SOLUCIÓN – Primer Parcial
VERSIÓN 1
Matemática Discreta I

Martes 26 de setiembre de 2023

M01	M02	M03	M04	M05
C	E	B	B	A

Múltiple Opción 1

Sea n un entero positivo. Determinar la cantidad de subconjuntos de $\{1, 2, \dots, 3n\}$ tales que para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ se cumple que $|X \cap \{3i-2, 3i-1, 3i\}| = 1$.
(A) 3×2^n; (B) n; (C) 3^n; (D) 2^{3n}; (E) 2^n.

Solución - Múltiple Opción 1

Para cada entero $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, el conjunto X debe tener exactamente un elemento dentro del conjunto $\{3i-2, 3i-1, 3i\}$. Hay entonces 3 opciones para elegir exactamente un elemento de tal conjunto. Como i asume exactamente n valores posibles, por la regla del producto hay exactamente 3^n elecciones posibles de subconjuntos X que respetan las condiciones pedidas, y la opción correcta es la C.

Múltiple Opción 2

Determinar la cantidad de soluciones enteras de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ tales que $-7 \leq x_1 \leq 2$, $-7 \leq x_2 \leq 2$ y $-7 \leq x_3 \leq 2$.
(A) 24; (B) 25; (C) 26; (D) 27; (E) 28.

Solución - Múltiple Opción 2

Para cada $i \in \{1, 2, 3\}$ realizamos el cambio de variable dado por $y_i = x_i + 7$. Reemplazando en $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ tenemos que determinar la cantidad de soluciones naturales de la ecuación $y_1 + y_2 + y_3 = 21$ sujeto a que $0 \leq y_1 \leq 9$, $0 \leq y_2 \leq 9$ y $0 \leq y_3 \leq 9$. Sea $\mathcal{U}$ el conjunto que contiene todas las soluciones naturales de la ecuación $y_1 + y_2 + y_3 = 21$. Para cada $i \in \{1, 2, 3\}$ consideramos la condición c_i sobre los elementos de $\mathcal{U}$ dada por $c_i : y_i \geq 10$. Observemos que no hay elementos de $\mathcal{U}$ que cumplen simultáneamente las tres condiciones, por lo que $n(c_1, c_2, c_3) = 0$. La cantidad de elementos de $\mathcal{U}$ es $|\mathcal{U}| = CR^3_{21} = C^{23}_{21} = 253$. Determinemos ahora la cantidad de elementos de $\mathcal{U}$ que cumplen con la condición c_1, es decir que $y_1 \geq 10$. Tomemos el cambio de variable $y_1' = y_1 - 10$. Debemos determinar la cantidad de soluciones naturales de $y_1' + y_2 + y_3 = 11$, que es $n(c_1) = CR^3_{11} = C^{13}_{11} = 78$. Por último, determinemos la cantidad de elementos de $\mathcal{U}$ que cumplen simultáneamente con las condiciones c_1 y c_2. Tomemos los cambios de variable $y_1' = y_1 - 10$ y además $y_2' = y_2 - 10$. Reemplazando, debemos determinar la cantidad de soluciones naturales de la ecuación $y_1' + y_2' + y_3 = 1$, que es $n(c_1, c_2) = 3$.

Por el Principio de Inclusión-Exclusión aplicado al conjunto $\mathcal{U}$ usando las condiciones c_1, c_2 y c_3, resulta que:

$$\begin{aligned} n(\overline{c_1}, \overline{c_2}, \overline{c_3}) &= |\mathcal{U}| - \binom{3}{1} n(c_1) + \binom{3}{2} n(c_1, c_2) - \binom{3}{3} n(c_1, c_2, c_3) \\ &= 253 - 3 \times 78 + 3 \times 3 - 1 \times 0 = 28. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la opción correcta es la E.

Múltiple Opción 3

Hallar el coeficiente en xy^2z^3 del polinomio $(x+y+y^2+z^3-3)^5$.
(A) 300; (B) 360; (C) 420; (D) 480; (E) 540.

Solución - Múltiple Opción 3

Hay dos maneras de obtener xy^2z^3 con las operaciones habituales, tomando la quinta potencia de $x+y+y^2+z^3-3$:

- Elegir 1 vez el símbolo x, 2 veces el símbolo y, 0 vez el símbolo y^2, 1 vez el símbolo z^3 y 1 vez el símbolo -3.
- Elegir 1 vez el símbolo x, 0 vez el símbolo y, 1 vez el símbolo y^2, 1 vez el símbolo z^3 y 2 veces el símbolo -3.

Recordando que el coeficiente multinomial es la selección de multiconjuntos con repetición y tomando los coeficientes de xy^2z^3 obtenidos tras las operaciones habituales de suma y de producto, resulta que el coeficiente en xy^2z^3 es igual a $\frac{5!}{1!2!0!1!1!}(-3)+\frac{5!}{1!0!1!1!2!}(-3)^2=360$. Por lo tanto, la respuesta correcta es la B.

Múltiple Opción 4

Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida por $a_0=0$ y $a_{n+1}=2a_n+2^n$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Hallar a_{100}. (A) 100×2^{100}; (B) 100×2^{99}; (C) 99×2^{100}; (D) 99×2^{99}; (E) 2^{100}.

Solución - Múltiple Opción 4

Vamos a obtener explícitamente en n la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $a_{n+1}=2a_n+2^n$ y $a_0=0$. El polinomio característico es $x-2$ que tiene raíz igual a 2, por lo que la solución del problema homogéneo es $a_n^H=c2^n$, donde c es cualquier constante. Como 2^n es solución del problema homogéneo, vamos a buscar una solución particular de la forma $a_n^P=\alpha n2^n$, donde α es una constante que debemos determinar. Reemplazando en la recurrencia tenemos que:

$$a_{n+1}^P-2a_n^P=\alpha(n+1)2^{n+1}-2\alpha n2^n=2\alpha 2^n=2^n,$$

por lo que $\alpha=1/2$ y $a_n^P=n2^{n-1}$. La solución general se obtiene sumando la particular a la solución homogénea, y es $a_n=c2^n+n2^{n-1}$. Despejemos ahora la constante c utilizando la condición inicial: $a_0=c=0$. Por lo tanto, la sucesión que satisface la recurrencia $a_{n+1}-2a_n=2^n$ con condición inicial $a_0=0$ es $a_n=n2^{n-1}$. En particular, $a_{100}=100\times 2^{99}$. Por lo tanto, la respuesta correcta es la B.

Múltiple Opción 5

Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números naturales definida por $a_n=(n+1)\binom{6}{n+1}$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Su función generatriz $a(x)$ es:
(A) $a(x)=6(1+x)^5$;
(B) $a(x)=6(1-x)^5$;
(C) $a(x)=(1+x)^6$;
(D) $a(x)=(1+x)^{-6}$;
(E) $a(x)=(1-x)^{-6}$.

Solución - Múltiple Opción 5

Notando que $\binom{6}{n+1}$ es 0 para cada $n\geq 6$, tenemos que

$$\begin{aligned}a(x)-\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n&=\sum_{n=0}^{6}(n+1)\binom{6}{n+1}x^n\\&=(\sum_{n=0}^{6}\binom{6}{n+1}x^{n+1})'=((1+x)^6-1)'=6(1+x)^5,\end{aligned}$$

donde se ha utilizado la fórmula de la potencia de un binomio y la derivada formal de las funciones generatrices. Por lo tanto, la opción correcta es la A.

Ejercicio de Desarrollo

Sea $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida por $b_0 = 0$, $b_1 = 1$, $b_2 = 2$ y para cada número natural n se tiene que $b_{n+3} = b_{n+2} + b_{n+1} + b_n$.

Sea $P(n)$ la siguiente proposición:

$$P(n) : \begin{cases} b_n \text{ es par si } n \text{ es par} \\ b_n \text{ es impar si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

El objetivo de este ejercicio es probar la siguiente afirmación: $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$.
Para conseguirlo, se pide realizar los siguientes pasos:

(1) Indicar si se va a emplear el principio de inducción simple o fuerte.
(2) Enunciar el paso base.
(3) Demostrar el paso base.
(4) Enunciar el paso inductivo.
(5) Demostrar el paso inductivo.
(6) Concluir.

Solución - Ejercicio de Desarrollo

Vamos a realizar la demostración cumpliendo con los 6 pasos sugeridos en la letra:

(1) Vamos a emplear el principio de inducción fuerte, con un paso base de 3 elementos.
(2) El paso base consiste en probar $P(0)$, $P(1)$ y $P(2)$.
(3) Como 0 es par, probar $P(0)$ consiste en probar que 0 es par. Efectivamente, $b_0 = 0 = 2 \times 0$, por lo que $P(0)$ es cierta. Como 1 es impar, probar $P(1)$ consiste en probar que b_1 es impar. Efectivamente $1 = 2 \times 0 + 1$, por lo que $P(1)$ es cierta. Finalmente, como 2 es par, probar $P(2)$ consiste en probar que b_2 es par. Efectivamente, $b_2 = 2 = 2 \times 1$, por lo que $P(2)$ es cierta. Hemos probado que son ciertas las proposiciones $P(0)$, $P(1)$ y $P(2)$, por lo que el paso base queda demostrado.
(4) El paso inductivo consiste en asumir que es cierto tanto $P(h)$ como $P(h+1)$ y $P(h+2)$ para algún número natural fijo h, y debemos probar $P(h+3)$.
(5) Vamos a proceder a demostrar el paso inductivo. Sea h un entero natural tal que $P(h)$, $P(h+1)$ y $P(h+2)$ son ciertas. Queremos demostrar que $P(h+3)$ es cierta. Como h es un número natural entonces es par o impar. Supongamos primero que h es par. Entonces h es par, $h+1$ es impar, y $h+2$ es par. Por la hipótesis inductiva, b_h es par, b_{h+1} es impar y b_{h+2} es par. En tal caso, como $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisface la recurrencia $b_{n+3} = b_{n+2} + b_{n+1} + b_n$ para cada número natural, reemplazando para n igual a h tenemos que $b_{h+3} = b_{h+2} + b_{h+1} + b_h$. Como la suma de un número par y un número impar es impar, resulta que b_{h+3} es impar. Como $h+3$ es impar, tenemos que b_{h+3} tiene la misma paridad que $h+3$, y se cumple $P(h+3)$. Supongamos ahora que h es impar. Entonces h es impar, $h+1$ es par, y $h+2$ es impar. Por la hipótesis inductiva, b_h es impar, b_{h+1} es par, y b_{h+2} es impar. como $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisface la recurrencia $b_{n+3} = b_{n+2} + b_{n+1} + b_n$ para cada número natural, reemplazando para n igual a h tenemos que $b_{h+3} = b_{h+2} + b_{h+1} + b_h$. Como la suma de un número par y un número impar es impar, mientras que la suma de dos números impares es par, resulta que b_{h+3} es par. Como $h+3$ es par, tenemos que b_{h+3} tiene la misma paridad que $h+3$, y se cumple $P(h+3)$. Hemos demostrado la tesis inductiva tanto para el caso en el que h es un número natural par como un número natural impar. Como todo número natural es par o bien impar, se sigue la tesis inductiva.

(6) Como es cierto tanto el paso base como el paso inductivo, por el principio de inducción fuerte sobre los números naturales la siguiente afirmación es cierta: $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$. Esto es precisamente lo que queríamos demostrar.