Aplicaciones del Álgebra Lineal
2^{DO} semestre - 2024

Práctico 2: Forma Canónica de Jordan.

Ref. ALA, JAP, Capítulo I, Sección I.2

Ejercicio 1 Calcule una forma de Jordan para las matrices: $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 2 Demuestre que si los bloques de Jordan $J_n(\lambda)$ y $J_n(\mu)$ son semejantes, entonces $\lambda = \mu$.

Ejercicio 3 Demuestre que $J_4(\lambda)$ no es semejante a $J_2(\lambda) \oplus J_2(\lambda)$.

Ejercicio 4 Para cada una de las matrices del primer ejercicio, A_i, $i = 1, 2$, demuestre que $\chi_{A_i}(A_i) = 0$.

Ejercicio 5 Utilice el método hecho en clase para construir una base de Jordan para las matrices:

a. $A \in \mathcal{M}_3(k)$, con: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b. $B \in \mathcal{M}_n(k)$, con: $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & & \vdots & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & & & & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & & & & & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 6 Sea $J_s(0)$ un bloque de Jordan con valor propio 0. Calcule las potencias $J_s(0)^m$, las imágenes de $J_s(0)^m$, y el núcleo de $J_s(0)$.

Ejercicio 7 Demuestre que $\dim\,(\ker J_s(0) \cap \operatorname{Im} J_s(0)^m) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad m \leq s-1 \\ 0 & \text{si} \quad s \leq m \end{cases}$.

Ejercicio 8 Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Calcule el polinomio característico $\chi_A(t)$ y verifique que $\chi_A(A) = 0$. Calcule también el polinomio minimal de A.

b. Sea $p(t) = t^6 + t^3 - 2$; demuestre que existe $r(t) \in k[t]$, de grado 2, tal que $p(A) = r(A)$, y calcule el valor de $p(A)$. Calcule A^{30}.

Ejercicio 9 Sea A una matriz cuya forma de Jordan es $J_{n_1}(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus J_{n_s}(\lambda_s)$, con $\lambda_i \neq \lambda_j$, si $i \neq j$. ¿En este caso cuál es el polinomio minimal de A?

Ejercicio 10 Pruebe que una matriz A y su transpuesta A^T, son semejantes.

Ejercicio 11 Sea $A \in \mathcal{M}_n(k)$y sean $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ los valores propios de A. Demuestre que $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$, y que $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

Ejercicio 12 Calcule la descomposición espectral de k^3 (o sea escribir a k^3 como la suma directa de subespacios propios), para la matriz $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 13 Calcule la forma de Jordan de la matriz: $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & 5 & -4 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & -1 & 6 \end{pmatrix}$

Marcelo Lanzilotta