

SOLUCIÓN – Primer Parcial

VERSIÓN 2

Matemática Discreta I

Martes 26 de setiembre de 2023

M01	M02	M03	M04	M05
E	C	B	B	A

Múltiple Opción 1

Determinar la cantidad de soluciones enteras de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ tales que $-7 \leq x_1 \leq 2$, $-7 \leq x_2 \leq 2$ y $-7 \leq x_3 \leq 2$.

(A) 24; (B) 25; (C) 26; (D) 27; (E) 28.

Solución - Múltiple Opción 1

Para cada $i \in \{1, 2, 3\}$ realizamos el cambio de variable dado por $y_i = x_i + 7$. Reemplazando en $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ tenemos que determinar la cantidad de soluciones naturales de la ecuación $y_1 + y_2 + y_3 = 21$ sujeto a que $0 \leq y_1 \leq 9$, $0 \leq y_2 \leq 9$ y $0 \leq y_3 \leq 9$. Sea \mathcal{U} el conjunto que contiene todas las soluciones naturales de la ecuación $y_1 + y_2 + y_3 = 21$. Para cada $i \in \{1, 2, 3\}$ consideramos la condición c_i sobre los elementos de \mathcal{U} dada por $c_i : y_i \geq 10$. Observemos que no hay elementos de \mathcal{U} que cumplen simultáneamente las tres condiciones, por lo que $n(c_1, c_2, c_3) = 0$. La cantidad de elementos de \mathcal{U} es $|\mathcal{U}| = CR_{21}^3 = C_{21}^{23} = 253$. Determinemos ahora la cantidad de elementos de \mathcal{U} que cumplen con la condición c_1 , es decir que $y_1 \geq 10$. Tomemos el cambio de variable $y'_1 = y_1 - 10$. Debemos determinar la cantidad de soluciones naturales de $y'_1 + y_2 + y_3 = 11$, que es $n(c_1) = CR_{11}^3 = C_{11}^{13} = 78$. Por último, determinemos la cantidad de elementos de \mathcal{U} que cumplen simultáneamente con las condiciones c_1 y c_2 . Tomemos los cambios de variable $y'_1 = y_1 - 10$ y además $y'_2 = y_2 - 10$. Reemplazando, debemos determinar la cantidad de soluciones naturales de la ecuación $y'_1 + y'_2 + y_3 = 1$, que es $n(c_1, c_2) = 3$.

Por el Principio de Inclusión-Exclusión aplicado al conjunto \mathcal{U} usando las condiciones c_1 , c_2 y c_3 , resulta que:

$$\begin{aligned}n(\overline{c_1}, \overline{c_2}, \overline{c_3}) &= |\mathcal{U}| - \binom{3}{1}n(c_1) + \binom{3}{2}n(c_1, c_2) - \binom{3}{3}n(c_1, c_2, c_3) \\ &= 253 - 3 \times 78 + 3 \times 3 - 1 \times 0 = 28.\end{aligned}$$

Por lo tanto, la opción correcta es la E.

Múltiple Opción 2

Sea n un entero positivo. Determinar la cantidad de subconjuntos de $\{1, 2, \dots, 3n\}$ tales que para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ se cumple que $|X \cap \{3i - 2, 3i - 1, 3i\}| = 1$.

(A) 3×2^n ; (B) n ; (C) 3^n ; (D) 2^{3n} ; (E) 2^n .

Solución - Múltiple Opción 2

Para cada entero $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, el conjunto X debe tener exactamente un elemento dentro del conjunto $\{3i - 2, 3i - 1, 3i\}$. Hay entonces 3 opciones para elegir exactamente un elemento de tal conjunto. Como i asume exactamente n valores posibles, por la regla del producto hay exactamente 3^n elecciones posibles de subconjuntos X que respetan las condiciones pedidas, y la opción correcta es la C.

Múltiple Opción 3

Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida por $a_0 = 0$ y $a_{n+1} = 2a_n + 2^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Hallar a_{100} . (A) 100×2^{100} ; (B) 100×2^{99} ; (C) 99×2^{100} ; (D) 99×2^{99} ; (E) 2^{100} .

Solución - Múltiple Opción 3

Vamos a obtener explícitamente en n la sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida por $a_{n+1} = 2a_n + 2^n$ y $a_0 = 0$. El polinomio característico es $x - 2$ que tiene raíz igual a 2, por lo que la solución del problema homogéneo es $a_n^H = c2^n$, donde c es cualquier constante. Como 2^n es solución del problema homogéneo, vamos a buscar una solución particular de la forma $a_n^P = \alpha n 2^n$, donde α es una constante que debemos determinar. Reemplazando en la recurrencia tenemos que:

$$a_{n+1}^P - 2a_n^P = \alpha(n+1)2^{n+1} - 2\alpha n 2^n = 2\alpha 2^n = 2^n,$$

por lo que $\alpha = 1/2$ y $a_n^P = n2^{n-1}$. La solución general se obtiene sumando la particular a la solución homogénea, y es $a_n = c2^n + n2^{n-1}$. Despejemos ahora la constante c utilizando la condición inicial: $a_0 = c = 0$. Por lo tanto, la sucesión que satisface la recurrencia $a_{n+1} - 2a_n = 2^n$ con condición inicial $a_0 = 0$ es $a_n = n2^{n-1}$. En particular, $a_{100} = 100 \times 2^{99}$. Por lo tanto, la respuesta correcta es la B.

Múltiple Opción 4

Hallar el coeficiente en xy^2z^3 del polinomio $(x + y + y^2 + z^3 - 3)^5$.

(A) 300; (B) 360; (C) 420; (D) 480; (E) 540.

Solución - Múltiple Opción 4

Hay dos maneras de obtener xy^2z^3 con las operaciones habituales, tomando la quinta potencia de $x + y + y^2 + z^3 - 3$:

- Elegir 1 vez el símbolo x , 2 veces el símbolo y , 0 vez el símbolo y^2 , 1 vez el símbolo z^3 y 1 vez el símbolo -3 .
- Elegir 1 vez el símbolo x , 0 vez el símbolo y , 1 vez el símbolo y^2 , 1 vez el símbolo z^3 y 2 veces el símbolo -3 .

Recordando que el coeficiente multinomial es la selección de multiconjuntos con repetición y tomando los coeficientes de xy^2z^3 obtenidos tras las operaciones habituales de suma y de producto, resulta que el coeficiente en xy^2z^3 es igual a $\frac{5!}{1!2!0!1!1!}(-3) + \frac{5!}{1!0!1!1!2!}(-3)^2 = 360$. Por lo tanto, la respuesta correcta es la B.

Múltiple Opción 5

Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de números naturales definida por $a_n = (n+1)\binom{6}{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Su función generatriz $a(x)$ es:

- (A) $a(x) = 6(1+x)^5$;
(B) $a(x) = 6(1-x)^5$;
(C) $a(x) = (1+x)^6$;
(D) $a(x) = (1+x)^{-6}$;
(E) $a(x) = (1-x)^{-6}$.

Solución - Múltiple Opción 5

Notando que $\binom{6}{n+1}$ es 0 para cada $n \geq 6$, tenemos que

$$\begin{aligned} a(x) - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n &= \sum_{n=0}^6 (n+1) \binom{6}{n+1} x^n \\ &= \left(\sum_{n=0}^6 \binom{6}{n+1} x^{n+1} \right)' = ((1+x)^6 - 1)' = 6(1+x)^5, \end{aligned}$$

donde se ha utilizado la fórmula de la potencia de un binomio y la derivada formal de las funciones generatrices. Por lo tanto, la opción correcta es la A.

Ejercicio de Desarrollo

Sea $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida por $b_0 = 0$, $b_1 = 1$, $b_2 = 2$ y para cada número natural n se tiene que $b_{n+3} = b_{n+2} + b_{n+1} + b_n$.

Sea $P(n)$ la siguiente proposición:

$$P(n) : \begin{cases} b_n \text{ es par si } n \text{ es par} \\ b_n \text{ es impar si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

El objetivo de este ejercicio es probar la siguiente afirmación: $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$.

Para conseguirlo, se pide realizar los siguientes pasos:

- (1) Indicar si se va a emplear el principio de inducción simple o fuerte.
- (2) Enunciar el paso base.
- (3) Demostrar el paso base.
- (4) Enunciar el paso inductivo.
- (5) Demostrar el paso inductivo.
- (6) Concluir.

Solución - Ejercicio de Desarrollo

Vamos a realizar la demostración cumpliendo con los 6 pasos sugeridos en la letra:

- (1) Vamos a emplear el principio de inducción fuerte, con un paso base de 3 elementos.
- (2) El paso base consiste en probar $P(0)$, $P(1)$ y $P(2)$.
- (3) Como 0 es par, probar $P(0)$ consiste en probar que b_0 es par. Efectivamente, $b_0 = 0 = 2 \times 0$, por lo que $P(0)$ es cierta. Como 1 es impar, probar $P(1)$ consiste en probar que b_1 es impar. Efectivamente $1 = 2 \times 0 + 1$, por lo que $P(1)$ es cierta. Finalmente, como 2 es par, probar $P(2)$ consiste en probar que b_2 es par. Efectivamente, $b_2 = 2 = 2 \times 1$, por lo que $P(2)$ es cierta. Hemos probado que son ciertas las proposiciones $P(0)$, $P(1)$ y $P(2)$, por lo que el paso base queda demostrado.
- (4) El paso inductivo consiste en asumir que es cierto tanto $P(h)$ como $P(h+1)$ y $P(h+2)$ para algún número natural fijo h , y debemos probar $P(h+3)$.
- (5) Vamos a proceder a demostrar el paso inductivo. Sea h un entero natural tal que $P(h)$, $P(h+1)$ y $P(h+2)$ son ciertas. Queremos demostrar que $P(h+3)$ es cierta. Como h es un número natural entonces es par o impar. Supongamos primero que h es par. Entonces h es par, $h+1$ es impar, y $h+2$ es par. Por la hipótesis inductiva, b_h es par, b_{h+1} es impar y b_{h+2} es par. En tal caso, como $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisface la recurrencia $b_{n+3} = b_{n+2} + b_{n+1} + b_n$ para cada número natural, reemplazando para n igual a h tenemos que $b_{h+3} = b_{h+2} + b_{h+1} + b_h$. Como la suma de un número par y un número impar es impar, resulta que b_{h+3} es impar. Como $h+3$ es impar, tenemos que b_{h+3} tiene la misma paridad que $h+3$, y se cumple $P(h+3)$. Supongamos ahora que h es impar. Entonces h es impar, $h+1$ es par, y $h+2$ es impar. Por la hipótesis inductiva, b_h es impar, b_{h+1} es par, y b_{h+2} es impar. como $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisface la recurrencia $b_{n+3} = b_{n+2} + b_{n+1} + b_n$ para cada número natural, reemplazando para n igual a h tenemos que $b_{h+3} = b_{h+2} + b_{h+1} + b_h$. Como la suma de un número par y un número impar es impar, mientras que la suma de dos números impares es par, resulta que b_{h+3} es par. Como $h+3$ es par, tenemos que b_{h+3} tiene la misma paridad que $h+3$, y se cumple $P(h+3)$. Hemos demostrado la tesis inductiva tanto para el caso en el que h es un número natural par como un número natural impar. Como todo número natural es par o bien impar, se sigue la tesis inductiva.

- (6) Como es cierto tanto el paso base como el paso inductivo, por el principio de inducción fuerte sobre los números naturales la siguiente afirmación es cierta: $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$. Esto es precisamente lo que queríamos demostrar.