MODELADO DE SISTEMAS MECÁNICOS EMPLEANDO EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

Henry Figueredo Losada

Universidad de la República-Uruguay
IIMPI-FING

henryf@fing.edu.uy

9 de octubre de 2020

Sumario

CLASE 6. CONCEPTOS PARA DEFINIR LA MATRIZ DE RIGIDEZ GENERAL DE ELEMENTOS FINITOS.

1. Introducción.
2. Definición de las Funciones de Forma.
3. Funciones de forma mediante el polinomio interpolador en la forma de Lagrange.
4. Funciones de forma para elementos bidimensionales mediante el polinomio de Lagrange.
5. Funciones de forma para el elemento rectangular de 9 nodos.
6. Derivación de la matriz de rigidez mediante sus funciones de forma para el elemento de tipo viga.
7. Determinación de las tensiones en el elemento a partir de los desplazamientos nodales.
8. Derivación de la matriz de rigidez del elemento utilizando la relación entre fuerzas y desplazamientos nodales para el elemento.

TEMA III. FORMULACIÓN DE ELEMENTOS FINITOS 2D-ESTÁTICOS.

CLASE 6. CONCEPTOS PARA DEFINIR LA MATRIZ DE RIGIDEZ GENERAL DE ELEMENTOS FINITOS.

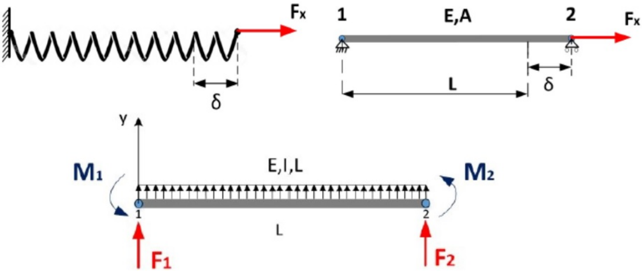
1. Introducción.
2. Definición de las Funciones de Forma.
3. Formulación de la función de forma para un elemento de tipo viga.
4. Normalización del espacio.
5. Funciones de forma mediante el polinomio interpolador en la forma de Lagrange.
6. Derivación de la matriz de rigidez mediante sus funciones de forma para el elemento de tipo viga.

Clase No.6

1. Introducción.

En las aulas anteriores comenzamos el estudio de varios elementos finitos que harán parte de la biblioteca que estamos construyendo en este curso.

Estos elementos más simples (resortes, barras y vigas) permiten la aplicación del método directo para la determinación de la matriz de rigidez, permitiendo establecer relaciones directas entre fuerzas nodales aplicadas en el elemento y sus correspondientes desplazamientos nodales.



1. Continuación

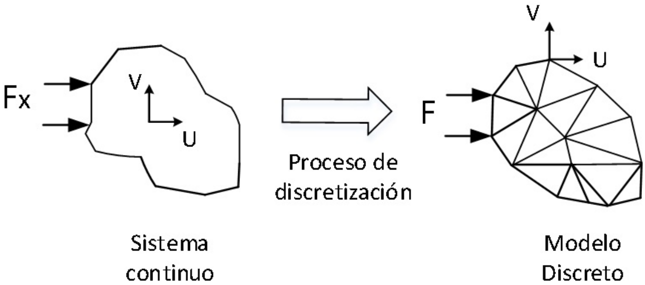
Recordando ahora el **concepto fundamental del MEF** para resolver ecuaciones diferenciales y transformar un problema continuo en un conjunto de ecuaciones discretas, dividiendo el dominio original en subdominios (elementos finitos) en las que las ecuaciones de gobierno se mantienen y son trasladadas a cada subregión, a los nodos de la discretización, pasando de ser un problema continuo a ser un problema discreto y nodal.

Para poder realizar este proceso se utilizan algunos conceptos matemáticos y físicos que en conjunto permitirán establecer un procedimiento general para determinar la función aproximada a la función solución del problema.

Dado que el empleo de **funciones de aproximación** a la función incógnitas es clave para la **formulación del MEF**, en esta clase se estudian en detalles.

2. Definición de las Funciones de Forma.

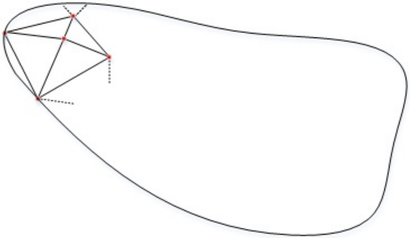
Empleando las funciones de aproximación como una condición necesaria dentro del problema discreto y nodal (fig), podemos señalar que la solución numérica de una ecuación diferencial en un dominio continuo se aproxima mejor a la solución analítica cuando me mejor se aproxime la función de aproximación seleccionada a la función solución del problema. Estas funciones de aproximación son conocidas como funciones de "forma".



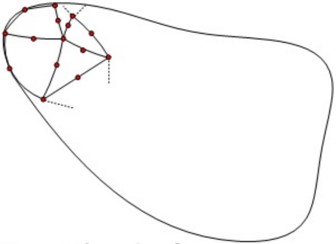
Clase No 6

2. Continuación.

Las funciones de forma se utilizan tanto para la discretizar el espacio (dominio), como para la aproximación de la función incógnita dentro del subdominio (elemento finito)



Función de forma Lineal



Función de forma cuadrática

2.1 Aproximación de una función.

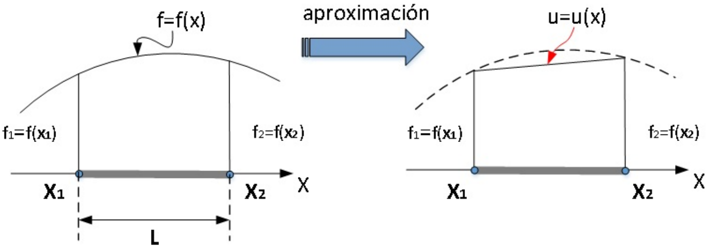
Las funciones de forma desempeñan un papel esencial en el MEF ya que permiten en gran medida la exactitud con que se adaptan a las configuraciones del dominio antes y después para las previsiones de los valores de grandeza física en todo el intervalo en estudio (aproximar los valores de la función en todo el subdominio una vez conocidos los valores nodales).

Para aproximar una función se pueden utilizar varios tipos de funciones tales como trigonométricas y polinómicas son una de las más usadas.

En el MEF son empleadas para las funciones de forma los **polinomios de Lagrange**.

2.1 Continuación.

Supongamos una función genérica f=f(x), tal como se muestra en la figura.



Esta puede aproximarse en el intervalo (x1, x2) mediante una función de interpolación lineal que define la recta que pasa por p1 y p2

$$f(x) \approx u(x) = \frac{x_2 - x}{l} f_1 + \frac{x - x_1}{l} f_2 = N_1(x) f_1 + N_2(x) f_2 \qquad (1)$$

Sendo N_1, N_2 denominadas funciones de forma

2.1 Continuación.

Las *funciones de forma* están vinculadas a cada nodo del elemento y deben cumplir varias condiciones (ver bibliografía G.R.Liu):

Propiedad 1: Ser linealmente independientes (esta propiedad es la base para las funciones tengan la función delta asociada);

Propiedad 2: El valor de la función de forma asociado a un *nodo i* es uno en ese nodo y cero en los demás. (función delta)

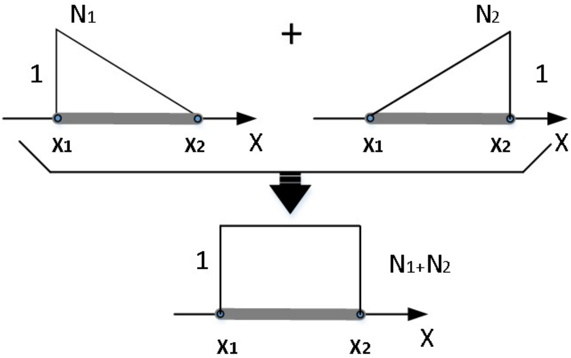
$$N_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{i=j} \ , \ \ j = 1, 2, ..., n_d \\ 0 & \text{i}\neq\text{j} \ , \ \ j = 1, 2, ..., n_d \end{cases} \qquad (2)$$

Donde δ_{ij} es la función delta de Kronecker.

Propiedad 3: La suma de las funciones de forma para un elemento es igual a 1 en todo el dominio (Partición de la propiedad de la unidad)

2.1 Continuación.

$$Propiedad\ 3: \sum_{i=1}^{n} N_i(x) = \tag{3}$$

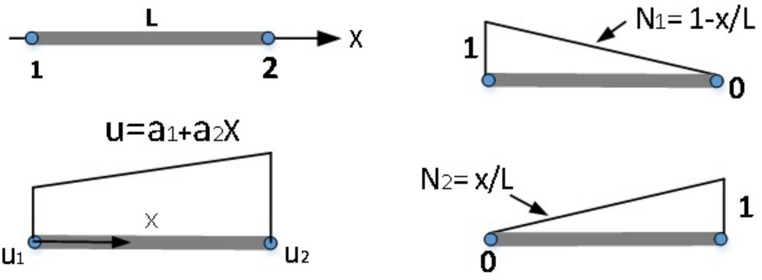


Condiciones que cumplen las funciones de forma. Caso lineal.

2.2 Funciones de forma de Elementos Unidimensionales.

Elemento Lineal

Para el elemento lineal de tipo barra con 2 nodos y DOF= 2 grados de libertad, la función de aproximación es un polinomio lineal de grado (DOF-1) =1. En general el número de coeficientes $\underline{a}$ es equivalente al total del número de los grados de libertad (DOF) asociados con el elemento.



2.2 Continuación.

Consideremos un simple elemento de tipo barra con 2 nodos y 2 grados de libertad, usando un polinomio lineal para la función de desplazamientos:

$$u(x) = C_0 + C_1 x \tag{4}$$

Para propósitos de una representación computacional, representamos en forma matricial:

$$u(x) = \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \end{bmatrix} = \mathbf{p(x)C} \tag{5}$$

Sustituyendo los valores de desplazamientos nodales en la función de interpolación para x=(x1 y x2)

$$\begin{cases} u(x_1) \equiv u_1 = C_0 + C_1 x_1 \\ u(x_2) \equiv u_2 = C_0 + C_2 x_2 \end{cases} \rightarrow \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_0 \\ C_1 \end{Bmatrix} \tag{6}$$

2.2 Continuación.

Despejando los coeficientes C_i en la Ec. (6).

$$\begin{Bmatrix} C_0 \\ C_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \tag{7}$$

Sustituyendo en la Ec(5) la Ec(7)

$$u(x) = \begin{Bmatrix} 1 & x \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \tag{8}$$

Agrupando como:

$$N(x) = \begin{Bmatrix} 1 & x \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{bmatrix}^{-1} = \mathbf{p(x)} \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{bmatrix}^{-1} \tag{9}$$

La matriz fila $\mathbf{N(x)} = [N_{\mathbf{1}}(x) \; N_{\mathbf{2}}(x)]$ es llamada de matriz de las funciones de forma.

2.2 Continuación.

Como hemos venido comentando la función de forma juega un papel central en el FEM; Las funciones de formas de varios órdenes y dimensiones permiten al FEM resolver problemas de muchos tipos con diferentes grados de precisión.

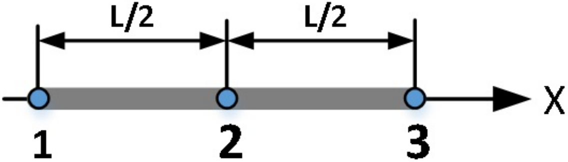
$$\mathbf{N}(\mathbf{x}) = \left[\tfrac{x}{x_1 - x_2} - \tfrac{x_2}{x_1 - x_2} \quad \tfrac{x}{x_2 - x_1} - \tfrac{x_2}{x_1 - x_2}\right] = \frac{1}{l}\left[x_2 - x \quad x - x_1\right] \tag{10}$$

En la Ec. (10) tenemos $N_{\mathbf{1}}(x)$ y $N_{\mathbf{2}}(x)$ las funciones de forma correspondiente a los nodos 1 y 2, respectivamente.

$$u(x) = \sum N_i u_i \tag{11}$$

2.2 Continuación.

Propone se realizar siguiendo la metodología propuesta obtener las funciones de forma para un elemento lineal de tipo barra con 3 nodos y DOF=3 grados de libertad, con una función de aproximación de un polinomio de grado 2.



Elemento unidimensional cuadrático. El nodo 2 es un nodo interior

2.3 Formulación de la función de forma para un elemento de tipo viga.

Reviendo la clase de la "formulación de elementos finitos tipo viga" vamos a obtener las funciones de forma como una condición necesaria para derivar la matriz de rigidez de elementos en general.

1. Primer paso. Escoger la función de interpolación adecuada para el elemento a formular.

Especificar la función de forma que defina la forma única el estado de desplazamientos en todos los puntos dentro del elemento, en función de los grados de libertad de los nodos. A función de interpolación debe tratar de representar el elemento deformado o lo más próximo posible de su comportamiento real.

La función polinomial debe tener un coeficiente desconocido por cada grado de libertad:

$$< Elemento\ DOF = 4 > \rightarrow < Polinomio\ de\ 4\ coeficientes\ >$$

2.3 Continuación

La función polinomial seleccionada:

$$< Polinomio\ cúbico >\therefore v(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 \qquad (12)$$

Como expresa la Ec. (12) para cada posición de la viga dada por x, podemos calcular los desplazamientos **v(x)**, considerando solamente los desplazamientos en la dirección y considerando apenas la flexión de la viga en un plano.
Representando la Ec. (12) en notación matricial como:

$$v(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} = \mathbf{p(x)C} \qquad (13)$$

La inclinación de la viga punto a punto en la condición deformada es expresada por la primera derivada de los desplazamientos:

$$v(x)' = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 = \mathbf{p(x)'C'} \qquad (14)$$

2.3 Continuación

Representando la Ec(14) y Ec(15) en notación matricial:

$$\{\delta(x)\} = \begin{Bmatrix} v(x) \\ v(x)' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{p(x)} \\ \mathbf{p(x)}' \end{Bmatrix} [\mathbf{C}] \tag{15}$$

Con la Ec(15) las funciones de interpolación para el elemento finito tipo viga están formuladas, faltaría apenas determinar los coeficientes en función de los valores conocidos de los desplazamientos nodales.

Clase No 6

2.3 Continuación

2. Segundo paso Calcular los coeficientes de las funciones de interpolación utilizando las relaciones de desplazamientos.

Sustituir los valores de desplazamiento conocidos en las funciones de interpolación definidas Ec. (15).

$$< Nodo\,1 > \rightarrow (x=0) \rightarrow \begin{cases} v(x) = v(0) = v_1 = c_0 \\ v(x)' = v(0)' = v_1' = c_1 \end{cases}$$

$$< Nodo\ 2 > \rightarrow (x=L) \rightarrow \begin{cases} v(x) = v(L) = v_2 = c_0 + c_1 L + c_2 L^2 + c_3 L^3 \\ v(x)' = v(L)' = {v_2}' = c_1 + 2c_2 L + 3c_3 L^2 \end{cases}$$

Observar que las ecuaciones anteriores nos definen **4 ecuaciones con 4 incógnitas** consiguiendo determinar los coeficientes desconocidos.

$$\delta\,(x) = \begin{Bmatrix} v_1 \\ {v_1}' \\ v_2 \\ {v_2}' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} \tag{16}$$

2.3 Continuación

Despejando los coeficientes c_i en la Ec. (16)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix}^{-1} \{\delta\} = \begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} \tag{17}$$

Sustituyendo en la Ec. (13) la Ec. (16) con p(x) representando la matriz que contiene las variables.

$$v(x) = \mathbf{p(x)C} = \mathbf{p(x)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix}^{-1} \{\delta\} \tag{18}$$

En la Ec.(18) sustituimos

$$\mathbf{N(x)} = \ \mathbf{p}(x)\,[A]^{-\mathbf{1}} \tag{19}$$

2.3 Continuación

Reescribiendo la Ec (19)

$$v(x) = [\mathbf{N}(\mathbf{x})]\,\{\delta\} \tag{20}$$

Siendo
v(x): representa los desplazamientos dentro del elemento;
$[\mathbf{N}(\mathbf{x})]$: matriz de forma;
$\{\delta\}$: desplazamientos nodales conocidos.

La matriz $[\mathbf{N}(\mathbf{x})]$ permite pasar de los desplazamientos nodales para los desplazamientos dentro del elemento, definiendo la forma por la cual se establece la interpolación del campo de desplazamiento.

Todos los elementos finitos disponibles en cualquier programa traen consigo la función de forma que se propone para representar el comportamiento físico del elemento.

2.3 Continuación

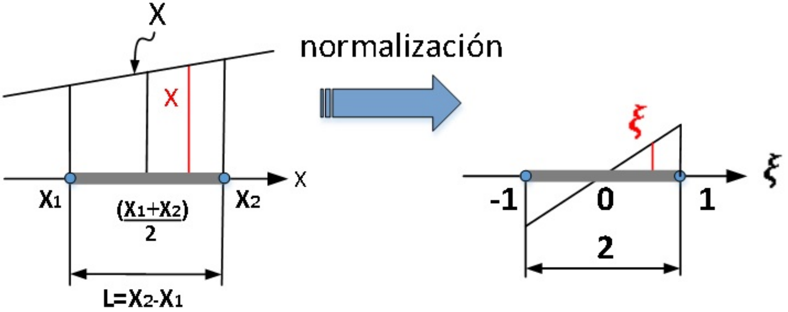
Sustituyendo en la Ec (19)

$$[N(x)] = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix}^{-1} \tag{21}$$

$$[N(x)] = \begin{bmatrix} \frac{2x^3}{l^3} - \frac{3x^2}{l^2} + \mathbf{1} & \frac{x^3}{l^2} - \frac{2x^2}{l} + x & \frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3} & \frac{x^3}{l^2} - \frac{x^2}{l} \end{bmatrix} \tag{22}$$

4. Normalización del espacio.

Para el empleo posterior de la función de forma dentro del MEF, es de gran interés práctico que el intervalo en el que se aproximan las funciones de formas este normalizado, **el objetivo de esta normalización** es permitir que la integración numérica en el dominio del elemento pueda obtenerse fácilmente incluso cuando las funciones a integrar son complicadas.



4. Continuación.

Con la geometría normalizada siempre se emplean los mismos puntos de integración y los mismos pesos. El intervalo más usado para el espacio normalizado es de [-1,1], que será utilizado como referencia.

La introducción de la variable normalizada ξ en las funciones de forma tórnalas independientes de la geometría real del elemento , lo que es de grande interés practico conforme podrán constatar en próximas secciones.

En la figura anterior, se muestra un segmento de recta en el intervalo $[x_1, x_2]$ y uno normalizado en el intervalo $[-1, 1]$ .Aplicando semejanza se tiene:

$$\frac{\xi - (-1)}{x - x_1} = \frac{2}{x_2 - x_1} \tag{23}$$

4. Continuación.

Agrupando e despejando la función normalizada x(ξ)*como* :

$$x(\xi) = \frac{x_1(1-\xi)}{2} + \frac{x_2(1+\xi)}{2} = N_1(\xi)x_1 + N_2(\xi)x_2 \qquad (24)$$

La Ec. (24) expresa las funciones de forma son ahora función de la coordenada natural ξ.

5. Funciones de forma mediante el polinomio interpolador en la forma de Lagrange

Para obtener las funciones de formas de **n** puntos se utiliza el **Polinomio de Lagrange de grado n**:

$$L(x) = \sum_{j=0}^{k} y_j l_j(x) \tag{25}$$

Donde

$$l_j(x) = \prod_{i=0,\quad i\neq j}^{k} \frac{x - x_i}{x_j - x_i} = \frac{x - x_0}{x_j - x_0} \cdots \frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} \frac{x - x_{j+1}}{x_j - x_{j+1}} \cdots \frac{x - x_k}{x_j - x_k}$$

5. Continuación

Reescribiendo la Ec. (5.32) en coordenadas naturales para una función de forma del tipo polinomio de Lagrange (n-1) como:

$$N_i^{(n-1)}(\xi) = \prod_{j=1 (j \neq i)}^{n} \left(\frac{\xi - \xi_j}{\xi_i - \xi_j} \right) \tag{26}$$

Para un mismo problema se pueden manejar funciones de formas diferentes para la geometría y para la función incógnita, lo más común es utilizar las mismas, en el caso de utilizar las mismas funciones los elementos de discretización se denominan Elementos Isoparamétricos.

A continuación, expondremos las funciones de formas para diferentes elementos en coordenadas naturales más empleadas desde una perspectiva más práctica.

5. Continuación

Retomando la Ecuación (10) obtenida para un elemento lineal con 2 nodos y DOF=2, se tiene n=2 , y por tanto la función de aproximación es un polinomio de grado (n-1). Utilizando el polinomio de Lagrange Ec. (26) se obtiene como:

Para $i = 1$; $i \neq j$: $\quad {N_1}^{(1)}(\xi) = \left(\frac{\xi - \xi_2}{\xi_1 - \xi_2}\right) = \frac{1}{2}(1 - \xi)$

Para $i = 2$; $i \neq j$: $\quad {N_2}^{(1)}(\xi) = \left(\frac{\xi - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1}\right) = \frac{1}{2}(1 + \xi)$

Podemos conferir que los resultados obtenidos anteriores son las mismas funciones obtenidas en la Ec. (24).

5. Continuación

Se puede verificar que las funciones de forma obtenidas también satisfacen las propiedades exigidas para las funciones de forma.

$$Propiedad\,1: \begin{cases} N_1^{(1)}(\xi=-1)=1; \quad N_1^{(1)}(\xi=1)=0; \\ \\ N_2^{(1)}(\xi=-1)=0; \quad N_2^{(1)}(\xi=1)=1; \end{cases}$$

$$Propiedad\ 2: \mathrm{N}_1^{(1)}(\xi)+N_1^{(1)}(\xi)=\tfrac{1}{2}(1-\xi)+\tfrac{1}{2}(1+\xi)=1$$

5.1 Funciones de forma para el elemento cuadrático.

También se pueden determinar las funciones de forma para el elemento unidimensional cuadrático, En este caso el polinomio Lagrange cuadrático (n-1=2) como:

$$N_i{}^{(2)}(\xi) = \left(\frac{\xi - \xi_1}{\xi_i - \xi_1} \bullet \frac{\xi - \xi_2}{\xi_i - \xi_2} \bullet \frac{\xi - \xi_3}{\xi_i - \xi_3} \right) \;\; ; \;\; i = 1, 2, 3. \tag{27}$$

Evaluando para i=1,2,3 ;

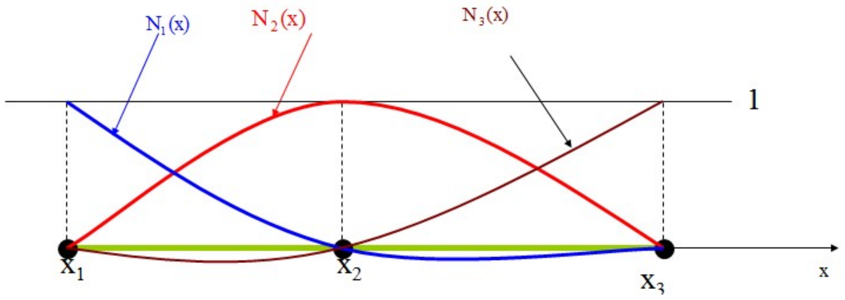
$$N_1{}^{(2)}(\xi) = \left(\frac{\xi - \xi_2}{\xi_1 - \xi_2} \bullet \frac{\xi - \xi_3}{\xi_1 - \xi_3} \right) = \frac{(\xi - 0)(\xi - 1)}{[(-1) - 0][(-1) - 1]} = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1)$$

$$N_2{}^{(2)}(\xi) = \left(\frac{\xi - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1} \bullet \frac{\xi - \xi_3}{\xi_2 - \xi_3} \right) = \frac{[\xi - (-1)](\xi - 1)}{[0 - (-1)][0 - 1]} = (1 - \xi)(1 + \xi) = (1 - \xi^2)$$

$$N_3{}^{(2)}(\xi) = \left(\frac{\xi - \xi_1}{\xi_3 - \xi_1} \bullet \frac{\xi - \xi_2}{\xi_3 - \xi_2} \right) = \frac{[\xi - (-1)](\xi - 0)}{[1 - (-1)][1 - 0]} = \frac{1}{2}\xi(\xi + 1)$$

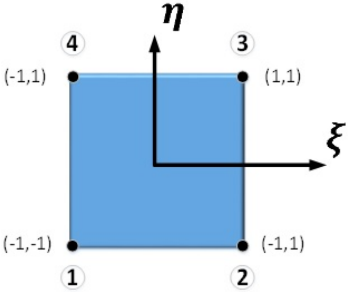
5.1 Continuación.

Se puede verificar que las funciones de forma obtenidas anteriormente satisfacen las propiedades exigidas para funciones de forma, que su valor es 1 en el nodo correspondiente, 0 en los demás y además su suma es 1 en toda la longitud del elemento.



5.2 Funciones de forma para elementos bidimensionales mediante el polinomio de Lagrange.

Las funciones de formas para el elemento rectangular bidimensional se pueden obtener mediante el producto de las funciones de formas unidimensionales asociadas a cada una de las direcciones ξ y η



Dado que utilizaremos polinomios de Lagrange para obtenerlas, los elementos se denominan Elementos Lagrangeanos.

5.2 Continuación.

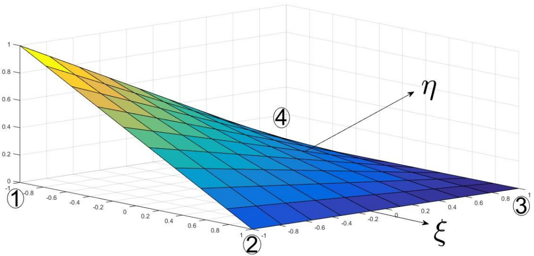
Si se emplean funciones de forma lineal en cada dirección, se obtienen las funciones de formas del elemento rectangular lineal. El elemento de la figura necesita de 4 puntos para estar definido.

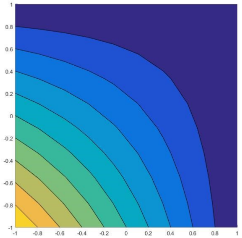
Para el nodo 1, la función de forma se obtiene a partir de la función de forma unidimensional según la dirección ξ formada por el polinomio de Lagrange con los nodos 1 y 2 y multiplicada por la función de forma según la dirección η , formada por el polinomio de Lagrange que pasa entre los nodos 1 y 4.

$$N_1(\xi, \eta) = {N_1}^{(1)}(\xi)\, {N_1}^{(1)}(\eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)$$

5.2 Continuación.

Función de forma $N_1(\xi, \eta)$ del elemento rectangular de 4 nodos.





Clase No 6

5.2 Continuación.

Detallando lo anterior:

$$N_1{}^{(1)}(\xi) = \left(\frac{\xi-\xi_2}{\xi_1-\xi_2}\right) = \frac{1}{2}(1-\xi)$$

$$N_1{}^{(1)}(\eta) = \left(\frac{\eta-\eta_2}{\eta_1-\eta_2}\right) = \frac{1}{2}(1-\eta)$$

Para el Nodo 2:

$$N_2(\xi,\eta) = N_2{}^{(1)}(\xi)\, N_2{}^{(1)}(\eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$$

Nodo 3:

$$N_3(\xi,\eta) = N_2{}^{(1)}(\xi)\, N_2{}^{(1)}(\eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$$

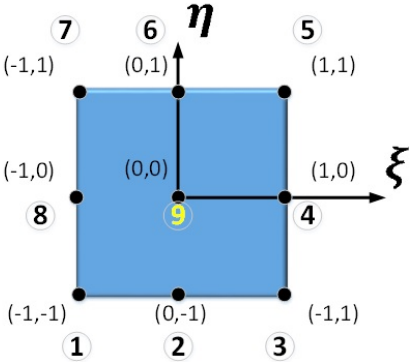
Nodo 4:

$$N_4(\xi,\eta) = N_4{}^{(1)}(\xi)\, N_4{}^{(1)}(\eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$$

Se cumplen las propiedades **FF** la suma vale 1 en su nodo asociado y cero en los demás, y su suma en todo el dominio del elemento vale 1.

5.3 Continuación.

El elemento bidimensional de 9 nodos tiene 3 nodos en cada dirección, Para la obtención de las funciones de formar se utiliza el polinomio de Lagrange de grado 2 según las direcciones ξ y η.



5.3 Continuación.

Para la función de forma del **nodo 1** según la dirección ξ formada por los nodos 1,2 y 3, y multiplicada por la función de forma según la dirección η, formada por los nodos 1, 8 y 7,

$$N_1{}^{(2)}(\xi) = \left(\frac{\xi-\xi_2}{\xi_1-\xi_2}\right) \bullet \left(\frac{\xi-\xi_3}{\xi_1-\xi_3}\right) = \frac{1}{2}\xi(\xi-1)$$

$$N_1{}^{(2)}(\eta) = \left(\frac{\eta-\eta_8}{\eta_1-\eta_8}\right) \bullet \left(\frac{\eta-\eta_7}{\eta_1-\eta_7}\right) = \frac{1}{2}\eta(\eta-1)$$

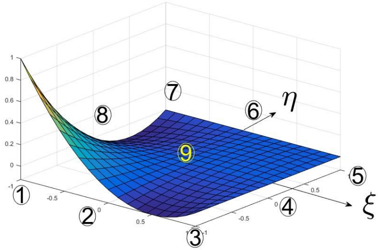
Evaluando para la función $N_1(\xi,\eta)$:

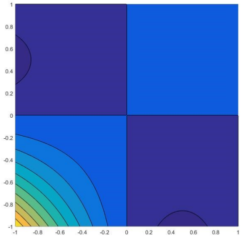
$$N_1(\xi,\eta) = N_1{}^{(2)}(\xi)\, N_1{}^{(2)}(\eta) = \frac{1}{4}\xi\eta\,(\xi-1)\,(\eta-1)$$

Clase No 6

5.3 Continuación.

Función de forma $N_1(\xi, \eta)$ del elemento bidimensional de 9 nodos.





5.3 Continuación.

Siguiendo el método anterior, se pueden obtener todas las funciones de forma como:

$$N_1(\xi,\eta) = {N_1}^{(2)}(\xi)\,{N_1}^{(2)}(\eta) = \tfrac{1}{4}\xi\eta\,(\xi-1)\,(\eta-1)$$
$$N_2(\xi,\eta) = {N_2}^{(2)}(\xi)\,{N_2}^{(2)}(\eta) = \tfrac{1}{2}\eta\left(1-\xi^2\right)(\eta-1)$$
$$N_3(\xi,\eta) = {N_3}^{(2)}(\xi)\,{N_3}^{(2)}(\eta) = \tfrac{1}{4}\xi\eta\,(1+\xi)\,(\eta-1)$$
$$N_4(\xi,\eta) = {N_4}^{(2)}(\xi)\,{N_4}^{(2)}(\eta) = \tfrac{1}{2}\xi\,(1+\xi)\,(1-\eta^2)$$
$$N_5(\xi,\eta) = {N_5}^{(2)}(\xi)\,{N_5}^{(2)}(\eta) = \tfrac{1}{4}\xi\eta\,(1+\xi)\,(1+\eta)$$
$$N_6(\xi,\eta) = {N_6}^{(2)}(\xi)\,{N_6}^{(2)}(\eta) = \tfrac{1}{2}\eta\left(1+\xi^2\right)(1+\eta)$$
$$N_7(\xi,\eta) = {N_7}^{(2)}(\xi)\,{N_7}^{(2)}(\eta) = \tfrac{1}{4}\xi\eta\,(\xi-1)\,(1+\eta)$$
$$N_8(\xi,\eta) = {N_8}^{(2)}(\xi)\,{N_8}^{(2)}(\eta) = \tfrac{1}{2}\xi\,(\xi-1)\,(1-\eta^2)$$
$$N_9(\xi,\eta) = {N_9}^{(2)}(\xi)\,{N_9}^{(2)}(\eta) = \left(1+\xi^2\right)(1-\eta^2)$$

6. Derivación de la matriz de rigidez mediante sus funciones de forma para el elemento de tipo viga.

Anteriormente obtuvimos la ecuación:

$$v(x) = [N(x)]\{\delta\}$$

y las funciones de forma para un elemento de tipo viga, vamos hacer uso de estas funciones de forma para calcular as deformaciones internas a partir de los desplazamientos nodales.

$$Curvatura = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} = \frac{d^2y}{dx^2} = v''(x)$$

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho} = \frac{M}{EI} \cdot y = y \cdot v''(x)$$

6. Continuación

Derivando la expresión :

$$v(x)' = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 = p(x)'C'$$

$$Para\ v(x)'' = 2c_2 + 6c_3x \tag{28}$$

Representado la Ec. (28) en notación matricial como:

$$v(x)'' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 6x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} = \mathbf{p(x)C} \tag{29}$$

tenemos $\mathbf{C} = [\mathbf{A}]^{-\mathbf{1}} \{\delta\}$

$$v(x)'' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 6x \end{bmatrix} [\mathbf{A}]^{-\mathbf{1}} \{\delta\} \tag{30}$$

6. Continuación

En la Ec (30) sustituimos $\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}(\mathbf{x})\,[\mathbf{A}]^{-1}$, reescribiendo

$$v(x)'' = [\mathbf{B}(\mathbf{x})]\,\{\delta\} \tag{31}$$

$v(x)''$: representa las deformaciones dentro del elemento;
$[\mathbf{B}(\mathbf{x})]$: Matriz que permite relacionar los campos de desplazamientos nodales con los campos de deformaciones dentro del elemento y es chamado de Matriz Desplazamiento-Deformación;
$\{\delta\}$: desplazamientos nodales conocidos.

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}(\mathbf{x})\,[\mathbf{A}]^{-1} = \left[\left(\frac{\mathbf{12}x}{l^3} - \frac{\mathbf{6}}{l^2}\right) \quad \left(\frac{\mathbf{6}x}{l^2} - \frac{\mathbf{4}}{l}\right) \quad \left(\frac{\mathbf{6}}{l^2} - \frac{\mathbf{12}x}{l^3}\right) \quad \left(\frac{\mathbf{6}x}{l^2} - \frac{\mathbf{2}}{l}\right)\right]$$

6. Continuación

La Matriz Desplazamiento-Deformación de un elemento finito constituye otro de los conceptos importantes teóricos para la formulación de su matriz de rigidez. En las bibliotecas de elementos de los programas para análisis del MEF están disponibles la Matriz Desplazamiento-Deformación que se propone para representar comportamiento físico del elemento, o sea, el modelo matemático para el **cálculo de las deformaciones en el dominio del elemento.**

La Matriz Desplazamiento-Deformación estará presente en la expresión general de la formulación de la Matriz de Rigidez de cualquier elemento finito.

6.1 Determinación de las tensiones en el elemento a partir de los desplazamientos nodales.

El momento flector para el elemento viga puede ser calculado a partir de los desplazamientos nodales :

$$M(x) = EI \cdot v(x)'' = EI \cdot [\mathbf{B}(x)] \{\delta\} \tag{32}$$

La Ec. (32) permite calcular las fuerzas internas dentro del elemento a partir de los desplazamientos nodales, y la tensión a lo largo de una sección transversal localizada en una posición x como:

$$\sigma = \frac{M(x)}{I} \cdot y \tag{33}$$

6.2 Derivación de la matriz de rigidez del elemento utilizando la relación entre fuerzas y desplazamientos nodales para el elemento.

Los pasos anteriores se pueden generalizar para determinar los desplazamientos, deformaciones, fuerzas internar y las tensiones dentro del elemento. Para ello, es necesario conocer los desplazamientos nodales que son determinados a partir de la matriz de rigidez de la estructura y la carga.

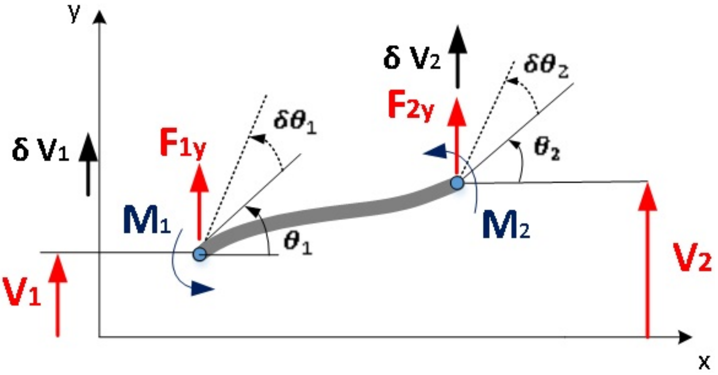
En los elementos finitos más simples (clases anteriores) utilizamos el método de rigidez directa y el conocimiento de la teoría de resistencia de materiales, Sin embargo, para otros tipos de elementos finitos más complejos este procedimiento seria impracticable.

Para la derivación de la matriz de rigidez utilizaremos los conceptos de trabajo y energía de deformación.

Clase No 6

6.2 Continuación.

Elemento de tipo viga para una condición de equilibrio y se considera los desplazamientos virtuales que se obtienen al incremental en forma positiva el ángulo θ y desplazamiento v.



6.2 Continuación.

El **PTV** será utilizado para establecer las condiciones de equivalencia entre las fuerzas internas actuantes en el elemento y las fuerzas nodales estáticamente equivalentes

$$W_e = W_i \tag{34}$$

El trabajo virtual externo W_e puede ser representado según la figura como:

$$W_e = F_{1y} \cdot \delta V_1 + M_1 \cdot \delta\theta_1 + F_{2y} \cdot \delta V_2 + M_2 \cdot \delta\theta_2 \tag{35}$$

Reescribiendo en forma matricial como:

$$W_e = \begin{bmatrix} \delta V_1 & \delta\theta_1 & \delta V_2 & \delta\theta_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{1y} \\ M_1 \\ F_{2y} \\ M_2 \end{Bmatrix} = \left\{\delta^v\right\}^T \cdot \{f\}$$

6.2 Continuación.

El trabajo virtual interno W_i para una longitud dx del elemento producto de un momento flector en el tramo como:

$$dW_i = M \cdot d\theta$$

El trabajo total a lo largo del elemento considerando un intervalo de x=0 hasta x=L, como:

$$W_i = \int_0^L M \cdot d\theta \tag{36}$$

Recordando que

$$\theta(x) = \frac{dv(x)}{dx} \therefore \ \frac{d\theta(x)}{dx} = \frac{d^2v(x)}{d^2x} \therefore \ d\theta(x) = v(x)'' \ \cdot dx$$

6.2 Continuación.

Reescribiendo la Ec. (36) como:

$$W_i = \int_0^L M \cdot d\theta = \int_0^L \left[v''(x)^v \right]^T \cdot M(x) \cdot dx \tag{37}$$

La **curvatura virtual** es impuesta indirectamente, será asociada a los desplazamientos nodales virtuales mediante la Matriz Desplazamiento-Deformación como:

$$\left\{ v''(x)^v \right\}^T = \left([\mathbf{B}(\mathbf{x})] \left\{ \delta^v \right\} \right)^T = \left\{ \delta^v \right\}^T \cdot [\mathbf{B}(\mathbf{x})]^T \tag{38}$$

Como M(x) está dado Ec. (32) substituimos:

$$\begin{aligned} W_i &= \int_0^L \left\{ \delta^v \right\}^T \cdot [\mathbf{B}(\mathbf{x})]^T \cdot EI \cdot v(x)'' dx \\ &= \int_0^L \left\{ \delta^v \right\}^T \cdot [\mathbf{B}(\mathbf{x})]^T \cdot EI \cdot [\mathbf{B}(\mathbf{x})] \left\{ \delta \right\} dx \end{aligned} \tag{39}$$

6.2 Continuación.

Aplicando **PTV** con la Ec. (34), como los desplazamientos virtuales impuestos son arbitrarios vamos a escoger esos desplazamientos con el valor unitario.

$$\{f\} = \left[\int_0^L [B(x)]^T \cdot EI \cdot [B(x)]\, dx\right] \cdot \{\delta\} \tag{40}$$

Donde

$\{f\}$: representa las fuerzas nodales en el elemento;

$\left[\int_0^L [\mathbf{B}(\mathbf{x})]^T \cdot EI \cdot [\mathbf{B}(\mathbf{x})] dx\right]$: Matriz de rigidez del elemento, la integración de la expresión matricial puede ser realizada después de efectuar las multiplicaciones;

$\{\delta\}$: desplazamientos nodales.

6.2 Continuación.

Sustituyendo y calculando la integral para obtener la Matriz de rigidez del elemento resulta como:

$$\left[\int_0^L [\mathbf{B}(\mathbf{x})]^T \cdot EI \cdot [\mathbf{B}(\mathbf{x})]\, dx\right] = \frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (41)$$

El resultado de la Ec. (41) es la misma matriz de rigidez que resulto del estudio del elemento de viga.

6.2 Continuación.

Propone se evaluar: Si la aplicación del método de rigidez directo aplicado a elemento de tipo viga permitió calcular la matriz de rigidez del elemento y el procedimiento aproximado por intermedio de las funciones de forma permitió obtener exactamente la misma matriz de rigidez.

¿Cuál sería la necesidad de utilizar este último procedimiento general para derivar la matriz de rigidez de cualquier elemento.?

6.2 Continuación

Ecuación General para la matriz de rigidez

Generalizar la ecuación para el cálculo de cualquier tipo de elemento finito como.

$$[\mathbf{k^e}] = \int_{vol} [\mathbf{B(x)}] \cdot [\mathbf{D}] \cdot [\mathbf{B(x)}]\, \mathbf{dVol} \tag{42}$$

✓

Donde
$[D]$: Matriz de Elasticidad, su dimensión estará definida por el número de componentes de tensión y deformación que caracterizan el estado de tensión en un punto del elemento.