Aplicaciones de Álgebra Lineal
Primer Parcial 2023
30/9/2023

Ejercicio 1 (P)

a. Sea $J_s(0)$ un bloque de Jordan con valor propio 0. Calcule las potencias $J_s(0)^m$, las imágenes de $J_s(0)^m$, y el núcleo de $J_s(0)$.

b. Demuestre que $\dim\left(\ker J_s(0) \cap \operatorname{Im} J_s(0)^m\right) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad m \leq s-1 \\ 0 & \text{si} \quad s \leq m \end{cases}$.

Ejercicio 2 (T) Enunciar y demostrar el Teorema de Cayley-Hamilton.

Ejercicio 3 Sea $A \in \mathcal{M}_7(\mathbb{C})$ tal que el polinomio minimal de A es: $\mathrm{m}_A(t) = (t-\lambda_1).(t-\lambda_2)^2.(t-\lambda_3)$, con $\lambda_i \neq \lambda_j$, si $\imath \neq j$, donde λ_2 es un valor propio con multiplicidad geométrica 4.

Describir todas las posibles formas de Jordan de A.

Ejercicio 4

a. Dar la definición de sucesión convergente de matrices: $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$, con $\lim\limits_{i\to+\infty} A_i = A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Probar que $\lim\limits_{i\to+\infty} A_i = A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ si y solo si $\lim\limits_{i\to+\infty} ||A_i - A|| = 0$.

b. Dada una sucesión convergente de matrices, $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$, con $\lim\limits_{i\to+\infty} A_i = A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, probar que existe $k \in \mathbb{R}$ y existe $i_0 \in \mathbb{N}$, tal que para todo $i \geq i_0$, $||A_i|| < k$.

c. Dadas las matrices $A,\ B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, probar que $||A.B|| \leq ||A||.||B||$.
Sugerencia: recordar y utilizar la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

d. Sean $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$, y $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$, tales que $\lim\limits_{i\to+\infty} A_i = A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ y $\lim\limits_{i\to+\infty} B_i = B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Probar que $(A_i.B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge a $A.B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Marcelo Lanzilotta