Facultad de Ingeniería - Universidad de la República
ALGORITMOS DE APROXIMACIÓN
LISTA DE PROBLEMAS (2023)

Ejercicio 1
Sea $G = (V, E)$ un grafo bipartito y sea $M_G = (m_{ij})$ la matriz de tamaño $|V| \times |E|$ tal que $m_{ij} = 1$ si $\{i, j\} \in E$ o $m_{ij} = 0$ si no. Probar que M es una matriz totalmente unimodular. Dar un ejemplo de grafo G tal que M_G no sea totalmente unimodular.
Sugerencia: Este es un resultado clásico sobre combinatorial poliedral. Se puede demostrar empleando el principio de inducción completa sobre el tamaño de la submatriz cuadrada.

Ejercicio 2
Probar que si Π_1 y Π_2 son dos COP, (g_1, g_2) es una reducción de Π_1 a Π_2 que preserva el factor de aproximación y $\mathcal{A}$ es un algoritmo de aproximación de factor α para Π_2, entonces $\mathcal{A}' = g_2 \circ \mathcal{A} \circ g_1$ es un algoritmo de aproximación de factor α para Π_1.
Sugerencia: aplicar el algoritmo $\mathcal{A}' = g_2 \circ \mathcal{A} \circ g_1$ aplicado a una instancia cualquiera I_2 del problema Π_2 y utilizar las propiedades de g_1 y g_2.

Ejercicio 3
Probar que existe algún algoritmo de aproximación de factor 2 para el problema de Steiner.
Sugerencias: Probar la optimalidad de Kruskal utilizando programación lineal. Describir en detalle el algoritmo de atajos utilizando la caracterización de circuitos eulerianos. Describir un algoritmo completo en base a lo visto en la Clase 5 del curso.

Ejercicio 4
Probar la existencia de algún algoritmo de aproximación de factor 3/2 para el TSP métrico.
Sugerencias: reutilizar algoritmos descriptos en el ejercicio anterior. Detallar un algoritmo que permite obtener emparejamientos de costo mínimo en tiempo polinomial. Completar los detalles del algoritmo de Christofides visto en la Clase 5 del curso.

Ejercicio 5
Sea $G = (V, E)$ un grafo con costos racionales no negativos en sus aristas y dos conjuntos disjuntos de vértices: los emisores S, y los receptores, R. Se desea hallar un subgrafo de costo mínimo que una con caminos a cada receptor con al menos un emisor. Probar que:

- Si $V = S \cup R$ entonces el problema pertenece a la clase $\mathcal{P}$.
- Si $V \neq S \cup R$ entonces el problema es $\mathcal{NP}$-difícil y pertenece a la clase APX.

Sugerencia: traducir los problemas descriptos al MST cuando $S \cup R = V$ o al problema de Steiner cuando $S \cup R \neq V$.

Ejercicio 6
Demostrar que en el Problema plano Euclídeo de Steiner, todo vértice de Steiner tiene grado 3, y sus segmentos incidentes se hallan a 120 grados.
Sugerencia: leer el artÃculo sobre la Historia del Problema de Steiner EuclÃdeo disponible en el sitio del curso.

Ejercicio 7

Demostrar que en MAX k-CUT la heurística golosa garantiza un factor $1 - \frac{1}{k}$.
Dar una familia justa para el algoritmo.
Sugerencia: dado un grafo $G = (V, E)$, el MAX-k-CUT consiste en encontrar la partición de vértices $V = \cup_{i=1}^{k} A_i$ que tiene la máxima cantidad de aristas en E con exactamente un extremo en A_i y exactamente un extremo en A_j tales que $i \neq j$. Se recomienda seleccionar inicialmente k vértices cualesquiera $v_1, v_2, \ldots, v_k$ de V, definir inicialmente conjuntos unitarios $B_i = \{v_i\}$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ y luego agregar de manera golosa a todos los restantes vértices de V.

Ejercicio 8

Formular MST mediante programación lineal entera de modo que su relajación sea integral.
Sugerencia: formular el problema primal siguiendo el Ejercicio 12.10 del libro de Vazirani. Sea $e_1, e_2, \ldots, e_m$ el conjunto de aristas que elige Kruskal con costos $c(e_1), c(e_2), \ldots, c(e_n)$ y sea $A_i = \{e_1, \ldots, e_i\}$. Notar que $A_m = E$. Mostrar que la tupla y dada por $y_{A_i} = c(e_{i+1}) - c(e_i)$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$, $y_{A_m} = y_E = -c(e_m)$ o $y_S = 0$ para cualquier otro subconjunto S de E es solución factible dual. Utilizar esta solución para resolver el ejercicio empleando resultados de dualidad.

Ejercicio 9

Derivar el Teorema Minimax de Teoría de Juegos utilizando el Teorema de Dualidad LP.
Sugerencia: seguir las sugerencias del Ejercicio 12.11 del libro de Vazirani.

Ejercicio 10

Construir un algoritmo de factor 2 para el kECON.
Sugerencia: dado un grafo $G = (V, E)$ que es k-arista conexo, el kECON consiste en seleccionar el subgrafo H de G que sea k-arista conexo de costo mínimo. Se sugiere plantear formalmente el kECON como un COP y luego comparar con el COP de Redes de Steiner.

Ejercicio 11

Construir un algoritmo de aproximación de factor 2 para el problema de cubrimiento de vértices de peso mínimo.
Sugerencia: en el libro de Vazirani se detalla una formulación del problema de cubrimiento de vértices de mínimo peso como problema de programación lineal entera. Duplicar la solución óptima del problema relajado.

Ejercicio 12

Probar que la función $f(p_1, p_2, \ldots, p_n) = \prod_{i=1}^{n}(1 - p_i)$ sujeto a que $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ y $(p_1, p_2, \ldots, p_n) \in [0, , 1]^n$ se maximiza cuando $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = 1/n$.
Sugerencia: probar primero existencia de alguna solución. Luego, mostrar que si dos coordenadas de $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ no son idénticas entonces p no alcanza el máximo.

Ejercicio 13

Probar que la función de requerimientos del problema de Redes de Steiner es débilmente supermodular.
Sugerencia: aplicar directamente la definición de supermodularidad dÃ©bil.