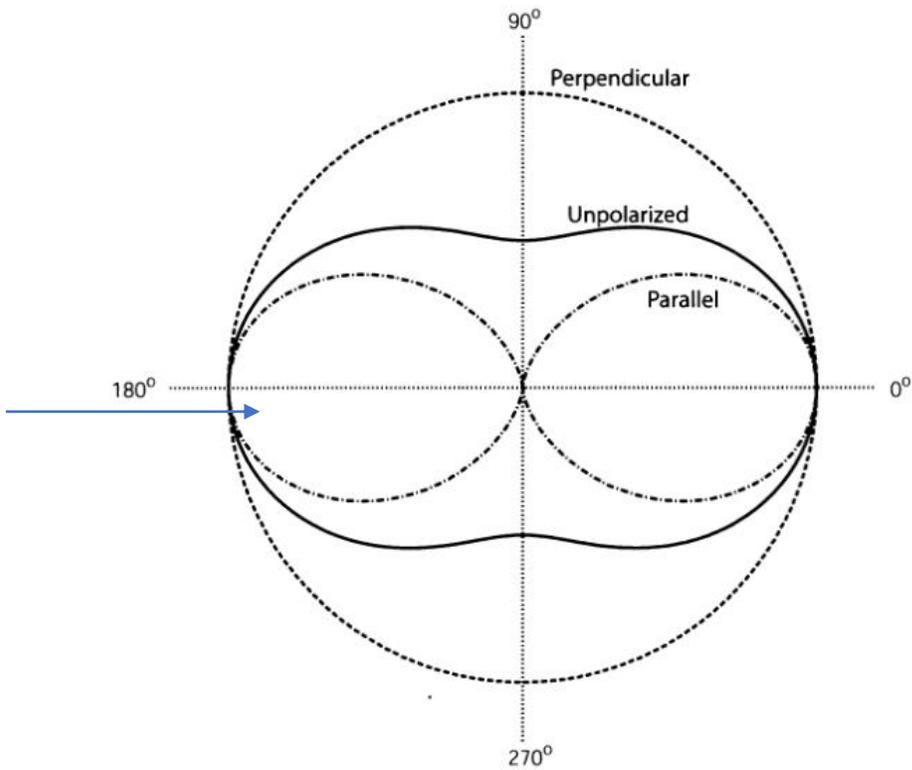


Podemos escribir

$$I(\Theta) = \frac{I_0}{r^2} \alpha^2 \frac{128\pi^5}{3\lambda^4} \frac{p(\Theta)}{4\pi}$$

usando la función de fase de Rayleigh

$$p(\Theta) = \frac{3}{4} (1 + \cos^2 \Theta)$$



PARA PENSAR...

¿Cómo es que la dispersión de Rayleigh explica el color del cielo?

¿Por qué es azul? ¿Por qué en el atardecer es rojizo?

¿Por qué no es violeta?



¿Esperamos ver algo diferente si observamos el cielo utilizando un filtro polarizador?

Dispersión de Mie (1908):

Explica la dispersión de una onda electromagnética cuando incide sobre un cuerpo esférico homogéneo.

Bosquejo del método de solución:

1) Encontramos la solución general de las Ecuaciones de Maxwell en coordenadas esféricas r, θ, ϕ .

(i) De ecuación vectorial a ecuación escalar:

- Los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} satisfacen $\nabla^2 \mathbf{A} + k^2 m^2 \mathbf{A} = 0$ (ecuación vectorial).
- Buscamos la **solución general** de $\nabla^2 \psi + k^2 m^2 \psi = 0$ (ecuación escalar).
- Definimos los vectores $\mathbf{M}_\psi = \nabla \times [\mathbf{a}_r(r\psi)]$; $mk\mathbf{N}_\psi = \nabla \times \mathbf{M}_\psi$
- Esto genera las soluciones $\mathbf{E} = \mathbf{M}_{\psi_1} + i\mathbf{N}_{\psi_2}$ y $\mathbf{H} = m(-\mathbf{M}_{\psi_2} + i\mathbf{N}_{\psi_1})$

(ii) Solución general de la ecuación escalar:

- Buscamos soluciones de la forma: $\psi(r, \theta, \phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$
- Obtenemos ecuaciones diferenciales *separadas* para $R(r)$, $\Theta(\theta)$ y $\Phi(\phi)$.
- La solución general de cada una de estas ecuaciones se expresa como una superposición de un *conjunto completo* de funciones solución.
- Combinando los resultados se llega a

$$r\psi(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=-n}^n P_n^l(\cos \theta) [c_n \psi_n(kmr) + d_n \chi_n(kmr)] (a_l \cos l\phi + b_l \sin l\phi)$$

donde P_n^l es un polinomio asociado de Legendre, ψ_n y χ_n se expresan a partir de las funciones de Bessel $J_{n+\frac{1}{2}}$ y de Neumann $N_{n+\frac{1}{2}}$ respectivamente, y a_l, b_l, c_n y d_n son constantes arbitrarias.

2) Representamos la onda plana monocromática incidente como una superposición de ondas esféricas (por 'conveniencia').

3) Aplicamos las condiciones de frontera ($r = 0, r = a, r \rightarrow \infty$) para determinar las constantes de la solución general y fijar la solución particular.

Dispersión de Mie: Solución de campo lejano

- Aprovechamos el comportamiento asintótico de las funciones usadas en la solución general.
- Definimos las funciones:

$$S_1(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} [a_n \pi_n(\cos \theta) + b_n \tau_n(\cos \theta)]$$
$$S_2(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} [b_n \pi_n(\cos \theta) + a_n \tau_n(\cos \theta)]$$

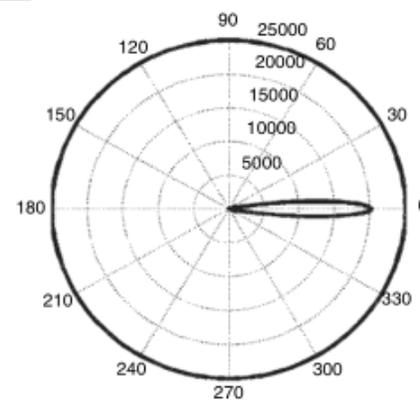
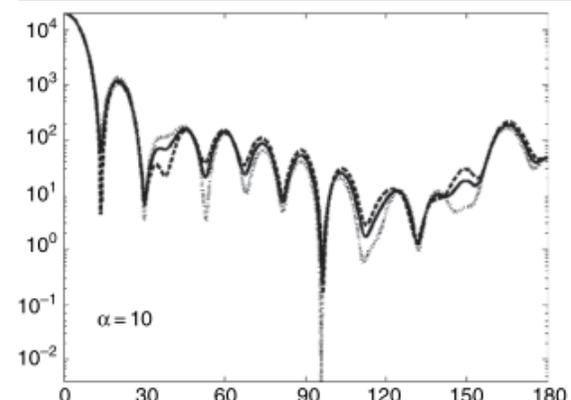
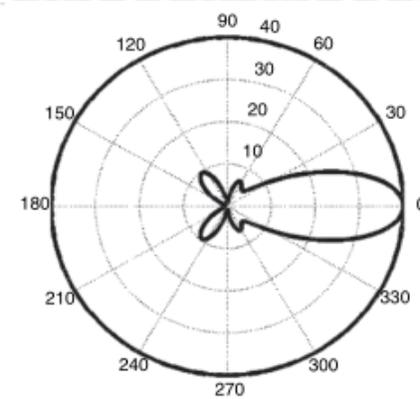
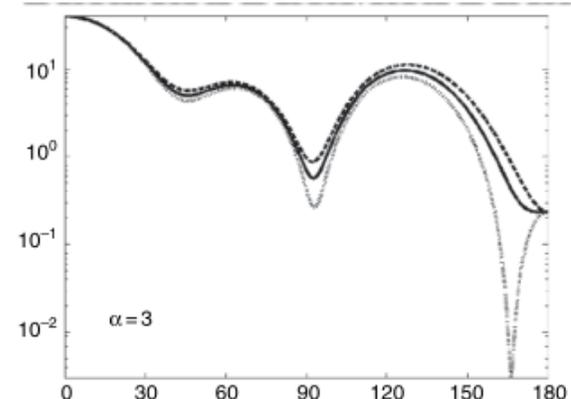
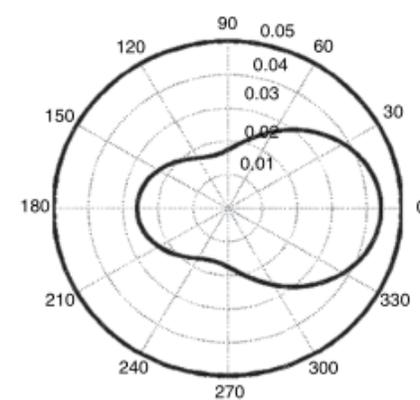
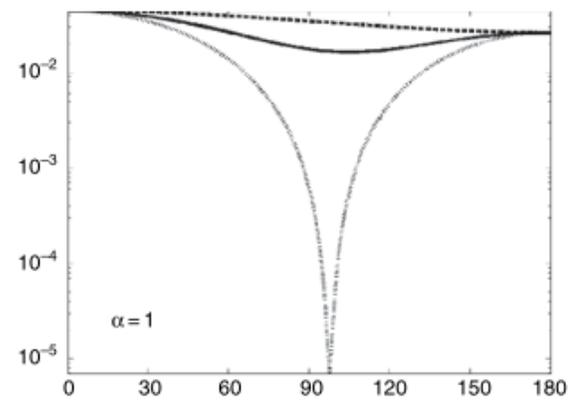
donde

$$\pi_n(\cos \theta) = \frac{1}{\sin \theta} P_n^1(\cos \theta)$$
$$\tau_n(\cos \theta) = \frac{d}{d\theta} P_n^1(\cos \theta)$$

Finalmente obtenemos las componentes del campo eléctrico a través de

$$\begin{bmatrix} E_l^s \\ E_r^s \end{bmatrix} = \frac{e^{-ikr+ikz}}{ikr} \begin{bmatrix} S_2(\theta) & 0 \\ 0 & S_1(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_l^i \\ E_r^i \end{bmatrix}$$

Función de fase de la dispersión de Mie,
para diferentes parámetros de tamaño



Scattering angle (degrees)

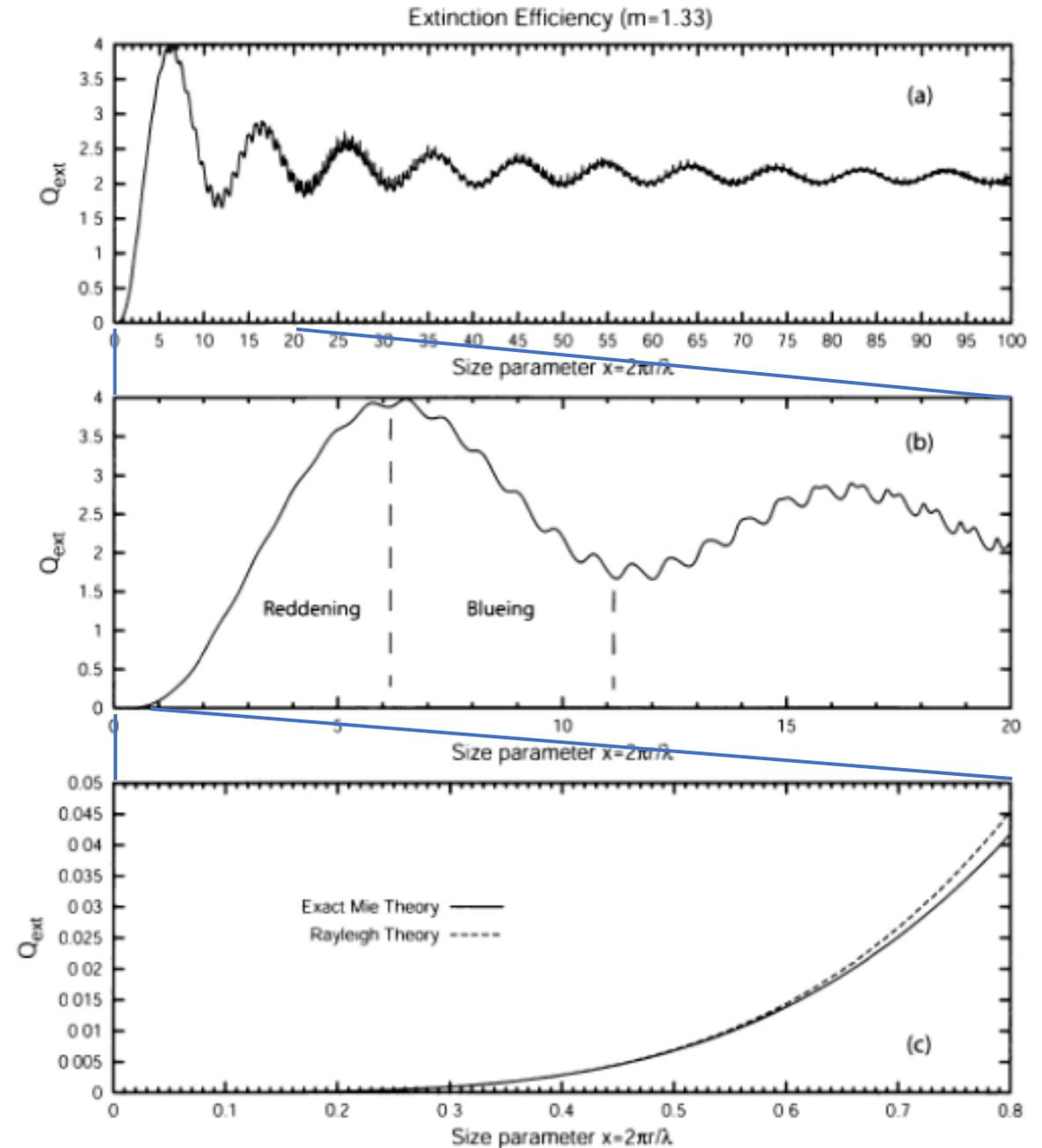
Si el flujo incidente es F_0 y el flujo total dispersado es f , entonces la **sección eficaz de dispersión** es

$$\sigma_s := \frac{f}{F_0}$$

La **eficiencia de dispersión** de una esfera de radio a es

$$Q_s := \frac{\sigma_s}{\pi a^2}$$

Análogamente para la eficiencia de absorción y la eficiencia de extinción.



PARA PENSAR...

¿Qué ocurre con la dispersión múltiple?

¿En qué casos se podría despreciar el efecto?

¿Y si no?!