

# Introducción al método de descomposición de dominios

Jean R. Roche

UDELAR, Montevideo, Uruguay

October 2023

Podemos considerar dos tipos de motivación :

- la primera de orden informática
- la segunda motivada por el análisis numérico.

Es conveniente de establecer que la primera utilización del método de descomposición de dominios es obra de Hermann Amandus Schwarz que en un artículo publicado en 1870 utilizó una descomposición de dominios para resolver una ecuación de Laplace en un dominio en forma de  $L$  utilizando la representación de la solución en series de Fourier cuando el dominio es un rectángulo.



Figure – Hermann Amandus Schwarz.

Pero fue una utilización aislada que no dio lugar ni a un desarrollo intensivo de la metodología, ni a un análisis de su rendimiento y de las aplicaciones posibles.

Posteriormente el método de descomposición de dominios volvió a ser estudiado cuando aparecieron las computadoras paralelas.

P.L. Lions, On the Schwarz alternating method. I, SIAM, Philadelphia, PA, 1988, 1–42

La discretización de ecuaciones diferenciales a derivadas parciales establecidas en dominios de geometría muy compleja, con características físicas muy variables (por ejemplo, las secciones eficaces de fenómenos físicos) implican en general un mallado muy fino y en consecuencia un sistema lineal de tal tamaño que es insoluble con un computador monoprocesador, sin contar con los problemas causados por la necesidad de pre-condicionamiento.

El método de descomposición de dominios permitirá resolver este tipo de problemas descomponiendo el problema inicial, sobre todo el dominio, en un conjunto de problemas de dimensión más pequeña definidos en sub dominios.

Cada sub-problema discretizado tendrá una dimensión bien inferior a la dimensión del problema original, el sistema lineal resultante será de dimensión menor, mejor condicionado y resoluble con una computadora mono procesadora. Los diversos sub-problema podrán ser resueltos en paralelo en una computadora con multiprocesadores y un algoritmo, en general iterativo, permitirá la convergencia a la solución del problema original.

Fundamentalmente los métodos de descomposición de dominios se dividen en dos tipos :

- Los métodos con solapamiento son llamados métodos de Schwarz,
- Los métodos sin solapamiento son llamados métodos de subestructuración,



Para introducir la formulación multi-dominios de un problema dado por ecuaciones diferenciales de derivadas parciales vamos a considerar un problema simple, la ecuación de Poisson definida sobre un dominio acotado  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^d$ .

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x) & \text{si } x \in \Omega \\ u(x) = 0 & \text{si } x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

con  $\partial\Omega$  Lipschitz y  $f \in L^2(\Omega)$ .

Su formulación variacional es la siguiente : Encontrar  $u \in H_0^1(\Omega)$  tal que :

$$a(u, v) = (\nabla u, \nabla v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx = (f, v), \text{ para todo } v \in H_0^1(\Omega) \quad (2)$$

# Formulación Multidominios

Introducimos una descomposición del dominio  $\Omega$  en dos sub dominios  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  sin solapamiento es decir que  $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2$  y  $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ .

Definimos  $\Gamma = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$  la interfaz entre los dos sub dominios, que suponemos Lipschitz. Sea  $\bar{n} = \bar{n}_1$  el vector normal exterior al dominio  $\Omega_1$ .

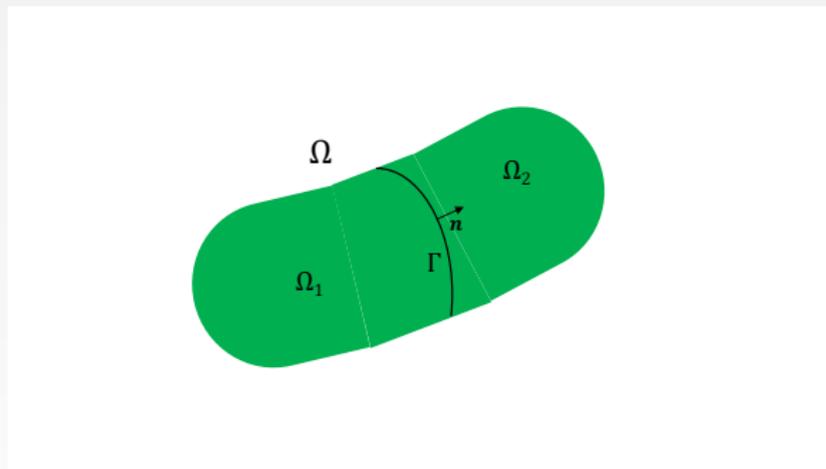


Figure – descomposición en dos sub dominios.

Notamos  $u_i, i = 1, 2$  las restricciones a  $\Omega_i, i = 1, 2$  respectivamente de  $u$  la solución del problema monodominio.

El problema (1) puede ser reformulado en la forma multi-dominio siguiente :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u_1(x) = f(x) & \text{si } x \in \Omega_1 \\ u_1(x) = 0 & \text{si } x \in \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega \\ u_1(x) = u_2(x) & \text{si } x \in \Gamma \\ \frac{\partial u_2}{\partial \bar{n}} = \frac{\partial u_1}{\partial \bar{n}} & \text{si } x \in \Gamma \\ u_2(x) = 0 & \text{si } x \in \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega \\ -\Delta u_2(x) = f(x) & \text{si } x \in \Omega_2 \end{array} \right. \quad (3)$$

Consideramos los espacios :

$$(u, v) = \int_{\Omega} uv \, dx$$

$$L^2(\Omega) = \{v \text{ función medible definida sobre } \Omega \text{ tal que } (v, v) \text{ es finita}\}$$

$$H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) \text{ tal que } \nabla v \in L^2(\Omega)\}$$

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) \text{ tal que } v = 0 \text{ dans } \partial\Omega\}$$

$$H^{1/2}(\Gamma) = \text{espacio de trazas en } \Gamma \text{ de las funciones de } H^1(\Omega)$$

$$V = H_0^1(\Omega)$$

$$V_i = \{v_i \in H^1(\Omega_i) \text{ tal que } v_i|_{\partial\Omega_i \cap \partial\Omega} = 0\}$$

$$V_i^0 = H_0^1(\Omega_i)$$

$$\Lambda = \{\eta \in H^{1/2}(\Gamma) \text{ tal que } \eta = v|_{\Gamma} \text{ para un } v \in V\}.$$

De hecho  $\Lambda = H^{1/2}(\Gamma)$  si  $\Gamma \cap \partial\Omega = \emptyset$  y  $\Lambda = H_{0,0}^{1/2}(\Gamma)$  si  $\Gamma \cap \partial\Omega \neq \emptyset$ .

Consideramos las siguientes normas definidas sobre estos espacios de funciones :

$$\|v\|_{0,\Omega} = (v, v)^{1/2}$$

En  $H^1(\Omega)$

$$\|v\|_{1,\Omega} = ((v, v) + (\nabla v, \nabla v))^{1/2}$$

En  $H_0^1(\Omega)$

$$|v|_{1,\Omega} = (\nabla v, \nabla v)^{1/2}$$

En  $\Lambda$  existe  $C > 0$  tal que

$$\|v|_{\Gamma}\|_{\Lambda} \leq C \|v\|_{1,\Omega}$$

Definimos en esos espacios funcionales formas lineales y bilineales, es decir aplicaciones lineales o bilineales con imagen en  $\mathbb{R}$ . Por ejemplo :

$$L(v) = (f, v) = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx$$
$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla v \nabla v dx$$

Diremos que la forma lineal es continua si  $|L(v)| \leq \|L\| \|v\|$ .  
Aqui por ejemplo :  $|(f, v)| \leq \|f\|_{0,\Omega} \|v\|_{0,\Omega}$  (desigualdad de Cauchy-Schwarz)

En  $H_0^1(\Omega)$  tenemos que :

$$|(f, v)| \leq \|f\|_{0,\Omega} \|v\|_{1,\Omega}$$

En el caso de la forma bilineal  $a(u, v)$  es continua pues :

$$|a(u, v)| \leq \|\nabla u\|_{0,\Omega} \|\nabla v\|_{0,\Omega} \leq \|u\|_{1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega}$$

Decimos que una forma bilineal  $a(u, v)$  es "coerciva" en  $H_0^1(\Omega)$  : si existe  $\alpha > 0$  tal que :

$$|a(v, v)| \geq \alpha \|v\|_{1,\Omega}^2$$

En nuestro caso la coercividad de  $a(., .)$  se deduce de la desigualdad de Poincaré : existe  $C_\Omega > 0$  tal que :

$$\|v\|_{0,\Omega}^2 \leq C_\Omega \|\nabla v\|_{0,\Omega}^2$$

Sea  $\Omega$  un abierto acotado, de frontera Lipschitz, entonces  $\forall u, v \in H^1(\Omega)$  tenemos que :

$$\int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_i} v + u \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\} dx = \int_{\Gamma} u|_{\Gamma} v|_{\Gamma} n_i d\Gamma, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

donde  $n_i$  es la coordenada  $i$  de la normal a la frontera  $n$ .

**Corolario** Si  $u \in H^2(\Omega)$  y  $v \in H^1(\Omega)$  entonces :

$$\int_{\Omega} \Delta u v dx = - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma} v|_{\Gamma} d\Gamma.$$

y si  $u, v \in H^2(\Omega)$

$$\int_{\Omega} (\Delta u v - u \Delta v) dx = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma} v|_{\Gamma} - u|_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial n}|_{\Gamma} d\Gamma.$$

Sea  $u \in \mathcal{C}(\Omega)^2 \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ ,  $\Omega$  acotado, que verifica

$$-\Delta u \leq 0 \text{ en } \Omega$$

Entonces :

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u.$$

Sea  $u \in \mathcal{C}(\Omega)^2 \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ ,  $\Omega$  acotado, que verifica

$$-\Delta u \geq 0 \text{ en } \Omega$$

Entonces :

$$\inf_{\Omega} u = \inf_{\partial\Omega} u.$$

Sea  $u \in \mathcal{C}(\Omega)^2 \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ ,  $\Omega$  acotado, que verifica

$$-\Delta u = 0 \text{ en } \Omega$$

Entonces :

$$\sup_{\Omega} |u| = \sup_{\partial\Omega} |u|.$$

Si ahora definimos  $(u_i, v_i)_i = \int_{\Omega_i} u_i v_i dx$

y  $a_i(u_i, v_i) = (\nabla u_i, \nabla v_i)_i$ .

La formulación débil del problema multi-dominios es la siguiente :encontrar  $u_1 \in V_1$  y  $u_2 \in V_2$  tal que :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1(u_1, v_1) = (f, v_1)_1 \quad \forall v_1 \in V_1^0 \\ u_1 = u_2 \quad \text{en } \Gamma \\ a_2(u_2, v_2) = (f, v_2)_2 \quad \forall v_2 \in V_2^0 \\ a_2(u_2, \mathcal{R}_2\mu) = (f, \mathcal{R}_2\mu)_2 + (f, \mathcal{R}_1\mu)_1 - a_1(u_1, \mathcal{R}_1\mu) \quad \forall \mu \in \Lambda \end{array} \right.$$

donde :

$$\mathcal{R}_i : \Lambda \rightarrow V_i \text{ tal que } (\mathcal{R}_i\eta)|_{\Gamma} = \eta \quad i = 1, 2$$

## Lema

*Los problemas monodominio y multidominio son equivalentes, es decir que si  $u$  es solución del problema monodominio, la restricción de  $u$  a  $\Omega_1$ ,  $u_1$  y la restricción de  $u$  a  $\Omega_2$ ,  $u_2$  son solución del problema multidominio y inversamente si  $u_1$  y  $u_2$  son solución del problema multidominio,*

$$u = \begin{cases} u_1 & \text{en } \Omega_1 \\ u_2 & \text{en } \Omega_2 \end{cases}$$

*es solución del problema monodominio.*

Supongamos que  $u \in H_0^1(\Omega)$  es la solución de la ecuación monodominio. Definimos  $u_i = u|_{\Omega_i}$ ,  $i = 1, 2$ , entonces  $u_i \in V_i$  y verifican las siguientes ecuaciones :

$$a_1(u_1, v_1) = \int_{\Omega_1} \nabla u_1 \nabla v_1 \, dx = \int_{\Omega_1} \nabla u \nabla v_1 \, dx = \int_{\Omega_1} f v_1 = (f, v_1)_1 \quad \forall v_1$$

$$a_2(u_2, v_2) = \int_{\Omega_2} \nabla u_2 \nabla v_2 \, dx = \int_{\Omega_2} \nabla u \nabla v_2 \, dx = \int_{\Omega_2} f v_2 = (f, v_2)_2 \quad \forall v_2$$

y

$$u_1 = u_2 \text{ en } \Gamma$$

Para  $\mu \in \Lambda$  definimos la función  $\mathcal{R}$  tal que  $\mu \rightarrow \mathcal{R}\mu$  de la manera siguiente :

$$\mathcal{R}\mu = \begin{cases} \mathcal{R}_1\mu & \text{en } \Omega_1 \\ \mathcal{R}_2\mu & \text{en } \Omega_2 \end{cases}$$

entonces  $R\mu \in H_0^1(\Omega)$  (reconexión de Sobolev, ver apéndice).  
De la definición de  $u$  tenemos que  $a(u, \mathcal{R}\mu) = (f, \mathcal{R}\mu)$ , pero entonces :

$$a(u, \mathcal{R}\mu) = a_1(u_1, \mathcal{R}\mu) + a_2(u_2, \mathcal{R}\mu) = (f, \mathcal{R}\mu) = (f, \mathcal{R}\mu)_1 + (f, \mathcal{R}\mu)_2$$

concluimos que :

$$a_2(u_2, \mathcal{R}\mu) = (f, \mathcal{R}\mu)_1 + (f, \mathcal{R}\mu)_2 - a_1(u_1, \mathcal{R}\mu)$$

Consideremos ahora  $u_i, i = 1, 2$  la solución del problema multidominio. Definimos :

$$u = \begin{cases} u_1 & \text{en } \Omega_1 \\ u_2 & \text{en } \Omega_2 \end{cases} \quad (4)$$

Pero  $u_1 = u_2$  en  $\Gamma$ , entonces  $u \in H_0^1(\Omega)$  (reconexión de Sobolev). Por otro lado si  $v \in H_0^1(\Omega)$  podemos definir  $\mu = v|_\Gamma \in \Lambda$ . Si ahora consideramos que el relevamiento  $\mathcal{R}_i\mu$  pertenece a  $V_i$  et además  $v|_{\Omega_i} - \mathcal{R}_i\mu \in H_0^1(\Omega_i) = V_i^0$  y eso para  $i = 1, 2$ .

Llevando esto a la formulacion variacional del problema monodominio obtenemos :

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \sum_{i=1}^2 a_i(u_i, v|_{\Omega_i} - \mathcal{R}_i\mu) + a_i(u_i, \mathcal{R}_i\mu) \\ &= \left( \sum_{i=1}^2 (f, v|_{\Omega_i} - \mathcal{R}_i\mu) \right) + a_1(u_1, \mathcal{R}_1\mu) \\ &\quad + (f, \mathcal{R}_1\mu) + (f, \mathcal{R}_2\mu) - a_1(u_1, \mathcal{R}_1\mu) \\ &= \sum_{i=1}^2 (f, v|_{\Omega_i} - \mathcal{R}_i\mu) + (f, \mathcal{R}_i\mu) \\ &= (f, v) \end{aligned}$$

Sea  $u$  una solución regular del problema siguiente :

$$\begin{aligned}Lu &= -\nabla \cdot (a(x)\nabla u) + b(x)\cdot\nabla u + c(x)u = f, \text{ en } \Omega \\ u &= 0, \text{ en } \partial\Omega\end{aligned}$$

aquí suponemos que  $b(x)$  y  $c(x) > 0$  son regulares.

## Teorema

- 1) Suponemos que  $u$  es una solución del problema monodominio.
- 2) Sean  $w_1$  y  $w_2$  soluciones regulares del problema multidominios siguiente :

$$\left\{ \begin{array}{ll} Lw_1(x) & = f(x) \text{ si } x \in \Omega_1 \\ w_1(x) & = 0 \text{ si } x \in \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega \\ w_1(x) & = w_2(x) \text{ si } x \in \Gamma \\ n_1 \cdot (a\nabla w_2 - bw_2) & = n_1 \cdot (a\nabla w_1 - bw_1) \text{ si } x \in \Gamma \\ w_2(x) & = 0 \text{ si } x \in \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega \\ Lw_2(x) & = f(x) \text{ si } x \in \Omega_2 \end{array} \right.$$

Entonces :

$$\left\{ \begin{array}{l} w_1(x) = u(x), \text{ en } \bar{\Omega}_1 \\ w_2(x) = u(x), \text{ en } \bar{\Omega}_2 \end{array} \right.$$

## Formulación Multidominios, caso regular

Si  $u$  es solución regular del problema monodominio, sea  $w_i = u$  en  $\bar{\Omega}_i$ , mostremos que  $w_i, i = 1, 2$  son solución del problema multidominio.

$Lw_i = f_i, i = 1, 2$  y por la continuidad de  $u$ ,  $w_1 = w_2$  en  $\Gamma$ .

Integrando la ecuación contra una función test  $v \in C_0^\infty(\Omega)$  :

$$\int_{\Omega} (a \nabla u \nabla v - u \nabla \cdot (bv) + cuv) dx = \int_{\Omega} fv dx$$
$$\sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_i} (a \nabla w_i \nabla v - w_i \nabla \cdot (bv) + cw_i v) dx = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_i} fv dx$$

Por otro lado si aplicamos Green :

$$\sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_i} -\nabla \cdot (a \nabla w_i - b \nabla w_i) v + cw_i v dx$$
$$- \int_{\Gamma} n_1 \cdot (a \nabla w_1 - b w_1 - a \nabla w_2 + b w_2) v d\Gamma = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_i} f v dx$$

$$\int_{\Gamma} n_1 \cdot (a \nabla w_1 - b w_1 - a \nabla w_2 + b w_2) v \, d\Gamma = 0, \forall v \in C_0^\infty(\Omega) \quad (5)$$

En consecuencia :

$$n_1 \cdot (a \nabla w_1 - b w_1) = n_1 \cdot (a \nabla w_2 - b w_2), \text{ en } \Gamma \quad (6)$$

Los cálculos, a causa de la regularidad, pueden efectuarse en los dos sentidos.

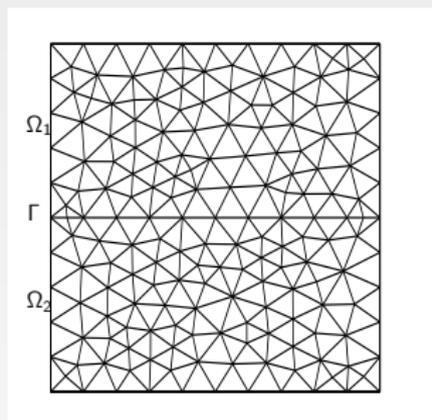


Figure – Malla en dos subdominios

$V_h = \{v_h : v_h \in C^0(\Omega), \text{ y } v_T \in \mathbb{P}_1(T), \forall T \in \mathcal{T}_h(\Omega)\}$  y  
 $X_h = V_h \cap H_0^1(\Omega)$ . Anotamos  $x_j^{(i)}, 1 \leq j \leq N_i$  los nodos de interpolación de  $\Omega_i, i = 1, 2$  y  $x_j^{(\Gamma)}, 1 \leq j \leq N_\Gamma$  los nodos de interpolación de  $\Gamma$ . Las funciones de base de  $X_h$  son anotadas en consecuencia :  $\varphi_j^{(i)}$  las funciones asociadas a los nodos  $x_j^{(i)}$  y  $\varphi_j^{(\Gamma)}$  las funciones asociadas a los nodos  $x_j^{(\Gamma)}$ .

# Formulación Multidominios, elementos finitos

Así  $u_h \in X_h$  podrá escribirse de la manera siguiente :

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^{N_1} u_h(x_j^{(1)}) \varphi_j^{(1)}(x) + \sum_{j=1}^{N_2} u_h(x_j^{(2)}) \varphi_j^{(2)}(x) + \sum_{j=1}^{N_\Gamma} u_h(x_j^{(\Gamma)}) \varphi_j^{(\Gamma)}(x)$$

Entonces la formulacion debil toma la forma siguiente :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N_1} u_h(x_j^{(1)}) a_1(\varphi_j^{(1)}, \varphi_i^{(1)}) + \sum_{j=1}^{N_\Gamma} u_h(x_j^{(\Gamma)}) a_1(\varphi_j^{(\Gamma)}, \varphi_i^{(1)}) &= (f, \varphi_i^{(1)})_1, 1 \leq i \leq N_1 \\ \sum_{j=1}^{N_2} u_h(x_j^{(2)}) a_2(\varphi_j^{(2)}, \varphi_i^{(2)}) + \sum_{j=1}^{N_\Gamma} u_h(x_j^{(\Gamma)}) a_2(\varphi_j^{(\Gamma)}, \varphi_i^{(2)}) &= (f, \varphi_i^{(2)})_2, 1 \leq i \leq N_2 \\ \sum_{j=1}^{N_\Gamma} u_h(x_j^{(\Gamma)}) [a_1(\varphi_j^{(\Gamma)}, \varphi_i^{(\Gamma)}) + a_2(\varphi_j^{(\Gamma)}, \varphi_i^{(\Gamma)})] + \\ + \sum_{j=1}^{N_1} u_h(x_j^{(1)}) a_1(\varphi_j^{(1)}, \varphi_i^{(\Gamma)}) + \sum_{j=1}^{N_2} u_h(x_j^{(2)}) a_2(\varphi_j^{(2)}, \varphi_i^{(\Gamma)}) \\ = (f, \varphi_i^{(\Gamma)})_1 + (f, \varphi_i^{(\Gamma)})_2, & \quad 1 \leq i \leq N_\Gamma \end{aligned}$$

Si ahora anotamos :

- $(A_{11})_{i,j} = a_1(\varphi_j^{(1)}, \varphi_i^{(1)}), (A_{1\Gamma})_{i,j} = a_1(\varphi_j^{(\Gamma)}, \varphi_i^{(1)}),$   
 $(F_1)_j = (f, \varphi_j^{(1)})_1,$
- $(A_{22})_{i,j} = a_2(\varphi_j^{(2)}, \varphi_i^{(2)}), (A_{2\Gamma})_{i,j} = a_2(\varphi_j^{(\Gamma)}, \varphi_i^{(2)}),$   
 $(F_2)_j = (f, \varphi_j^{(2)})_2,$
- $(A_{\Gamma 1})_{i,j} = a_1(\varphi_j^{(1)}, \varphi_i^{(\Gamma)}), (A_{\Gamma 2})_{i,j} = a_2(\varphi_j^{(2)}, \varphi_i^{(\Gamma)}),$
- $(A_{\Gamma\Gamma}^{(1)})_{i,j} = a_1(\varphi_j^{(\Gamma)}, \varphi_i^{(\Gamma)}), (A_{\Gamma\Gamma}^{(2)})_{i,j} = a_2(\varphi_j^{(\Gamma)}, \varphi_i^{(\Gamma)}),$
- $(F_1^\Gamma)_j = (f, \varphi_j^{(\Gamma)})_1, (F_2^\Gamma)_j = (f, \varphi_j^{(\Gamma)})_2,$
- $(U_1)_j = u_h(x_j^{(1)}), (U_2)_j = u_h(x_j^{(2)})$  y  $(\lambda)_j = u_h(x_j^{(\Gamma)}).$

El sistema discreto puede ahora formularse de la manera siguiente :

$$A_{11}U_1 + A_{1\Gamma}\lambda = F_1$$

$$A_{22}U_2 + A_{2\Gamma}\lambda = F_2$$

$$A_{\Gamma 1}U_1 + A_{\Gamma 2}U_2 + (A_{\Gamma\Gamma}^{(1)} + A_{\Gamma\Gamma}^{(2)})\lambda = F_1^\Gamma + F_2^\Gamma$$

Donde  $U_1$  es el vector de incógnitas en  $\Omega_1$ ,  $U_2$  es el vector de incógnitas en  $\Omega_2$  y  $\lambda$  es el vector de incógnitas en  $\Gamma$ .

Dicho de otra manera,  $U$  es solución del sistema lineal :

$$\begin{bmatrix} A_{11} & 0 & A_{1\Gamma} \\ 0 & A_{22} & A_{2\Gamma} \\ A_{\Gamma 1} & A_{\Gamma 2} & A_{\Gamma\Gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_\Gamma \end{bmatrix}$$

donde  $A_{\Gamma\Gamma} = (A_{\Gamma\Gamma}^{(1)} + A_{\Gamma\Gamma}^{(2)})$  y  $F_\Gamma = F_1^\Gamma + F_2^\Gamma$ .

El operador Steklov Poincaré que también se conoce como el operador de Dirichlet-Neumann es un operador que en el caso de una ecuación elíptica sobre un dominio acotado con condiciones de borde (en la frontera) de tipo Dirichlet le da al dato de Dirichlet en la frontera la derivada normal en la frontera.

El algoritmo consiste fundamentalmente en la resolución de una ecuación con incógnitas solamente en  $\Gamma$ .

Vamos a determinar la condición de Dirichlet en el borde  $\Gamma$  de manera que la solución de nuestra ecuación en los sub dominios verifique todas las condiciones de formulacion multidominios.

Sea  $\lambda$  la valor incognita de  $u$  en  $\Gamma$  ; consideremos los dos problemas siguientes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta w_i(x) = f(x) & \text{si } x \in \Omega_i \\ w_i(x) = 0 & \text{si } x \in \partial\Omega_i \cap \partial\Omega \\ w_i(x) = \lambda & \text{si } x \in \Gamma \end{array} \right.$$

para  $i = 1, 2$ .

Formalmente  $w_i = u_i$  para  $i = 1, 2$  si y solamente si

$$\frac{\partial w_1}{\partial \bar{n}} = \frac{\partial w_2}{\partial \bar{n}}$$

Consideremos la descomposición de  $w_i, i=1,2$  siguiente :

$$w_i = w_i^\circ + w_i^* \quad (7)$$

tal que :

$$\begin{cases} -\Delta w_i^\circ(x) = 0 & \text{si } x \in \Omega_i \\ w_i^\circ(x) = 0 & \text{si } x \in \partial\Omega_i \cap \partial\Omega \\ w_i^\circ(x) = \lambda & \text{si } x \in \Gamma \end{cases} \quad (8)$$

Es decir que  $w_i^\circ$  es el relevamiento armónico de  $\lambda$  en  $\Omega_i$ , que notamos  $H_i\lambda$ . Por otro lado :

$$\begin{cases} -\Delta w_i^*(x) = f(x) & \text{si } x \in \Omega_i \\ w_i^*(x) = 0 & \text{si } x \in \partial\Omega_i \cap \partial\Omega \\ w_i^*(x) = 0 & \text{si } x \in \Gamma \end{cases} \quad (9)$$

Notamos  $w_i^* = G_i f$ .

Queremos obtener  $\lambda$  tal que se verifique :

$$\begin{aligned}\frac{\partial w_1}{\partial \bar{n}} &= \frac{\partial w_2}{\partial \bar{n}} \\ \frac{\partial(w_1^\circ + w_1^*)}{\partial \bar{n}} &= \frac{\partial(w_2^\circ + w_2^*)}{\partial \bar{n}} \\ \frac{\partial(w_1^\circ - w_2^\circ)}{\partial \bar{n}} &= \frac{\partial(w_2^* - w_1^*)}{\partial \bar{n}} \\ \frac{\partial H_1 \lambda}{\partial \bar{n}} - \frac{\partial H_2 \lambda}{\partial \bar{n}} &= \frac{\partial G_2}{\partial \bar{n}} - \frac{\partial G_1}{\partial \bar{n}}\end{aligned}$$

Es decir que formalmente  $\lambda$  debe satisfacer una ecuación definida en la interfaz :

$$S\lambda = \chi$$

con

$$S = S_1 - S_2,$$

$$S_i\lambda = \frac{\partial H_i\lambda}{\partial \bar{n}},$$

$i = 1, 2$ , el operador de Steklov-Poincaré.

El segundo miembro  $\chi$  es dado por :

$$\chi = \frac{\partial G_2 f}{\partial \bar{n}} - \frac{\partial G_1 f}{\partial \bar{n}}$$

# Operador de Steklov-Poincaré, formulación débil

El operador de Steklov-Poincaré está definido como  $S : \Lambda \rightarrow \Lambda'$ , ( $\Lambda'$  el dual de  $\Lambda$ ). Y puede ser representado de la manera siguiente :

$$\langle S\eta, \mu \rangle_{\Lambda', \Lambda} = \sum_{i=1}^2 \left\langle \frac{\partial H_i \lambda}{\partial \bar{n}}, \mu \right\rangle \quad (10)$$

$$= \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_i} \nabla(H_i \eta) \nabla(R_i \mu) dx \quad (11)$$

$$= \sum_{i=1}^2 a_i(H_i \eta, R_i \mu) \quad \forall \eta, \mu \in \Lambda \quad (12)$$

Si elegimos como relevamiento  $\mathcal{R}_i$  el relevamiento armónico  $H_i$  obtenemos :

$$\langle S\eta, \mu \rangle_{\Lambda', \Lambda} = \sum_{i=1}^2 a_i(H_i \eta, H_i \mu) \quad \forall \eta, \mu \in \Lambda \quad (13)$$

verificamos que  $S$  es un operador simétrico, continuo y elíptico.

# Operador de Steklov-Poincaré, formulación débil

El segundo miembro de la ecuación puede expresarse de la manera siguiente :

$$\begin{aligned}\langle \chi, \mu \rangle_{\Lambda', \Lambda} &= - \sum_{i=1}^2 \left\langle \frac{\partial G_i f}{\partial \bar{n}_i}, \mu \right\rangle \\ &= - \sum_{i=1}^2 \int_{\partial \Omega_i} \frac{\partial G_i f}{\partial \bar{n}_i} \mu \, d\gamma \\ &= \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_i} f \mathcal{R}_i \mu \, dx - \int_{\Omega_i} \nabla G_i f \nabla \mathcal{R}_i \mu \, dx \\ &= \sum_{i=1}^2 ((f, \mathcal{R}_i \mu)_i - a_i(G_i f, \mathcal{R}_i \mu))\end{aligned}$$

Es lineal y continuo pues combinación de funciones lineales y continuas sobre  $\Lambda$ . En consecuencia, el problema de Steklov-Poincaré admite una única solución (Teorema Lax Milgram).

El algoritmo que resulta es el siguiente : Calcular  $\lambda$  tal que :

$$\langle S\lambda, \mu \rangle = \langle \chi, \mu \rangle \quad (14)$$

donde :

$$\langle S\lambda, \mu \rangle = \sum_{i=1}^2 a_i(H_i\lambda, H_i\mu) \quad (15)$$

$H_i\lambda$  es solución de :

$$\left\{ \begin{array}{l} H_i\lambda \in V_i \\ a_i(H_i\lambda, v_i) = 0 \quad \forall v_i \in V_i^0 \\ H_i\lambda = \lambda \text{ en } \Gamma \end{array} \right.$$

El segundo miembro de la ecuación es dado por :

$$\langle \chi, \mu \rangle = \sum_{i=1}^2 ((f, H_i \mu) - a_i(G_i f, H_i \mu)) \quad (16)$$

donde  $G_i f$  es la solución de :

$$\left\{ \begin{array}{l} G_i f \in V_i^0 \\ a_i(G_i f, v_i) = f \quad \forall v_i \in V_i^0 \\ G_i f = 0 \text{ en } \partial\Omega_i \end{array} \right.$$

# Caso de la elasticidad lineal

Sea  $\Omega$  un abierto acotado y conexo.

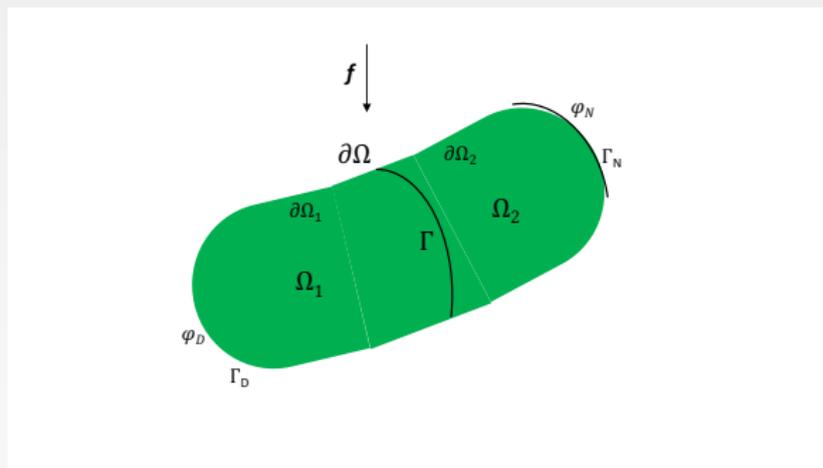


Figure – descomposición en dos sub dominios.

## Caso de la elasticidad lineal

Denominamos  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  el vector de desplazamientos y entonces la ecuación de equilibrio en elasticidad lineal puede escribirse de la manera siguiente :

$$\left\{ \begin{array}{l} (Lu)_l = f_l \text{ en } \Omega, \quad l = 1, \dots, d, \\ u = \varphi_D \text{ en } \partial\Omega_D = \Gamma_D, \\ \sum_{j=1}^d \sigma_{l,j}(u)u_j = (\varphi_N)_l \text{ en } \partial\Omega_N = \Gamma_N, \quad l = 1, \dots, d. \end{array} \right.$$

donde :

$$(Lw)_l = - \sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{l,j}(w), \quad l = 1, \dots, d$$
$$\sigma_{l,j}(w) = \hat{\mu} \left( \frac{\partial}{\partial x_l} w_j + \frac{\partial}{\partial x_j} w_l \right) + \hat{\lambda} \operatorname{div}(w) \delta_{l,j}$$

donde  $l, j = 1, \dots, d$ ,  $\hat{\mu} > 0$ ,  $\hat{\lambda} \geq 0$  los coeficientes de Lamé y  $\delta_{l,j}$  el tensor de Kronecker.

- Las funciones  $f$ ,  $\varphi_D$  y  $\varphi_N$  son funciones vectoriales definidas en  $\Omega$ ,  $\Gamma_D$  y  $\Gamma_N$  respectivamente.
- La descomposición del borde  $\partial\Omega$  en  $\Gamma_D$  y  $\Gamma_N$  verifica que  $\bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N = \partial\Omega$ ,  $\Gamma_D \neq \emptyset$  y  $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$ .
- El vector  $f$  representa las fuerzas que actúan sobre el cuerpo  $\Omega$ .
- $\varphi_D$  es el desplazamiento en la porción del borde o frontera llamado  $\Gamma_D$
- $\varphi_N$  es la tracción aplicada en la region complementaria de la frontera llamada  $\Gamma_N$ .

Ahora consideramos la descomposición en sud-dominios sin solapamiento  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  tal que  $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$  y  $\bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2 = \bar{\Omega}$ . Notamos  $\Gamma$  la frontera ficticia entre  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  ( $\Gamma = \partial\Omega_1 \cap \Omega_2$ ). Notamos  $u_i, i = 1, 2$  las restricciones de  $u$  a  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  respectivamente. Las condiciones de transmisión a través de la frontera  $\Gamma$  toman la forma siguiente :

$$u_1 = u_2$$
$$\sum_{j=1}^d \sigma_{l,j}(u_1) n_j = \sum_{j=1}^d \sigma_{l,j}(u_2) n_j \text{ en } \Gamma$$

donde  $n_j$  es la coordenada  $j$  de la normal al borde  $\Gamma$ ,  $n$ , exterior al dominio  $\Omega_1$ . Estas condiciones representan la continuidad de los desplazamientos y los esfuerzos o tensiones normales en  $\Gamma$ .

Consideramos la forma bilinear siguiente :

$$e(w, v) = \frac{\hat{\mu}}{2} \int_{\Omega} \sum_{j,l=1}^d \left( \frac{\partial}{\partial x_l} w_j + \frac{\partial}{\partial x_j} w_l \right) \left( \frac{\partial}{\partial x_l} v_j + \frac{\partial}{\partial x_j} v_l \right) \\ + \hat{\lambda} \int_{\Omega} \operatorname{div} w \operatorname{div} v$$

en el espacio  $(H_{\Gamma_D}^1(\Omega))^d$ , con

$$H_{\Gamma_D}^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) \text{ tal que } v_{\Gamma_D} = 0\}$$

.

Si suponemos que  $f$ ,  $\varphi_D$  y  $\varphi_N$  pertenecen a  $(L^2(\Omega))^d$  podemos enunciar la formulación débil del problema de elasticidad de la manera siguiente :

$$e(w, v) = (f, v) + (\varphi_N, \nu_{\Gamma_N})_{\Gamma_N} - e(\hat{\varphi}_D, v) \quad \forall v \in (H_{\Gamma_D}^1(\Omega))^d$$

con  $(\varphi, \psi)_{\Gamma_N} = \int_{\Gamma_N} \varphi \cdot \psi \, d\gamma$  y  $\hat{\varphi}_D$  el prolongamiento a todo  $\Omega$  del dato  $\varphi_D$ .

En consecuencia la solución del problema de elasticidad está dada por  $u = w + \hat{\varphi}_D$ .

Gracias a la desigualdad de Korn, se demuestra la existencia y unicidad de la solución.

Así la formulación débil para dos subdominios se puede enunciar de la manera siguiente :

Encontrar  $u_1 \in (V_1)^d$  y  $u_2 \in (V_2)^d$  tal que :

$$e_1(u_1, v_1) = (f_1, v_1)_1 \quad \forall v_1 \in (V_1^0)^d$$

$$u_1 = u_2 \text{ en } \Gamma$$

$$e_2(u_2, v_2) = (f_2, v_2)_2 \quad \forall v_2 \in (V_2^0)^d$$

$$e_2(u_2, \mathcal{R}_2\mu) = (f_2, \mathcal{R}_2\mu)_2 + (f_1, \mathcal{R}_1\mu)_1 - e_1(u_1, \mathcal{R}_1\mu) \quad \forall \mu \in \Lambda^d$$

donde  $\mathcal{R}_i$  es la prolongación de  $\Lambda^d \rightarrow V_i^d$ .

De manera similar al caso del Laplaciano escribimos  $u_i = \mathcal{E}_i \eta_\Gamma + u_i^*$  donde  $\mathcal{E}_i \eta_\Gamma$  es la prolongation "armónica" de  $\eta_\Gamma$  a todo el dominio  $\Omega_i$ , solución de :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_i \eta_\Gamma &\in (V_i)^d \\ e_i(\mathcal{E}_i \eta_\Gamma, v_i) &= 0 \quad \forall v_i \in (V_i^0)^d \\ \mathcal{E}_i \eta_\Gamma &= \eta_\Gamma \text{ en } \Gamma\end{aligned}$$

Por otro lado  $u_i^*$  es definido como la solución de :

$$\begin{aligned}u_i^* &\in (V_i^0)^d \\ e_i(u_i^*, v_i) &= 0 \quad \forall v_i \in (V_i^0)^d\end{aligned}$$

La formulacion de Steklov-Poincaré para dos subdominios puede enunciarse de la manera siguiente : encontrar  $\lambda \in \Lambda$  tal que :

$$S\lambda = \chi$$

con  $S = S_1 + S_2$  y  $\chi = \chi_1 + \chi_2 \in (\Lambda')^d$ .

$$\langle S_i \eta, \mu \rangle = e_i(\mathcal{E}_i \eta, \mathcal{E}_i \mu), \quad \forall \eta, \mu \in (\Lambda)^d$$

$$(\chi_i, \mu) = (f, \mathcal{E}_i \mu) - e_i(u_i^*, \mathcal{E}_i \mu) \quad \forall \mu \in \Lambda^d.$$

Dos tipos de métodos :

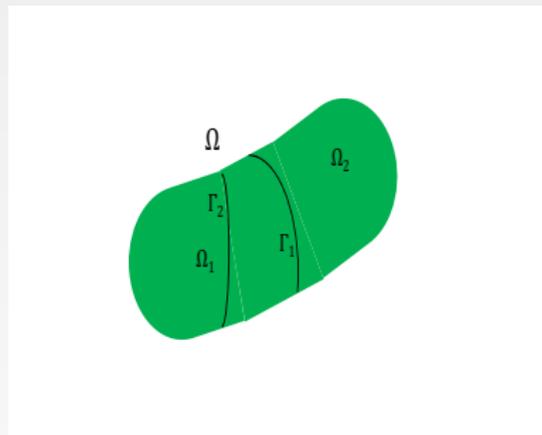


Figure – Con solapado

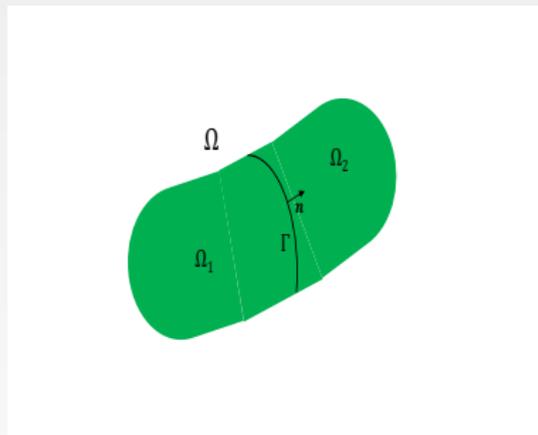


Figure – Sin solapado

Caso sin solapado :

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x) & \text{si } x \in \Omega \\ u(x) = 0 & \text{si } x \in \partial\Omega \end{cases}$$

con  $\partial\Omega$  Lipschitz y  $f \in L^2(\Omega)$ .

$$\begin{cases} -\Delta u_1(x) = f(x) & \text{si } x \in \Omega_1 \\ u_1(x) = 0 & \text{si } x \in \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega \\ u_1(x) = u_2(x) & \text{si } x \in \Gamma \\ \frac{\partial u_2}{\partial \bar{n}} = \frac{\partial u_1}{\partial \bar{n}} & \text{si } x \in \Gamma \\ u_2(x) = 0 & \text{si } x \in \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega \\ -\Delta u_2(x) = f(x) & \text{si } x \in \Omega_2 \end{cases}$$

# Resumen del curso precedente, Operador de Steklov-Poincaré.

Encontrar  $\lambda \in \Lambda$  tal que :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u_1(x) = f(x) & \text{si } x \in \Omega_1 \\ u_1(x) = 0 & \text{si } x \in \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega \\ u_1(x) = \lambda & \text{si } x \in \Gamma \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u_2(x) = f(x) & \text{si } x \in \Omega_2 \\ u_2(x) = 0 & \text{si } x \in \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega \\ u_2(x) = \lambda & \text{si } x \in \Gamma \end{array} \right.$$

$$\text{y} \quad \frac{\partial u_2}{\partial \bar{n}} = \frac{\partial u_1}{\partial \bar{n}} \quad \text{si } x \in \Gamma$$

# Resumen del curso precedente, Operador de Steklov-Poincaré.

Si se definen  $H_i\lambda$ ,  $i = 1, 2$  y  $G_i f$  de la manera siguiente :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta H_i\lambda(x) = 0 & \text{si } x \in \Omega_i \\ H_i\lambda(x) = 0 & \text{si } x \in \partial\Omega_i \cap \partial\Omega \\ H_i\lambda(x) = \lambda & \text{si } x \in \Gamma \end{array} \right. \quad (17)$$

Es decir que  $H_i\lambda$  es el relevamiento armónico de  $\lambda$  en  $\Omega_i$ . Por otro lado :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta G_i f(x) = f(x) & \text{si } x \in \Omega_i \\ G_i f(x) = 0 & \text{si } x \in \partial\Omega_i \cap \partial\Omega \\ G_i f(x) = 0 & \text{si } x \in \Gamma \end{array} \right. \quad (18)$$

Entonces tenemos que :

$$\frac{\partial H_1\lambda}{\partial n} - \frac{\partial H_2\lambda}{\partial n} = \frac{\partial G_2 f}{\partial n} - \frac{\partial G_1 f}{\partial n}$$

# Resumen del curso precedente, Operador de Steklov-Poincaré.

Es decir el meta algoritmo que obtenemos es el siguiente :  
Calcular  $\lambda$  talque :

$$S\lambda = \chi$$

con

$$S = S_1 - S_2,$$

$$S_i\lambda = \frac{\partial H_i \lambda}{\partial n},$$

$i = 1, 2$ , el operador de Steklov-Poincaré.

El segundo miembro  $\chi$  es dado por :

$$\chi = \frac{\partial G_2 f}{\partial \bar{n}} - \frac{\partial G_1 f}{\partial \bar{n}}$$

# Resumen del curso precedente, Operador de Steklov-Poincaré.

Calcular  $\lambda$  tal que :

$$\langle S\lambda, \mu \rangle = \langle \chi, \mu \rangle \quad (19)$$

donde :

$$\langle S\lambda, \mu \rangle = \sum_{i=1}^2 a_i(H_i\lambda, H_i\mu) \quad (20)$$

$H_i\lambda$  es solución de :

$$\left\{ \begin{array}{l} H_i\lambda \in V_i \\ a_i(H_i\lambda, v_i) = 0 \quad \forall v_i \in V_i^0 \\ H_i\lambda = \lambda \text{ en } \Gamma \end{array} \right.$$

El segundo miembro de la ecuación es dado por :

$$\langle \chi, \mu \rangle = \sum_{i=1}^2 ((f, H_i \mu) - a_i(G_i f, H_i \mu)) \quad (21)$$

donde  $G_i f$  es la solución de :

$$\left\{ \begin{array}{l} G_i f \in V_i^0 \\ a_i(G_i f, v_i) = f \quad \forall v_i \in V_i^0 \\ G_i f = 0 \text{ en } \partial\Omega_i \end{array} \right.$$

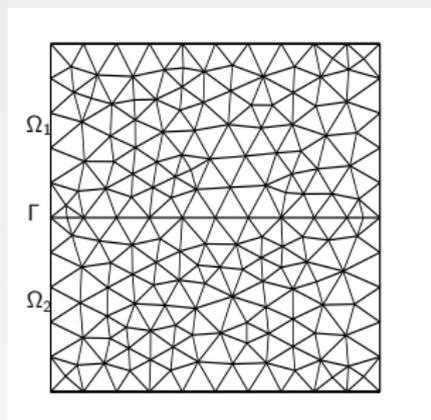


Figure – Malla en dos subdominios

$V_h = \{v_h : v_h \in C^0(\Omega), \text{ y } v_T \in \mathbb{P}_1(T), \forall T \in \mathcal{T}_h(\Omega)\}$  y  
 $X_h = V_h \cap H_0^1(\Omega)$ . Anotamos  $x_j^{(i)}, 1 \leq j \leq N_i$  los nodos de interpolación de  $\Omega_i$   $i = 1, 2$  y  $x_j^{(\Gamma)}, 1 \leq j \leq N_\Gamma$  los nodos de interpolación de  $\Gamma$ . Las funciones de base de  $X_h$  son anotadas en consecuencia :  $\varphi_j^{(i)}$  las funciones asociadas a los nodos  $x_j^{(i)}$  y  $\varphi_j^{(\Gamma)}$  las funciones asociadas a los nodos  $x_j^{(\Gamma)}$ .

Si consideramos el problema test :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Si ordenamos los índices de manera adecuada, sistema discreto puede formularse de la manera siguiente :

$$A_{11}U_1 + A_{1\Gamma}\lambda = F_1$$

$$A_{22}U_2 + A_{2\Gamma}\lambda = F_2$$

$$A_{\Gamma 1}U_1 + A_{\Gamma 2}U_2 + (A_{\Gamma\Gamma}^{(1)} + A_{\Gamma\Gamma}^{(2)})\lambda = F_1^\Gamma + F_2^\Gamma$$

Donde  $U_1$  es el vector de incógnitas en  $\Omega_1$ ,  $U_2$  es el vector de incógnitas en  $\Omega_2$  y  $\lambda$  es el vector de incógnitas en  $\Gamma$ .

Dicho de otra manera,  $U$  es solución del sistema lineal :

$$\begin{bmatrix} A_{11} & 0 & A_{1\Gamma} \\ 0 & A_{22} & A_{2\Gamma} \\ A_{\Gamma 1} & A_{\Gamma 2} & A_{\Gamma\Gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_\Gamma \end{bmatrix}$$

donde  $A_{\Gamma\Gamma} = (A_{\Gamma\Gamma}^{(1)} + A_{\Gamma\Gamma}^{(2)})$  y  $F_\Gamma = F_1^\Gamma + F_2^\Gamma$ .

Una sustitución de Gauss por bloques nos da :

$$U_1 = A_{11}^{-1}(F_1 - A_{1\Gamma}\lambda), \text{ y } U_2 = A_{22}^{-1}(F_2 - A_{2\Gamma}\lambda).$$

reemplazando en la ultima ecuación obtenemos :

$$(A_{\Gamma\Gamma} - A_{\Gamma 1}A_{11}^{-1}A_{1\Gamma} - A_{\Gamma 2}A_{22}^{-1}A_{2\Gamma})\lambda = F_{\Gamma} + A_{\Gamma 1}A_{11}^{-1}F_1 + A_{\Gamma 2}A_{22}^{-1}F_2.$$

Podemos ahora notar

$$\sum_h = (A_{\Gamma\Gamma} - A_{\Gamma 1}A_{11}^{-1}A_{1\Gamma} - A_{\Gamma 2}A_{22}^{-1}A_{2\Gamma})$$

la matriz complemento de Schur y

$$\chi_{\Gamma} = f_{\Gamma} + A_{\Gamma 1}A_{11}^{-1}F_1 + A_{\Gamma 2}A_{22}^{-1}F_2$$

.

Obtenemos así el sistema lineal complemento de Schur siguiente :

$$\Sigma_h u_\Gamma = \chi_\Gamma$$

que es la versión algebraica del sistema de Stelov-Poincaré.

Si descomponemos  $A_{\Gamma\Gamma} = A_{\Gamma\Gamma}^{(1)} + A_{\Gamma\Gamma}^{(2)}$ , podemos decir que :

$$\Sigma_h = \Sigma_{1,h} + \Sigma_{2,h}.$$

donde :

$$\Sigma_{i,h} = A_{\Gamma\Gamma}^{(i)} - A_{\Gamma i} A_{ii}^{-1} A_{i\Gamma}, \quad i = 1, 2.$$

Estas matrices son densas, simétricas y definidas positivas (versión discreta de la elasticidad). Cuando el número de incógnitas es pequeño y podemos calcular el complemento de Schur el método es llamado de condensación estática. Sino, en general, para resolver el sistema lineal se utiliza el método del Gradiente Conjugado.

Si aplicamos un método iterativo a la resolución de este sistema lineal, por ejemplo el gradiente conjugado estaremos obligados de calcular :

$$\Sigma_h \lambda$$

es decir :

$$(A_{\Gamma\Gamma} - A_{\Gamma 1} A_{11}^{-1} A_{1\Gamma} - A_{\Gamma 2} A_{22}^{-1} A_{2\Gamma}) \lambda$$

y en particular :

$$w = A_{11}^{-1} A_{1\Gamma} \lambda$$

haremos en la practica :

$$A_{11} w = A_{1\Gamma} \lambda$$

que no es otra cosa que calcular :

$$H_1 \lambda$$

Es decir que a cada iteración  $\lambda^k$  de un método del Gradiente conjugado o Richardson tendremos que calcular :

$$H_i \lambda, i = 1, 2$$

es decir resolver :

$$A_{ii} w_i = A_{i\Gamma} \lambda^k, i = 1, 2$$

y al inicio calcular :

$$g_i = A_{ii}^{-1} F_i$$

es decir resolver :

$$A_{ii} G_i f = F_i$$

Consideremos el problema test y elemental de Poisson :

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x) & \text{si } x \in \Omega \\ u(x) = 0 & \text{si } x \in \partial\Omega \end{cases}$$

con  $\Omega$  un dominio abierto, acotado y Lipschitz. la función  $f \in L^2(\Omega)$ .

Consideramos una descomposición en dos sub dominios  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  tal que  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$  y  $\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$ .

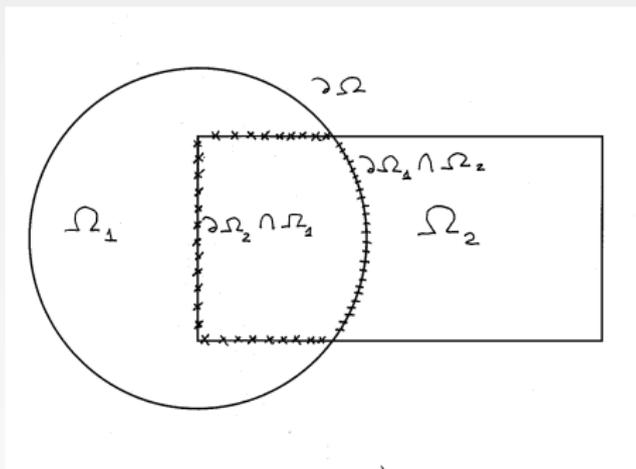


Figure – descomposición en dos sub dominios.

Si  $u_1^0 = u^0|_{\Omega_1}$ , para  $k = 0, \dots$ , convergencia

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u_1^{k+1}(x) = f(x) & \text{si } x \in \Omega_1 \\ u_1^{k+1}(x) = u_2^k & \text{si } x \in \partial\Omega_1 \cap \Omega_2 \\ u_1^{k+1}(x) = 0 & \text{si } x \in \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega \end{array} \right.$$

y

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u_2^{k+1}(x) = f(x) & \text{si } x \in \Omega_2 \\ u_2^{k+1}(x) = u_1^{k+1} & \text{si } x \in \partial\Omega_2 \cap \Omega_1 \\ u_2^{k+1}(x) = 0 & \text{si } x \in \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega \end{array} \right.$$

Se demuestra que las secuencias  $\{u_1^k\}_k$  y  $\{u_2^k\}_k$  convergen a  $u_1 = u|_{\Omega_1}$  y  $u_2 = u|_{\Omega_2}$ .

# Método de Schwarz, alternativo, multiplicativo

- Sea  $w_1 = 0$ . Para  $k = 1, \dots$  convergencia, calcular  $u_1^k$  solución de

$$\Delta u_1^k = f_1, \text{ en } \Omega_1$$

$$(u_1^k)_{\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega} = g_1 \text{ en } \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega$$

$$(u_1^k)_{\Gamma_1} = w_1^{k-1}$$

$w_2^k = I_{1,2} u_1^k$  (la traza de  $u_1^k$  en  $\Gamma_2$ )

calcular  $u_2^k$  solución de

$$\Delta u_2^k = f_2, \text{ en } \Omega_2$$

$$(u_2^k)_{\partial\Omega_2 \cap \partial\Omega} = g_2 \text{ en } \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega$$

$$(u_2^k)_{\Gamma_1} = w_2^k$$

$w_1^k = I_{2,1} u_2^k$  (la traza de  $u_2^k$  en  $\Gamma_1$ )

Si  $\|w_1^k - w_1^{k-1}\| \leq \text{tol}_\Gamma$  y  $\|w_2^k - w_2^{k-1}\| \leq \text{tol}_\Gamma$  Stop

Si  $\|u_1^k - u_1^{k-1}\| \leq \text{tol}_{\Omega_1}$  y  $\|u_2^k - u_2^{k-1}\| \leq \text{tol}_{\Omega_2}$  Stop

endPara

- $u = u_1^k$  en  $\Omega_1$ ,  $u = u_2^k$  en  $\Omega \setminus \Omega_1$ .

Dados  $u_1^0 = u^0|_{\Omega_1}$  y  $u_2^0 = u^0|_{\Omega_2}$ , para  $k = 0, \dots$ , convergencia vamos a construir dos secuencias  $\{u_1^k\}_k$  y  $\{u_2^k\}_k$  que resolverán los problemas siguientes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u_1^{k+1}(x) = f(x) & \text{si } x \in \Omega_1 \\ u_1^{k+1}(x) = u_2^k & \text{si } x \in \partial\Omega_1 \cap \Omega_2 \\ u_1^{k+1}(x) = 0 & \text{si } x \in \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega \end{array} \right.$$

y

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u_2^{k+1}(x) = f(x) & \text{si } x \in \Omega_2 \\ u_2^{k+1}(x) = u_1^k & \text{si } x \in \partial\Omega_2 \cap \Omega_1 \\ u_2^{k+1}(x) = 0 & \text{si } x \in \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega \end{array} \right.$$

en este algoritmo está claro que los dos problemas son desacoplados y pueden ser resueltos en paralelo.

# Método de Schwarz, paralelo, aditivo

- Sea  $w_1^0 = 0$  y  $w_2^0 = 0$ . Para  $k = 1, \dots$  convergencia, calcular  $u_1^k$  solución de

$$\begin{aligned}\Delta u_1^k &= f_1, \text{ en } \Omega_1 \\ (u_1^k)_{\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega} &= g_1 \text{ en } \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega \\ (u_1^k)_{\Gamma_1} &= w_1^{k-1}\end{aligned}$$

calcular  $u_2^k$  solución de

$$\begin{aligned}\Delta u_2^k &= f_2, \text{ en } \Omega_2 \\ (u_2^k)_{\partial\Omega_2 \cap \partial\Omega} &= g_2 \text{ en } \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega \\ (u_2^k)_{\Gamma_1} &= w_2^{k-1}\end{aligned}$$

$w_2^k = l_{1,2} u_1^k$  (la traza de  $u_1^k$  en  $\Gamma_2$ )

$w_1^k = l_{2,1} u_2^k$  (la traza de  $u_2^k$  en  $\Gamma_1$ )

Si  $\|w_1^k - w_1^{k-1}\| \leq tol_\Gamma$  y  $\|w_2^k - w_2^{k-1}\| \leq tol_\Gamma$  Stop

Si  $\|u_1^k - u_1^{k-1}\| \leq tol_{\Omega_1}$  y  $\|u_2^k - u_2^{k-1}\| \leq tol_{\Omega_2}$  Stop

endPara

- $u = u_1^k$  en  $\Omega_1$ ,  $u = u_2^k$  en  $\Omega \setminus \Omega_1$ .

Recuerden que la formulación débil del problema monodominio test es la siguiente, encontrar  $u \in V = H_0^1(\Omega)$  tal que :

$$a(u, v) = (f, v), \quad \forall v \in V$$

donde :

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx$$

Definimos sobre cada subdominio las formas bilineales siguientes :

$$a_i(u, v) = \int_{\Omega_i} \nabla u \nabla v dx$$

definidas en  $V_i^0 = H_0^1(\Omega_i)$ ,  $i = 1, 2$  y

$$V_i^* = \{v \in V \mid v = 0 \text{ in } \Omega \setminus \bar{\Omega}_i\}.$$

Supongamos conocer  $u^0 \in V$ , para cada  $k \geq 0$  :

Vamos a calcular  $w_1^k \in V_1^0$  la solución de la ecuación :

$$a_1(w_1^k, v_1) = (f, v_1)_1 - a_1(u^k, v_1) \quad \forall v_1 \in V_1^0 \quad (22)$$

a continuación definimos la prolongación por zero de  $w_1^k$  a todo  $\Omega$ ,  $\tilde{w}_1^k$  y entonces notamos

$$u^{k+1/2} = u^k + \tilde{w}_1^k. \quad (23)$$

es decir :

$$u^{k+1/2}(x) = \begin{cases} u_1^{k+1}(x) & \text{si } x \in \Omega_1 \\ u_2^k(x) & \text{si } x \in \Omega \setminus \Omega_1 \end{cases} \quad (24)$$

Luego calculamos  $w_2^k \in V_2^0$  tal que :

$$a_2(w_2^k, v_2) = (f, v_2)_2 - a_2(u^{k+1/2}, v_2) \quad \forall v_2 \in V_2^0 \quad (25)$$

Prolongando por zero  $w_2^k$  a todo  $\Omega$ , se obtiene  $\tilde{w}_2^k$  y entonces la iteración siguiente :

$$u^{k+1} = u^{k+1/2} + \tilde{w}_2^k. \quad (26)$$

es decir que

$$u^{k+1}(x) = \begin{cases} u_2^{k+1}(x) & \text{si } x \in \Omega_2 \\ u_1^{k+1}(x) & \text{si } x \in \Omega \setminus \Omega_2 \end{cases} \quad (27)$$

En el caso de la formulación aditiva tenemos una formulación similar : calcular  $w_1^k \in V_1^0$  la solución de la ecuación :

$$a_1(w_1^k, v_1) = (f, v_1)_1 - a_1(u^k, v_1) \quad \forall v_1 \in V_1^0 \quad (28)$$

y en paralelo podemos calcular  $w_2^k \in V_2^0$  tal que :

$$a_2(w_2^k, v_2) = (f, v_2)_2 - a_2(u^k, v_2) \quad \forall v_2 \in V_2^0 \quad (29)$$

la nueva iteración está definida por :

$$u^{k+1} = u^k + \tilde{w}_1^k + \tilde{w}_2^k \quad (30)$$

Entonces :

$$u^{k+1}(x) = \begin{cases} u_1^{k+1}(x) & \text{si } x \in \Omega \setminus \Omega_2 \\ u_1^{k+1}(x) + u_2^{k+1}(x) - u^k(x) & \text{si } x \in \Omega_1 \cap \Omega_2 \\ u_2^{k+1}(x) & \text{si } x \in \Omega \setminus \Omega_1 \end{cases} \quad (31)$$

Las dos formulaciones, multiplicativa y aditiva pueden conducir a la versión discretizada por elementos finitos.

## Método de Schwarz, generalización

Lo expuesto en las secciones precedentes se aplican a todo operador elíptico  $L$ , es decir podemos remplazar  $\Delta$  por  $L$  en todas las deducciones. Se puede considerar la ecuación :

$$\begin{cases} -L u(x) = f(x) & \text{si } x \in \Omega \\ u(x) = 0 & \text{si } x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (32)$$

Donde  $L$  es un operador elíptico y simétrico dado por :

$$Lu = - \sum_{l,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_l} (a_{l,j} \frac{\partial u}{\partial x_j}) + a_0 u \quad (33)$$

los coeficientes  $a_{l,j}$  y  $a_0$  son funciones de  $L^\infty(\Omega)$ . Por simetría entendemos que  $a_{l,j}(x) = a_{j,l}(x)$ ,  $\forall x \in \Omega$ ,  $i, j = 1, \dots, d$  y por elipticidad, que existe  $\alpha_0 > 0$  tal que :

$$\sum_{l,j=1}^d a_{l,j}(x) \zeta_l \zeta_j \geq \alpha_0 |\zeta|^2, \forall \zeta \in \mathbb{R}^d, x \in \Omega \quad (34)$$

y  $a_0(x) \geq 0$ ,  $\forall x \in \Omega$ .

# Método de Schwarz, generalización

la forma bilineal asociada es :

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \left( \sum_{l,j=1}^d a_{l,j} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_l} \right) + a_0 u v dx \quad (35)$$

Esta forma es bilineal, simétrica, continua y elíptica sobre  $H_0^1(\Omega)$ .  
En la formulación multidominios cambian un poco las condiciones de transmisión :

$$u_1 = u_2 \text{ en } \Gamma \quad (36)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial n_L} = \frac{\partial u_2}{\partial n_L} \quad (37)$$

donde la derivada normal  $\frac{\partial}{\partial n_L}$  es definida por :

$$\frac{\partial v}{\partial n_L} = \sum_{l,j=1}^d a_{l,j} \frac{\partial v}{\partial x_j} n_l \quad (38)$$

# Método de Schwarz aditivo, generalización

Supongamos una descomposición de  $\Omega$  en  $m$  subdominios con solapamiento, es decir  $\Omega_i, i = 1, \dots, m$  tales que  $\Omega = \cup_{i=1}^m \Omega_i$ , anotamos  $\Gamma_i = \partial\Omega_i \cap \Omega$  y  $\Gamma = \cup_{i=1}^m \Gamma_i$ .

- Sea  $w^0 = 0$ . Para1  $k = 1, \dots$  convergencia,
- Para2  $l = 1, \dots, m$  calcular  $u_l^k$  solución de

$$\begin{aligned}\Delta u_l^k &= f_l, \text{ en } \Omega_i \\ (u_l^k)_{\partial\Omega_i \cap \partial\Omega} &= 0 \text{ en } \partial\Omega_i \cap \partial\Omega \\ (u_l^k)_{\Gamma_i} &= w^{k-1} \text{ en } \partial\Omega_i \cap \Omega.\end{aligned}$$

endPara2

$$u^k = u_l^k \text{ en } \Omega_l, l = 1, \dots, m-1 \text{ y } u^k = u_m^k \text{ en } \Omega \setminus \cup_{i=1}^{m-1} \Omega_i$$

$$w^k = I_\Gamma u^k \text{ (la traza de } u^k \text{ en } \Gamma)$$

Si  $\|w^k - w^{k-1}\| \leq \text{tol}_\Gamma$  Stop

Si  $\|u_l^k - u_l^{k-1}\| \leq \text{tol}_{\Omega_l}, l = 1, \dots, m$  Stop

endPara1

- $u = u_l^k$  en  $\Omega_l, l = 1, \dots, m-1$  y  $u^k = u_m^k \text{ en } \Omega \setminus \cup_{i=1}^{m-1} \Omega_i$ .

Consideremos ahora una partición del conjunto de índices  $\{1, \dots, m\}$ ,  $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_s$  tal que :

$$i, j \in \mathcal{C}_k, \text{ con } i \neq j \rightarrow \Omega_i \cap \Omega_j = \phi$$

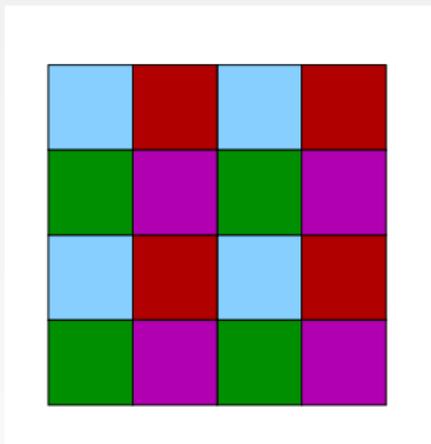


Figure – Descomposición en colores

Dato inicial  $w$

- 1) Para  $k = 0, \dots$ , hasta la convergencia
- 2) Para  $l = 1, \dots, s$
- 3) Resolver para cada  $i \in \mathcal{C}_l$

$$\begin{cases} -\Delta u^{k+i/m} = f \text{ en } \Omega_i \\ u^{k+i/m} = w \text{ en } \partial\Omega_i \cap \Omega \\ u^{k+i/m} = 0, \text{ en } \partial\Omega_i \cap \partial\Omega \end{cases}$$

```
w = u^{k+i/m}
fin loop en i
fin loop en l
u^{k+1} = w
fin loop en k
```

La idea es de elegir la menor cantidad de colores posible.

Consideremos el problema elemental siguiente :

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), & \text{con } x \in (0, 1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

y una discretización en  $N$  puntos de paso  $h$ ,  $0 \leq x_i \leq 1$ ,  
 $i = 1, \dots, N$ ,  $h = x_i - x_{i-1}$ ,  $x_1 = 0$ ,  $x_i = x_{i-1} + h$ .

La formulación variacional es la siguiente : encontrar  $u \in H_0^1((0, 1))$   
tal que :

$$\int_0^1 \nabla u(x) \nabla v(x) dx = \int_0^1 f(x) v(x) dx$$

Su aproximación por un método de elementos finitos  $\mathbb{P}_1$  es :  
encontrar  $u_h \in V_h$  tal que :

$$\int_0^1 \nabla u_h(x) \nabla v_h(x) dx = \int_0^1 f(x) v_h(x) dx$$

donde

$V_h = \{v_h \in C^0(0, 1) | v_h|_{[x_i, x_{i+1}]} \in P_1([x_i, x_{i+1}])\} \cap H_0^1((0, 1))$ .  $V_h$  es un espacio de dimensión finita, generado por la base

$\phi_j, j = 1, \dots, N$

Así todo elemento de  $V_h$  puede expresarse como una combinación lineal de la base :

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^N u_j \phi_j(x), \text{ con } u_h(x_j) = u_j$$

# Método de Schwarz discretización, cas 1d

Sea  $U_h = (u_2, \dots, u_{N-1}) \in \mathbb{R}^{N-2}$ , los valores de  $u_1 = u_N = 0$  son datos. El vector  $U_h$  es la solución del sistema lineal :

$$AU_h = f_h$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \dots & & A_{11} & & & & | & & & & \\ & & & & - & - & - & - & | & - & - & - & \\ 0 & 0 & 0 & -1 & | & 2 & -1 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & -1 & 2 & -1 & | & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & -1 & 2 & | & -1 & 0 & 0 & \\ - & - & - & - & | & - & - & - & | & - & & & \\ & & \dots & & & & & & | & & & & \\ & & & & & & & & | & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & \dots & 0 & | & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & \dots & 0 & | & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

y  $f_h = \{f_2, \dots, f_{N-1}\}^t$  con :

$$f_i = h \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x) \phi_i(x) dx$$

Consideremos ahora una descomposición de  $\Omega = (0, 1)$  en dos subdominios  $\Omega_1 = (0, x_\gamma)$  y  $\Omega_2 = (x_\beta, 1)$

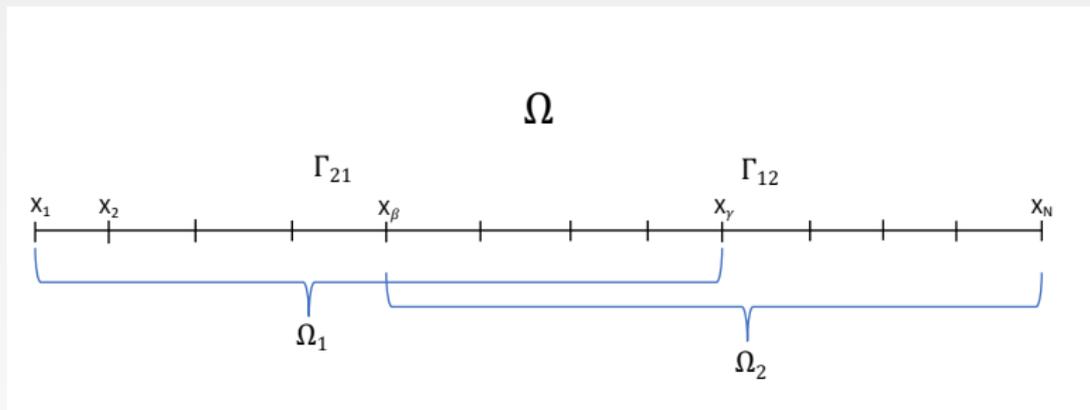


Figure – descomposición en dos sub dominios.

El método multiplicativo de Schwarz se puede entonces formular de la manera siguiente : dado  $u_2^0 = (u_\beta^0, \dots, u_N^0)$  calcularemos la secuencia :

$$A_{11}u_1^{n+1} = f_1 - A_{12}u_2^n \quad (39)$$

$$A_{22}u_2^{n+1} = f_2 - A_{21}u_1^{n+1} \quad (40)$$

donde  $f_1 = (f(x_1), \dots, f(x_\gamma))$ ,  $f_2 = (f(x_\beta), \dots, f(x_N))$ .

La matriz  $A_{12}$  es una matriz llena de ceros salvo para el coeficiente correspondiente al dato  $u_1(x_\gamma) = u_2(x_\gamma)$ .

La matriz  $A_{21}$  es una matriz llena de ceros salvo para el coeficiente correspondiente al dato  $u_2(x_\beta) = u_1(x_\beta)$ .

# Método de Schwarz discretización, cas 1d

En el caso de una descomposición en  $m$  subdominios :

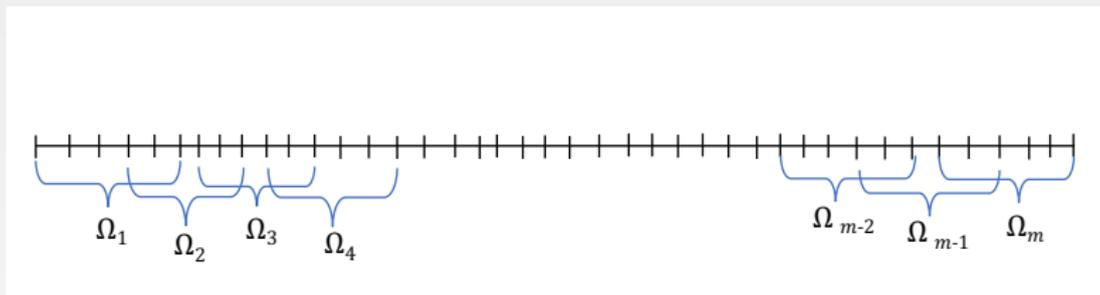


Figure – descomposición en  $m$  sub dominios.

Por  $j = 1, \dots, m$  debemos resolver :

$$A_{jj}u_j^{n+1} = f_j - \sum_{k=1}^{j-1} A_{jk}u_k^{n+1} - \sum_{k=j+1}^m A_{jk}u_k^n.$$

donde  $A_{jk}$  corresponde a la matriz de interfaz en  $\Gamma_{j,k}$ .

# Método de Schwarz discretización, cas 1d

Si ahora definimos las matrices de restricción  $R_1 : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{N_1}$ ,  
 $R_2 : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{N_2}$  :

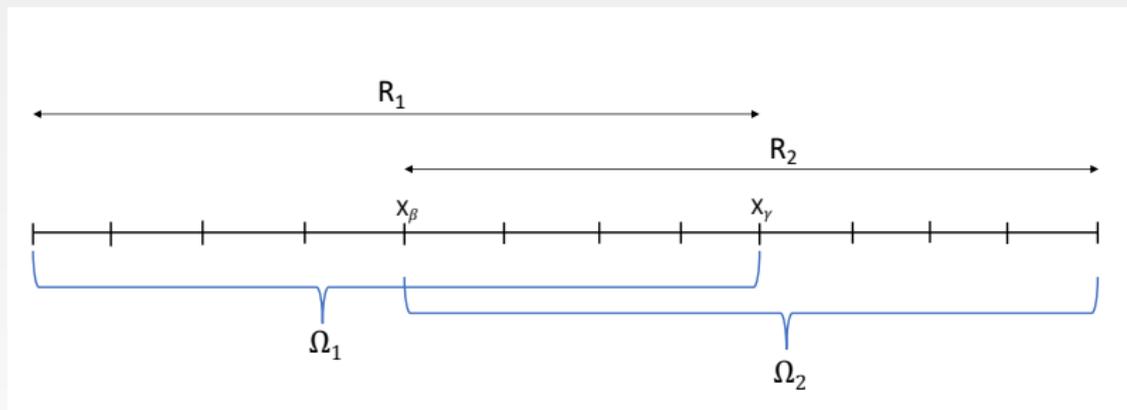


Figure – descomposición en dos sub dominios.

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

y

$$R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Verificamos inmediatamente que :

$$A_{jj} = R_j A R_j^T, j = 1, 2. \quad (41)$$

Asi para el caso multiplicativo las ecuaciones se escriben :

$$u^{n+1/2} = u^n + R_1^T A_1^{-1} R_1 (f - Au^n) \quad (42)$$

$$u^{n+1} = u^{n+1/2} + R_2^T A_2^{-1} R_2 (f - Au^n) \quad (43)$$

donde  $f - Au^n$  es el residuo a la iteración  $n$ .

Un calculo inmediato da :

$$u^{n+1} = u^n + (R_1^T A_{11}^{-1} R_1 + R_2^T A_{22}^{-1} R_2)(f - Au^n).$$

Se puede ver esta expresión como un método de Richardson preconditionado para resolver el problema  $Au = f$ .

En el caso de una descomposición en multi-dominios el método multiplicativo puede enunciarse de la manera siguiente :

Para  $i = 1, \dots, m$

$$u^{n+i/m} = u^{n+(i-1)/m} + R_i^T A_{ii}^{-1} R_i (f - Au^{n+(i-1)/m}).$$

Podemos aqui aplicar un algoritmo muulticolor.

Es un método de punto fijo para resolver :

$$AU = F \text{ con } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

Definimos una descomposición  $A = M - N$  y :

$$MU^{n+1} = NU^n + F$$

Podemos elegir las matrices  $M$  y  $N$ ;

$$M = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \text{ y } N = \begin{bmatrix} 0 & -A_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Obtenemos el método de Gauss Seidel por bloques.

Que se puede escribir :

$$U_1^{n+1} = U_1^n + A_{11}^{-1}(F_1 - A_{11}U_1^n - A_{12}U_2^n)$$

$$U_2^{n+1} = U_2^{n+1/2} + A_{22}^{-1}(F_2 - A_{22}U_1^{n+1} - A_{22}U_2^n)$$

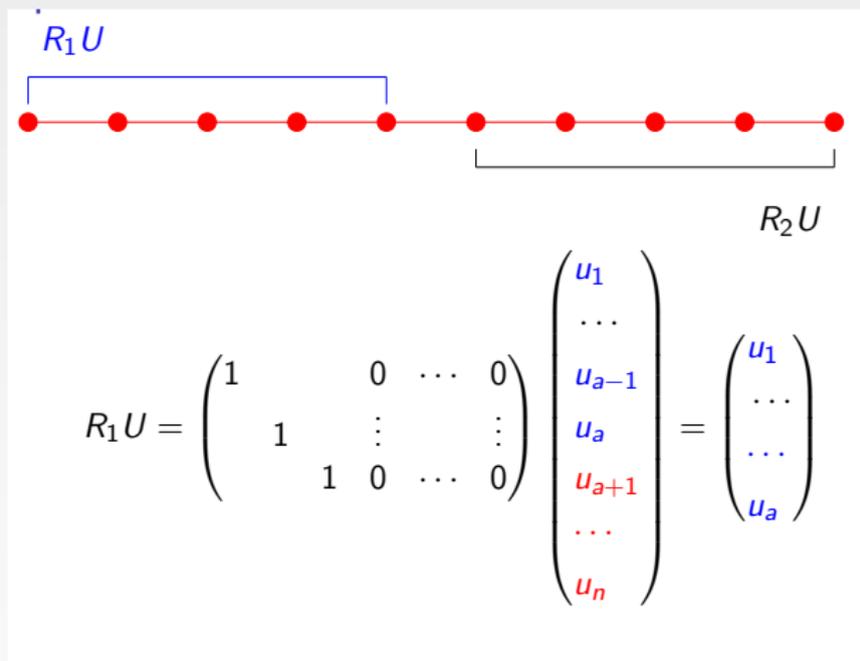


Figure – Operadores de restricción

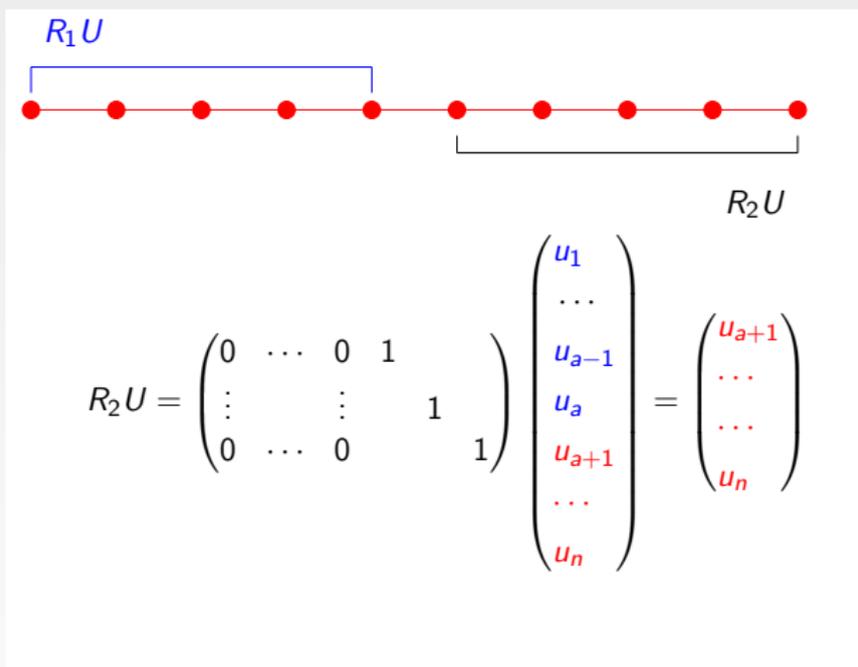


Figure – Operadores de restricción

Entonces la iteración :

$$U_1^{n+1} = U_1^n + A_{11}^{-1}(F_1 - A_{11}U_1^n - A_{12}U_2^n)$$

$$U_2^{n+1} = U_2^{n+1/2} + A_{22}^{-1}(F_2 - A_{22}U_1^{n+1} - A_{22}U_2^n)$$

se puede escribir :

$$U^{n+1/2} = U^n + R_1^t A_{11}^{-1} R_1 (F - AU^n)$$

$$U^{n+1} = U^{n+1/2} + R_2^t A_{22}^{-1} R_2 (F - AU^{n+1/2})$$

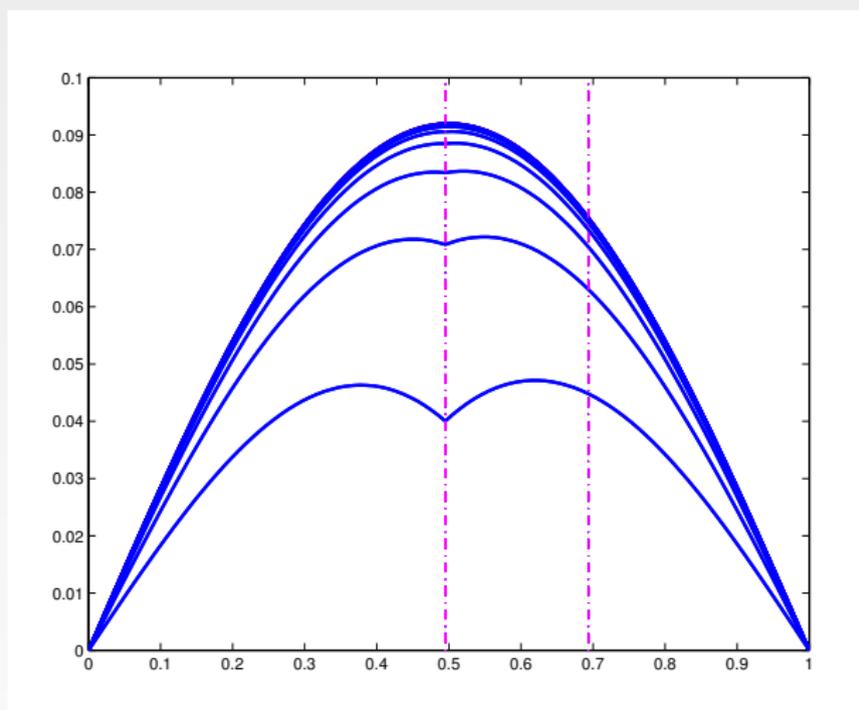


Figure – Gauss Seidel una dimensión

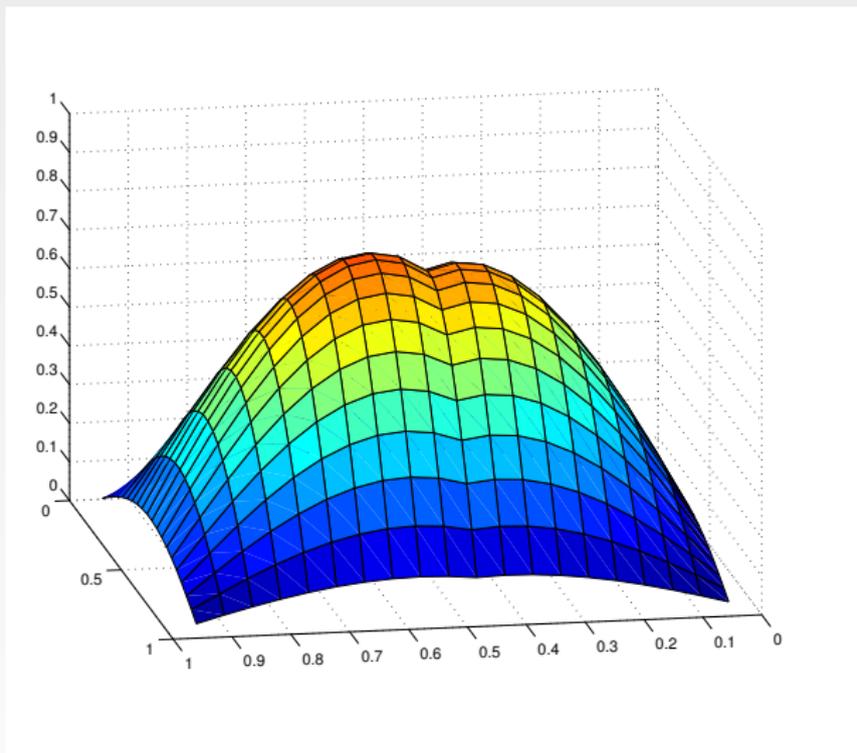


Figure – Gauss Seidel dos dimensiones

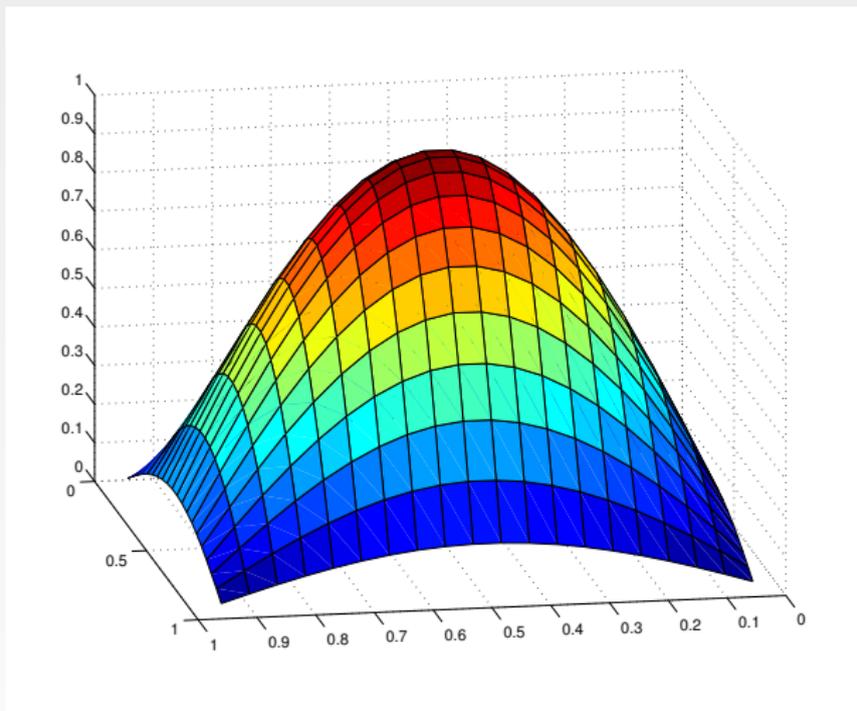


Figure – Gauss Seidel dos dimensiones

Si ahora elejimos :

$$M = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \text{ y } N = \begin{bmatrix} 0 & -A_{12} \\ -A_{21} & 0 \end{bmatrix}$$

Obtenemos el algoritmo de Jacobi :

$$U^{n+1} = U^n + \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{bmatrix} (F - AU^n)$$

Utilizando los operadores de restricción, podemos escribir :

$$U^{n+1} = U^n + (R_1^t A_{11}^{-1} R_1 + R_2^t A_{22}^{-1} R_2)(F - AU^n)$$

Pero este algoritmo sin solapamiento no converge !

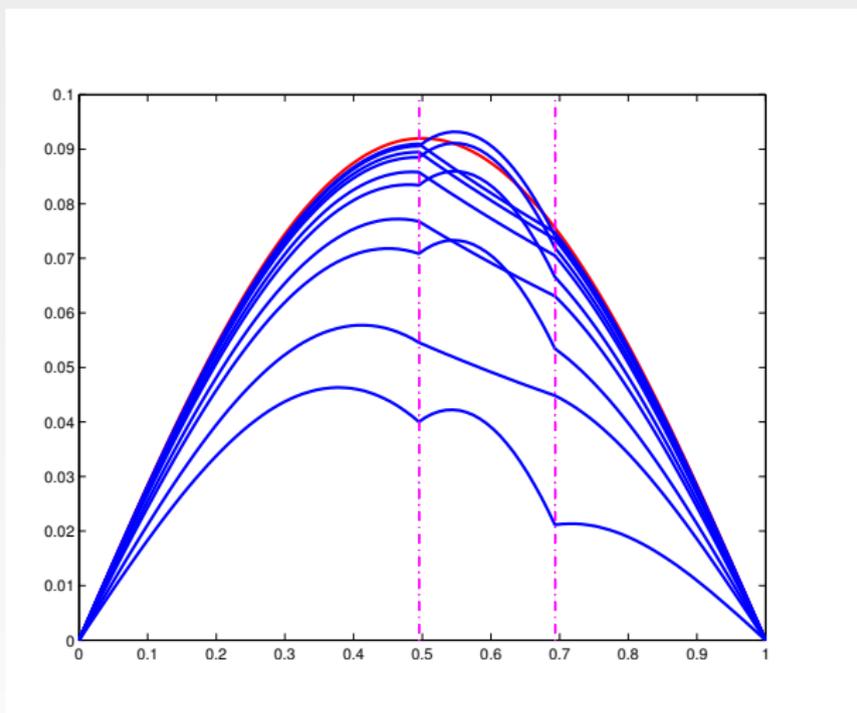


Figure – Jacobi una dimensión sin solapamiento

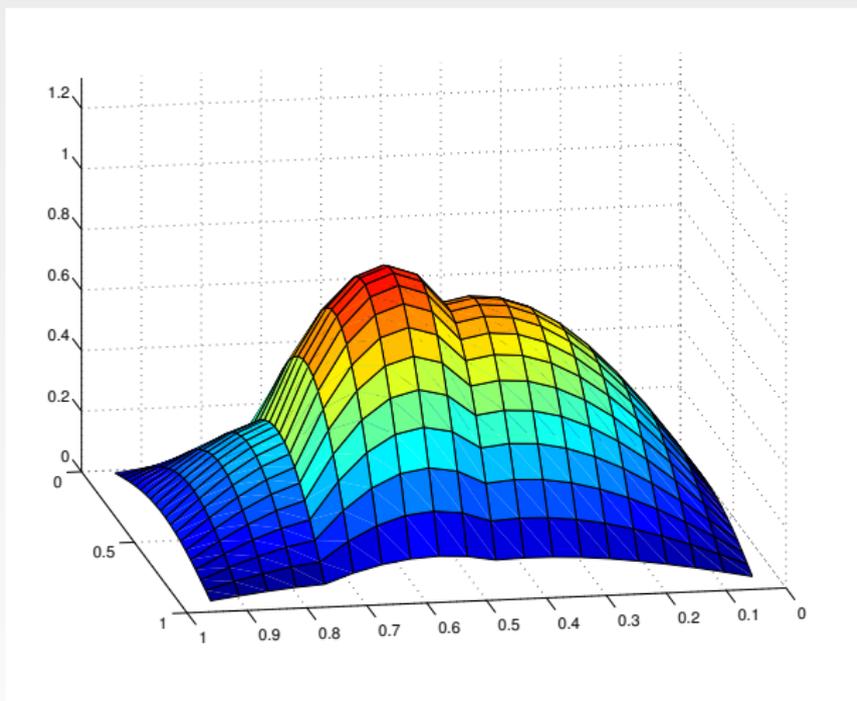


Figure – Jacobi dos dimensiones con solapamiento

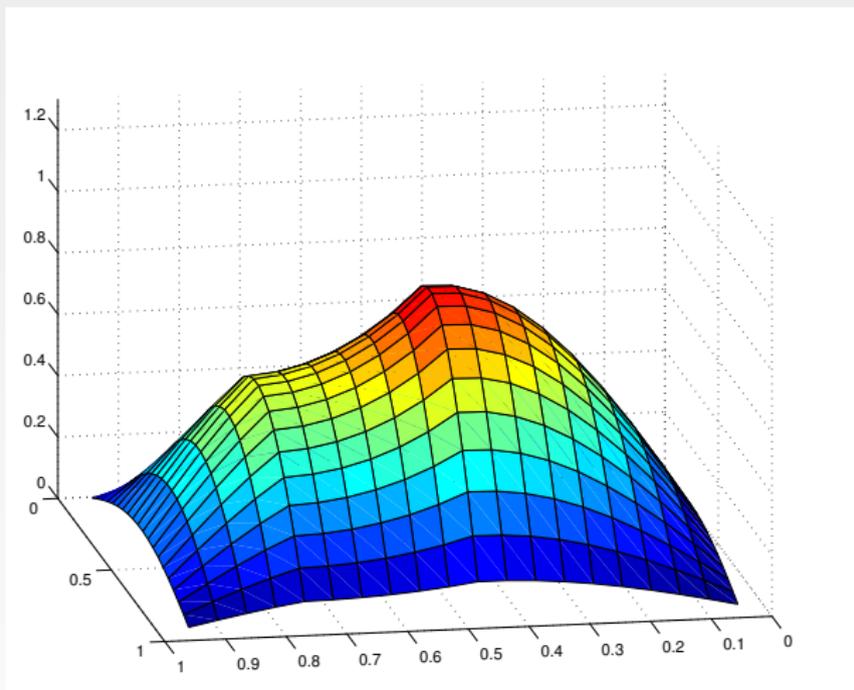


Figure – Jacobi dos dimensiones con solapamiento

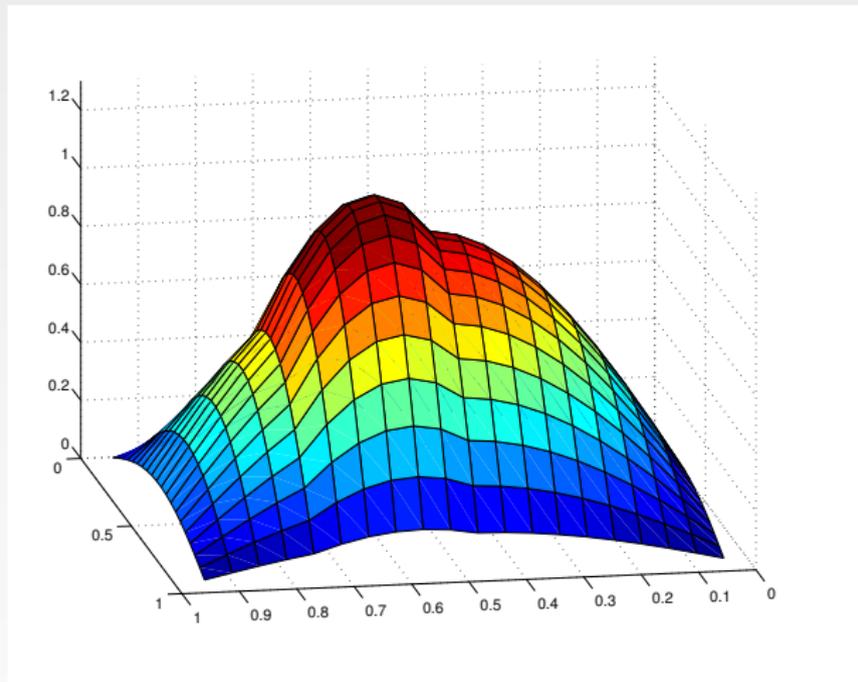


Figure – Jacobi dos dimensiones son solapamiento

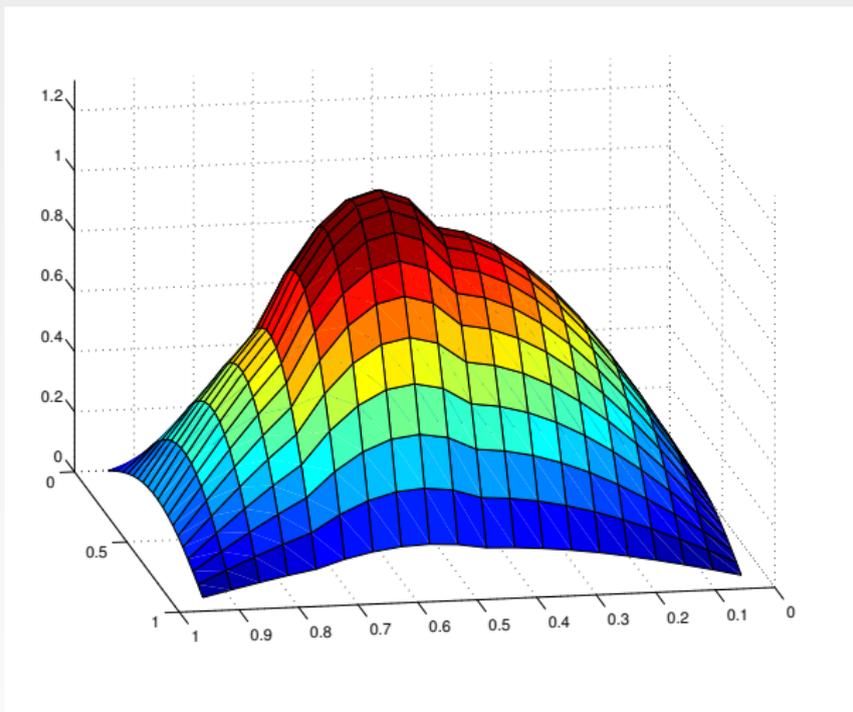


Figure – Jacobi dos dimensiones son solapamiento

RAS = Restricted Additive Schwarz

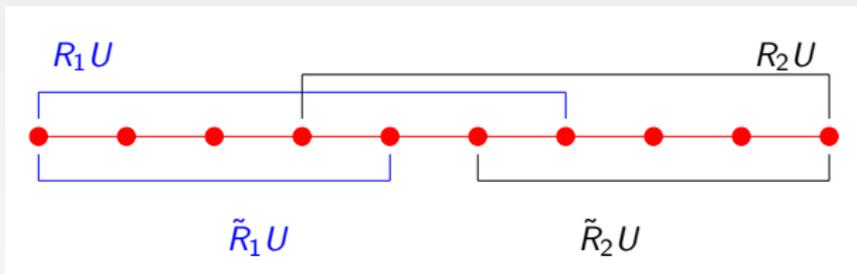


Figure – Operadores de restricción

## Schwarz aditivo

$$U^{n+1} = U^n + (R_1^t A_{11}^{-1} R_1 + R_2^t A_{22}^{-1} R_2)(F - AU^n)$$

## Restricted Additive Schwarz(RAS)

$$U^{n+1} = U^n + (\tilde{R}_1^t A_{11}^{-1} R_1 + \tilde{R}_2^t A_{22}^{-1} R_2)(F - AU^n)$$

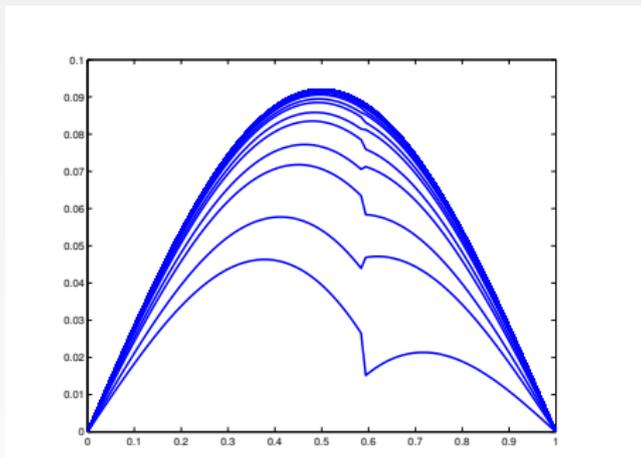


Figure – Método RAS

# Método de Schwarz discretización, ejemplo

La ecuación considerada es la siguiente :

$$-u''(x) + 2u(x) = 2 + 2 * x * (1 - x), \quad \text{con } x \in (0, 1) \quad (44)$$

$$u(0) = u(1) = 0. \quad (45)$$

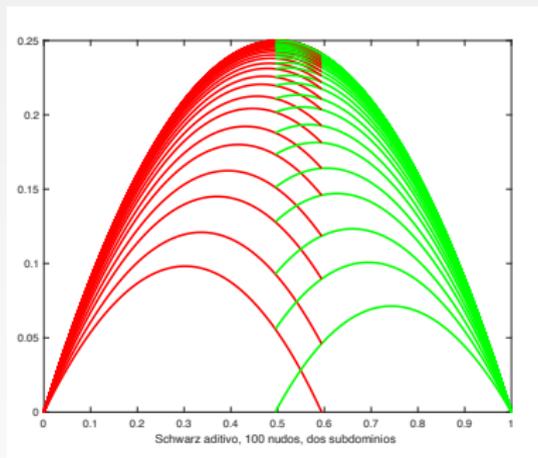


Figure – Evolución de las iteraciones del algoritmo Schwarz aditivo, solapamiento 10 nodos, 38 iteraciones .

# Método de Schwarz discretización, ejemplo

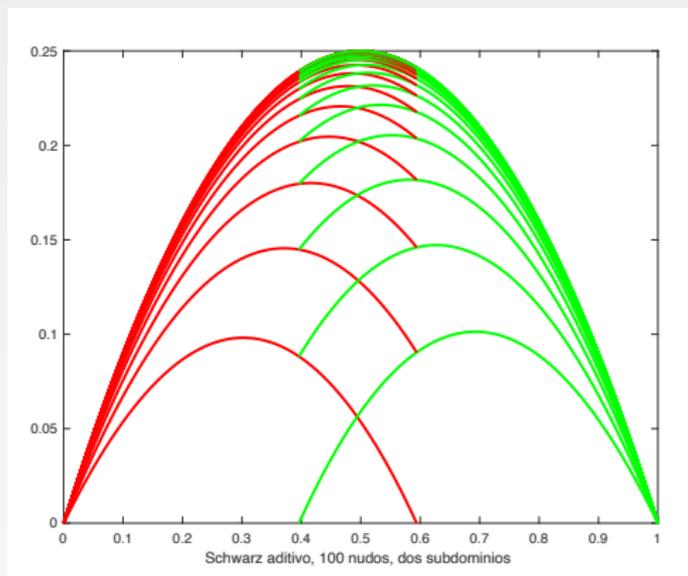


Figure – Evolución de las iteraciones del algoritmo Schwarz aditivo, solapamiento 20 nodos, 21 iteraciones.

# Método de Schwarz discretización, ejemplo

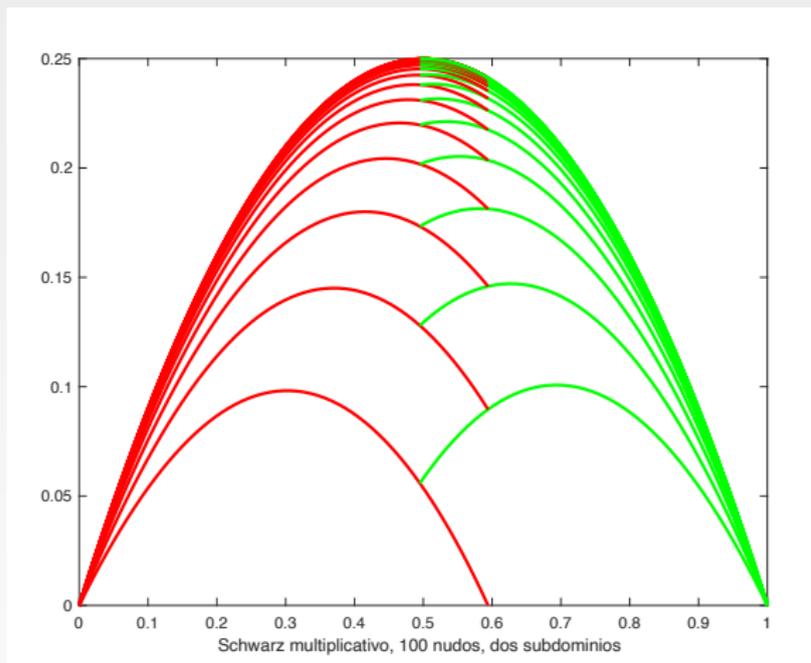


Figure – Evolución de las iteraciones del algoritmo de Schwarz multiplicativo, solapamiento 10 nodos, 21 iteraciones.

# Método de Schwarz discretización, ejemplo

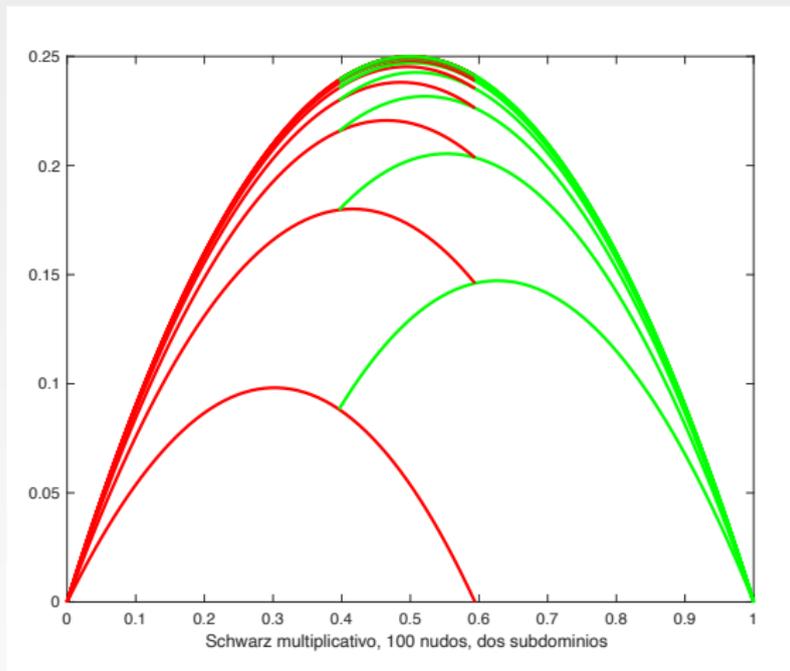


Figure – Evolución de las iteraciones del algoritmo de Schwarz multiplicativo, solapamiento 20 nodos, 12 iteraciones.

# Método de Schwarz discretización, ejemplo

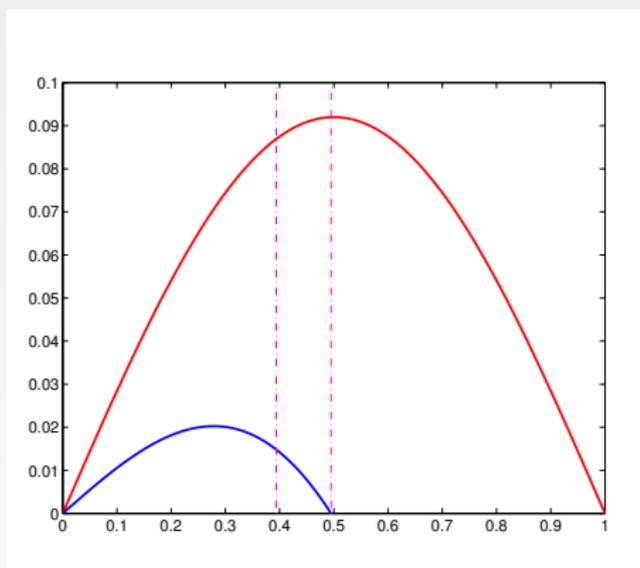


Figure – Método alternado

# Método de Schwarz discretización, ejemplo

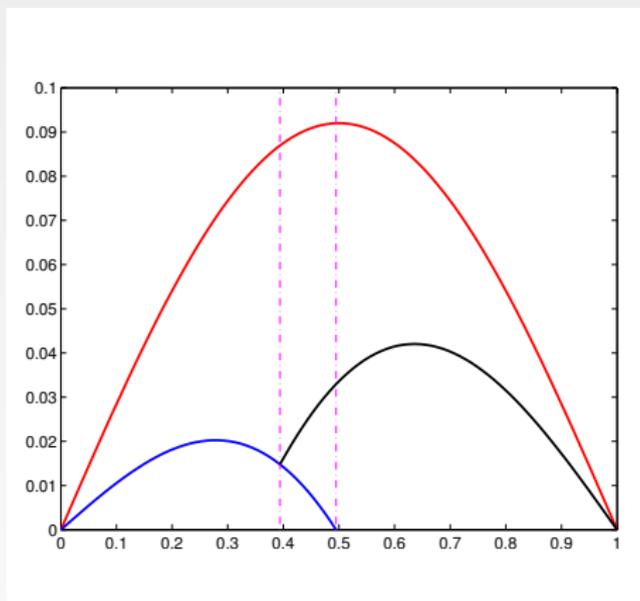


Figure – Método alternado

# Método de Schwarz discretización, ejemplo

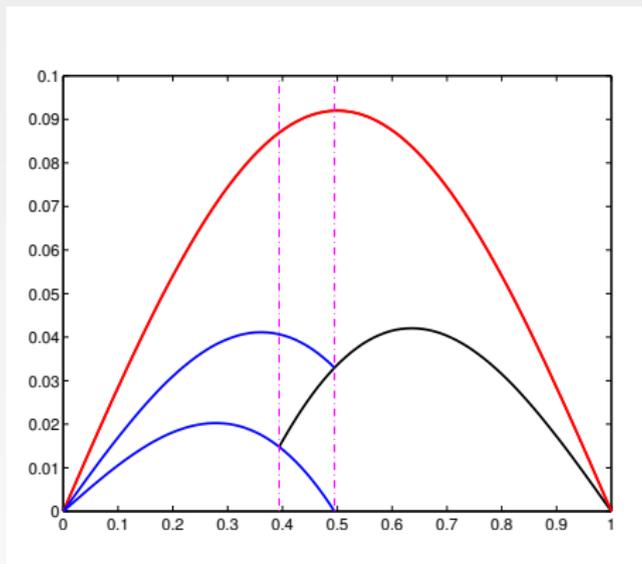


Figure – Método alternado

# Método de Schwarz discretización, ejemplo

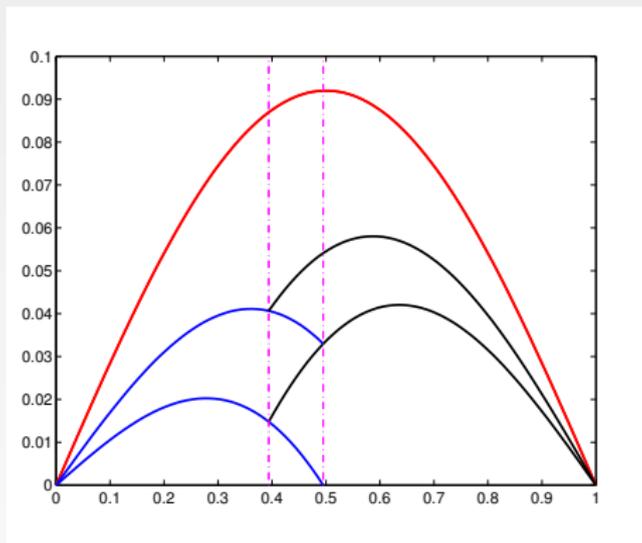


Figure – Método alternado

# Método de Schwarz discretización, ejemplo

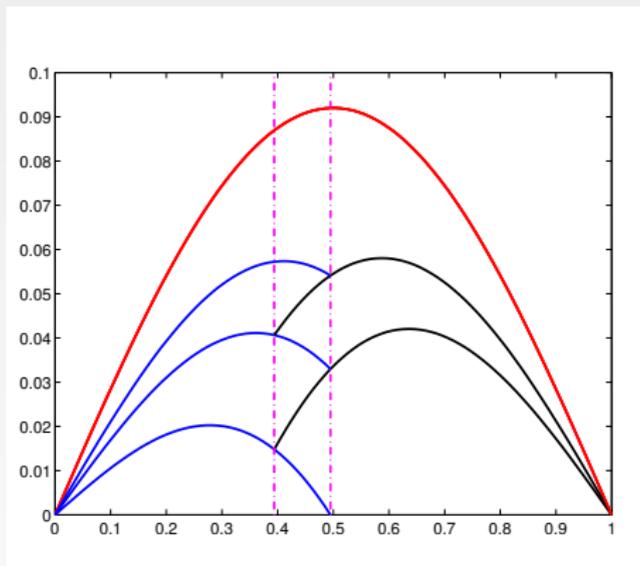


Figure – Método alternado

# Método de Schwarz discretización, ejemplo

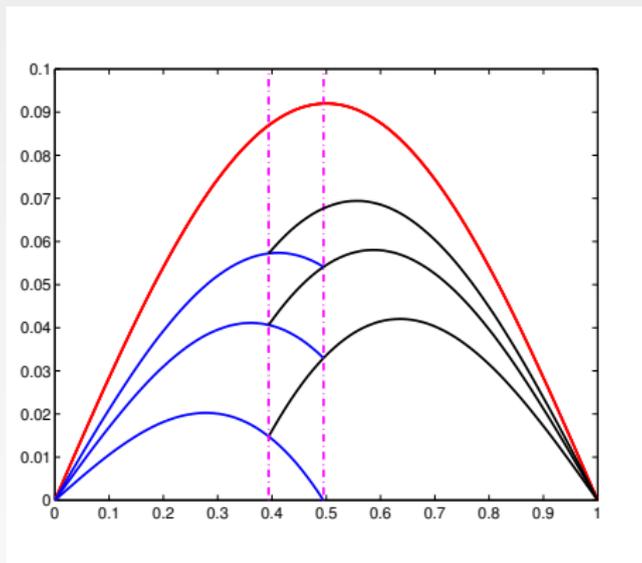


Figure – Método alternado

# Método de Schwarz discretización, ejemplo

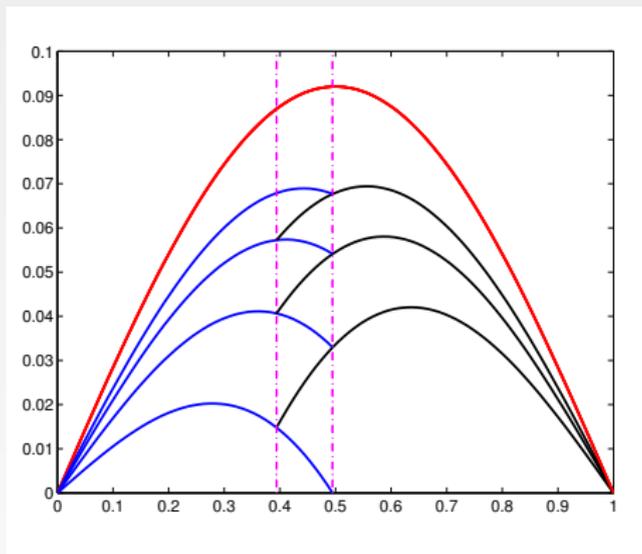


Figure – Método alternado

# Método de Schwarz discretización, ejemplo

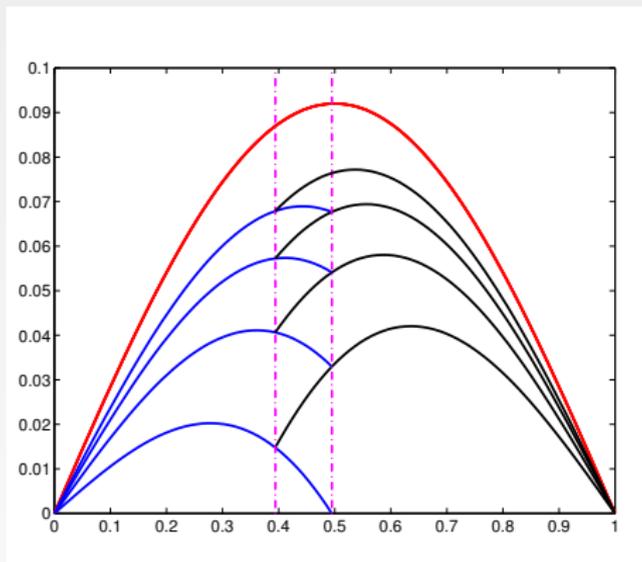


Figure – Método alternado

# Método de Schwarz discretización, ejemplo

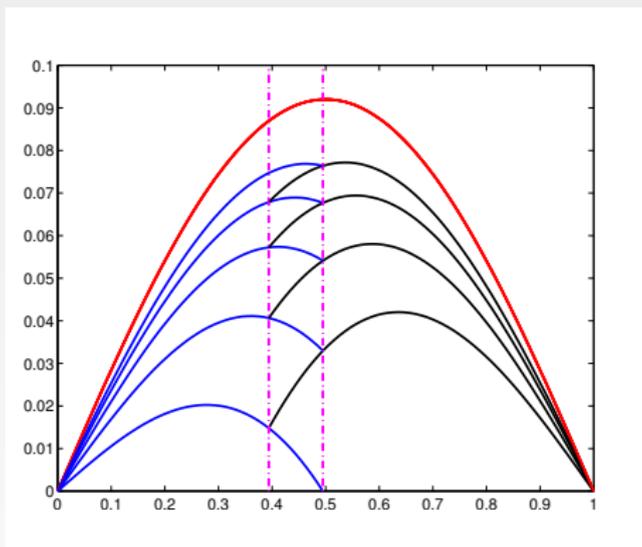


Figure – Método alternado

# Método de Schwarz discretización, ejemplo

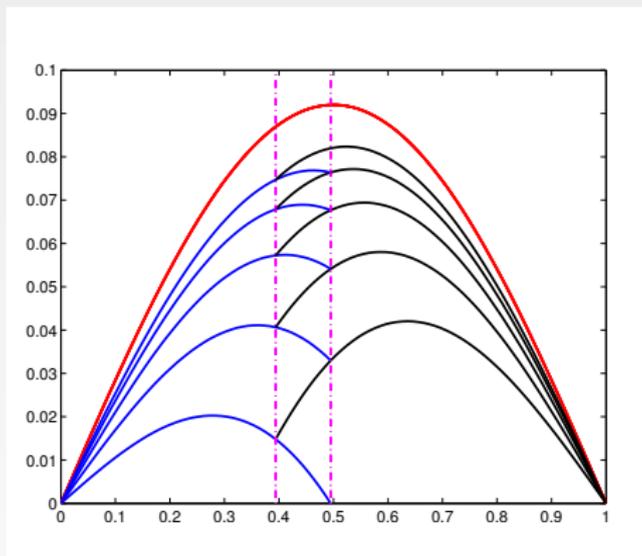


Figure – Método alternado

# Método de Schwarz discretización, ejemplo.

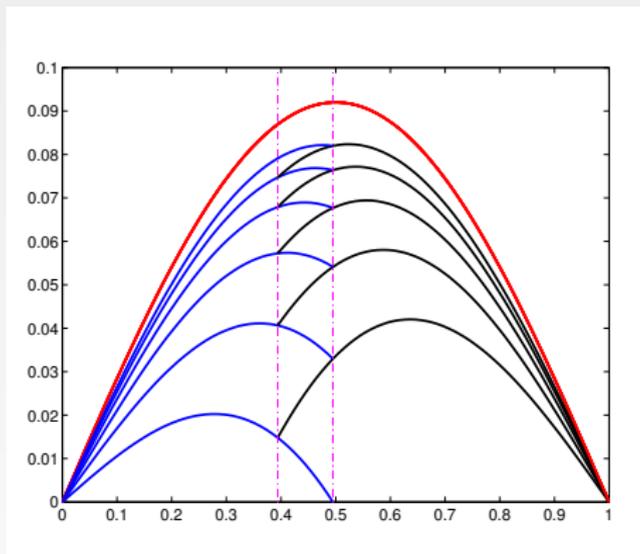


Figure – Método alternado

# Método de Schwarz discretización, ejemplo.

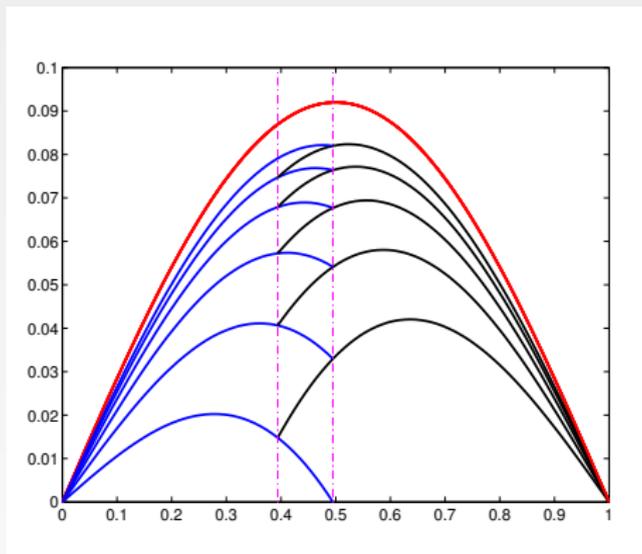


Figure – Método alternado

# Método de Schwarz discretización, comparación.

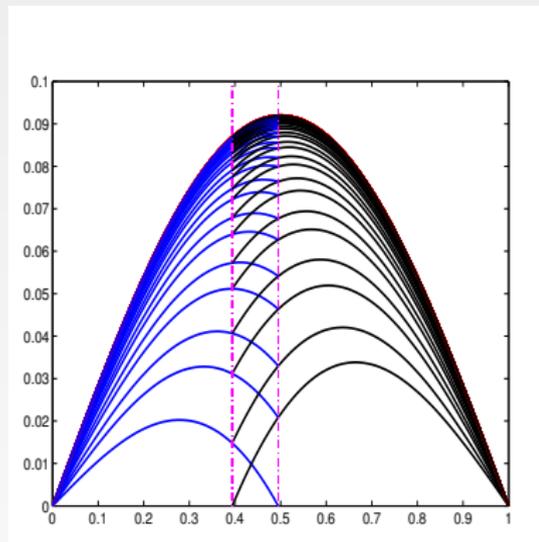


Figure – Método paralelo

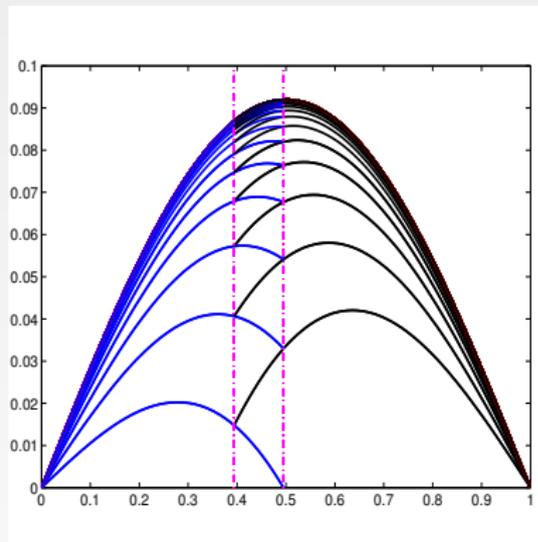


Figure – Método alternado

$$\begin{cases} \Delta u = 2\pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y) \text{ en } \Omega \\ u = 0 \text{ en } \partial\Omega \end{cases}$$

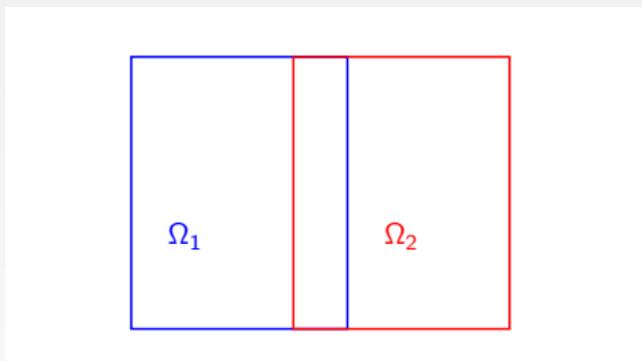


Figure – Descomposición del dominio

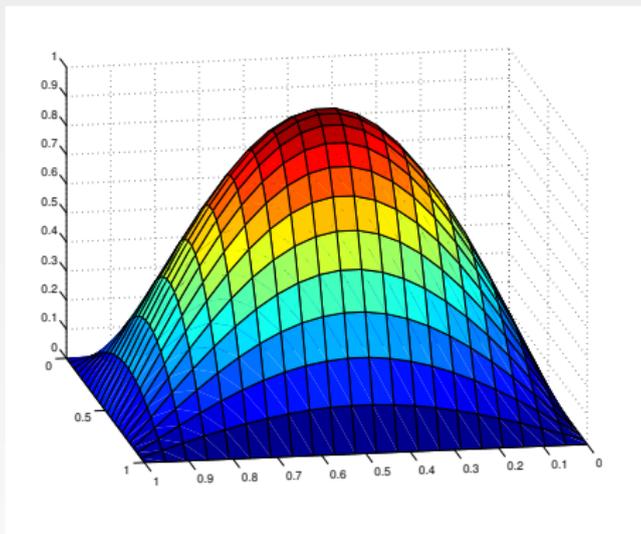


Figure – Solución exacta

# Método de Schwarz método alternado, ejemplo 2D.

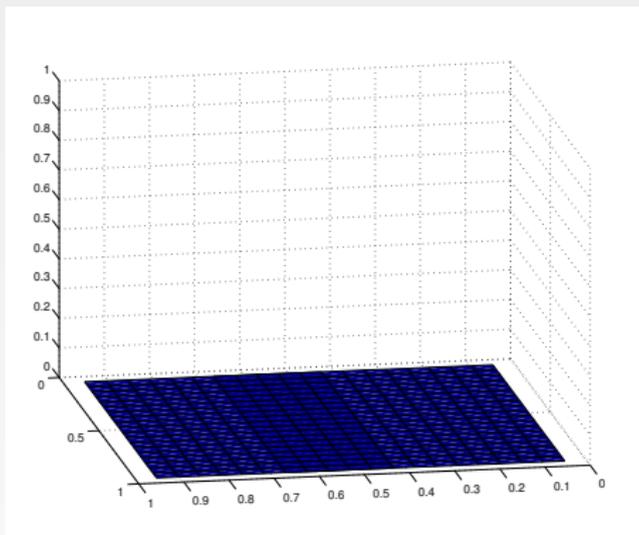


Figure – Iteración zero

# Método de Schwarz método alternado, ejemplo 2D.

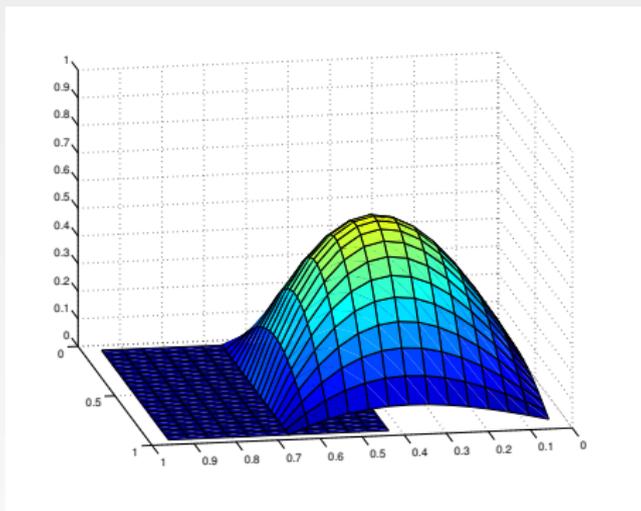


Figure – Primera Iteración

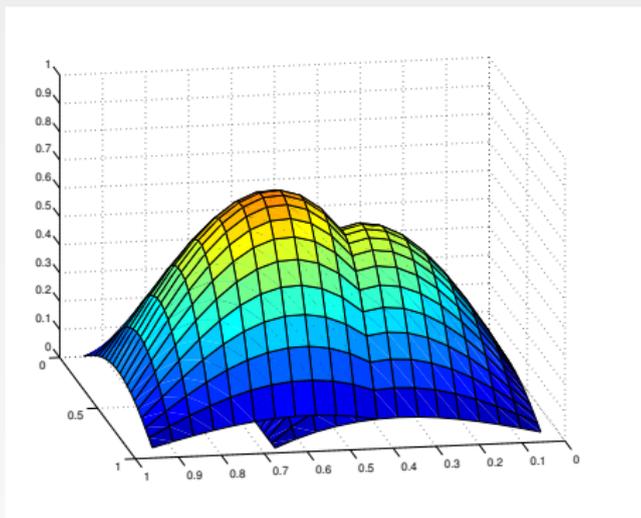


Figure – Segunda Iteración

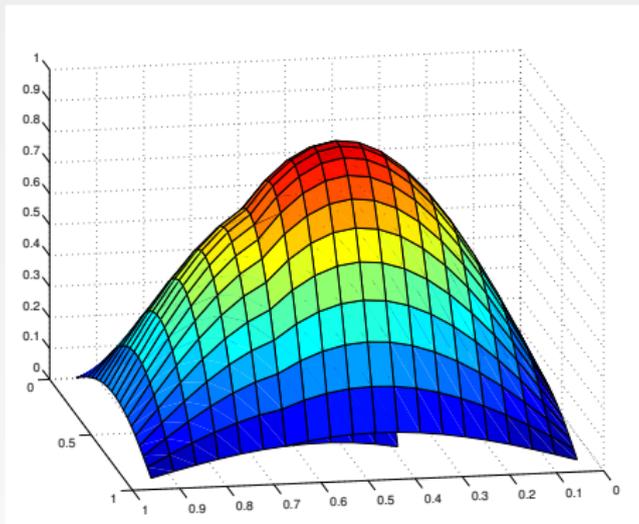


Figure – Tercera Iteración

# Método de Schwarz método alternado, ejemplo 2D.

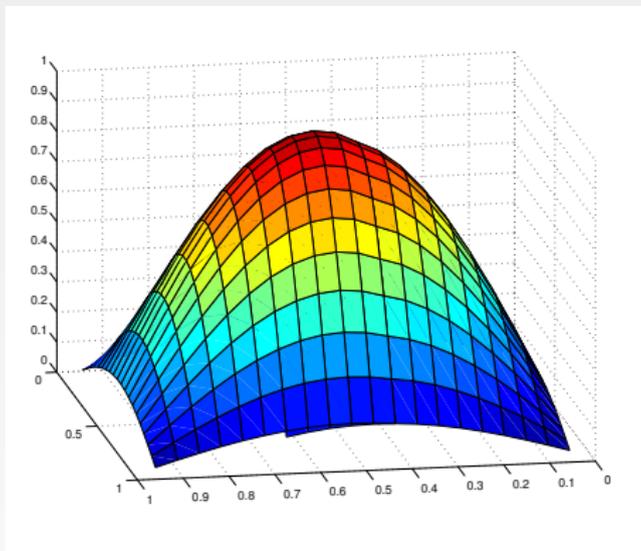


Figure – Cuarta Iteración

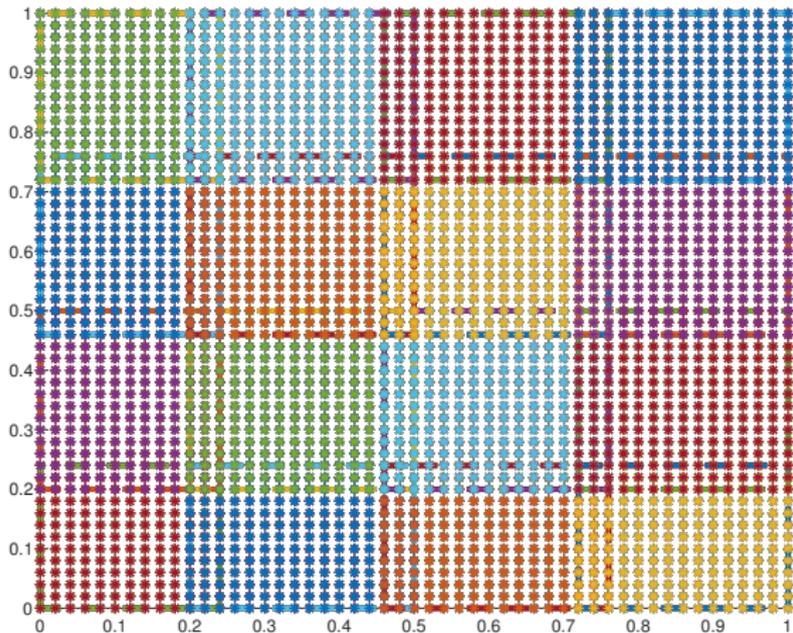
Consideramos ahora un nuevo ejemplo donde la función fuente  $f$  es la adición de distribuciones de Dirac.

$$\begin{cases} \alpha u(\bar{x}) - \Delta u(\bar{x}) + \|\nabla u(\bar{x})\|_0^3 = \mu(\bar{x}) |u(\bar{x})|^2 + \sum_{j=1}^3 K_j \delta_{\bar{x}_j} & \forall \bar{x} \in \Omega \\ u(\bar{x}) = 0 & \forall \bar{x} \in \partial\Omega. \end{cases}$$

donde  $\bar{x} = (x, y)$ ,  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ ,  $\mu(\bar{x}) = 6$ ,  $\alpha = 1$ ,  
 $K_1 = 5 = K_2$ ,  $K_3 = 10$ ,  $\bar{x}_1 = (0.1, 0.2)$ ,  $\bar{x}_2 = (0.5, 0.6)$  y  
 $\bar{x}_3 = (0.9, 0.9)$ .

# Método de Schwarz método alternado, ejemplo 2D.

El tamaño del paso espacial es  $dx = dy = 0,02$  y el número de subdominios va de 9 a 16. En la segunda iteración del método de Newton tenemos 9 subdominios y a partir de la tercera iteración el número de subdominios necesarios es de 16.



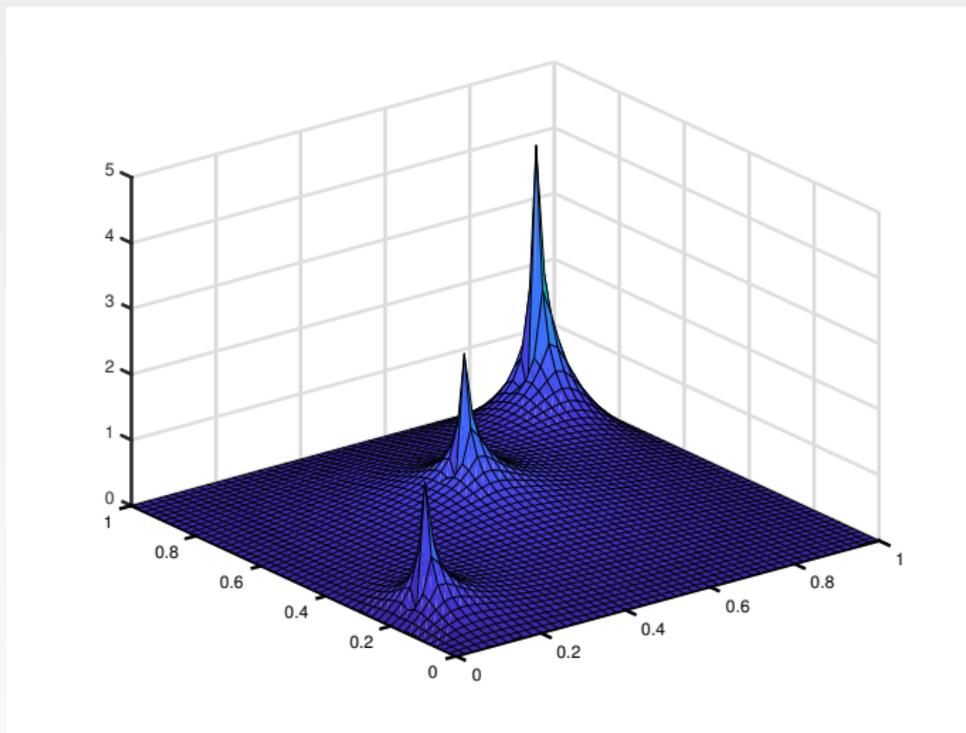


Figure – Aproximación de la solución .

# Método de Schwarz método alternado, ejemplo 2D.

Iteración de Newton	1	2	3	4
Norma del "update" de Newton	4.21	0.17	0.026	$6.4 \cdot 10^{-4}$
# Iteración Schwarz	-	20	14	6
Norma del "update" de Schwarz	-	$8.6 \cdot 10^{-4}$	$9.1 \cdot 10^{-4}$	$8.8 \cdot 10^{-4}$
#subdominios	1	9	16	16

Table – Comportamiento del algoritmo

Par ilustrar las demostraciones de convergencia consideramos un problema a una dimensión, es decir  $\Omega = ]0, 1[$  :

$$\begin{cases} -v''(x) & = f(x) \quad \text{si } x \in ]0, 1[ \\ v(0) & = v(1) = 0 \end{cases}$$

Se supone aquí que la función  $f$  es suficientemente regular para que la solución pertenezca a  $C^2(\Omega)$ .

Definimos  $\Omega_1 = ]0, \alpha[$  y  $\Omega_2 = ]\beta, 1[$  con  $\beta < \alpha$ .

- $]0, 1[ = [0, \alpha[ \cup ]\beta, 1[$ .
- $\Omega_1 \cap \Omega_2 = ]\beta, \alpha[$ .

Sea  $v_1$  la función definida sobre  $[0, \alpha]$  y  $v_2$  la función definida sobre  $[\beta, 1]$  tal que :

$$\begin{cases} -v_1''(x) = f(x) & \text{si } x \in ]0, \alpha[ \\ v_1(0) = 0; \quad v_1(\alpha) = v_2(\alpha) \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} -v_2''(x) = f(x) & \text{si } x \in ]\beta, 1[ \\ v_2(\beta) = v_1(\beta); \quad v_2(1) = 0 \end{cases}$$

Si definimos :

$$v(x) = \begin{cases} v_1(x) & \text{si } x \in ]0, \alpha[ \\ v_2(x) & \text{si } x \in ]\beta, 1[ \end{cases}$$

entonces  $v_1(x) = v_2(x)$  en  $]\beta, \alpha[$  y  $v$  es la solución de la ecuación original.

## Proposición

Sea  $v^0$  una función tal que  $v^0(0) = v^0(1) = 0$ . Sean  $\{v_1^k\}_{k \geq 0}$  y  $\{v_2^k\}_{k \geq 0}$  dos secuencias que verifican :

Para  $k = 0, \dots$  convergencia

$$\begin{cases} -(v_1^{k+1})''(x) = f(x) & \text{si } x \in ]0, \alpha[ \\ v_1^{k+1}(0) = 0; & v_1^{k+1}(\alpha) = v_2^k(\alpha) \end{cases} \quad (46)$$

$$\begin{cases} -(v_2^{k+1})''(x) = f(x) & \text{si } x \in ]\beta, 1[ \\ v_2^{k+1}(\beta) = v_1^k(\beta); & v_2^{k+1}(1) = 0 \end{cases} \quad (47)$$

Entonces si  $\beta < \alpha$ ,  $\{v_1^k\} \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} v_1$  y  $\{v_2^k\} \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} v_2$  cuando  $k \rightarrow \infty$ .

## Demonstración

Definimos las funciones error siguientes :

$$\begin{aligned}d^2(x) &= v_1^k(x) - v_1(x) \quad \text{si } x \in ]0, \alpha[ \\ e^k(x) &= v_2^k(x) - v_2(x) \quad \text{si } x \in ]\beta, 1[ \end{aligned}$$

que verifican las ecuaciones :

$$\begin{cases} -(d^{k+1})''(x) = 0 & \text{si } x \in ]0, \alpha[ \\ d^{k+1}(0) = 0; & d^{k+1}(\alpha) = v_1^{k+1}(\alpha) - v_1(\alpha) \\ & = v_2^k(\alpha) - v_2(\alpha) = e^k(\alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -(e^{k+1})''(x) = 0 & \text{si } x \in ]\beta, 1[ \\ e^{k+1}(\beta) = v_2^k(\beta) - v_2(\beta) \\ & = v_1^k(\beta) - v_1(\beta) = d^k(\beta); e^{k+1}(1) = 0 \end{cases}$$

## Demonstración

Sea  $\Phi$  la solución de

$$\begin{cases} -\Phi''(x) = 0 & \text{si } x \in ]0, \alpha[ \\ \Phi(0) = 0; & \Phi(\alpha) = |e^k(\alpha)| \end{cases}$$

entonces  $\Phi(x) = |e^k(\alpha)| \frac{x}{\alpha}$  si  $x \in ]0, \alpha[$  y  $\Phi(x) \geq 0, \in [0, \alpha]$ .

Para comparar definimos la función  $z(x) = \Phi(x) - d^{k+1}(x)$  en  $[0, \alpha]$ , esta función verifica :

$$\begin{cases} -z''(x) = -\Phi''(x) + (d^{k+1})''(x) = 0 & \text{si } x \in ]0, \alpha[ \\ z(0) = \Phi(0) - d^{k+1}(0) = 0 \\ z(\alpha) = \Phi(\alpha) - d^{k+1}(\alpha) = |e^k(\alpha)| - e^k(\alpha) \geq 0 \end{cases}$$

entonces por el principio del máximo tenemos que  $z(x) \geq 0$  en  $]0, \alpha[$  y por consecuencia  $\Phi(x) \geq d^{k+1}(x)$  en  $]0, \alpha[$ .

## Demonstración

*Siguiendo con las comparaciones definimos ahora*

$z(x) = \Phi(x) + d^{k+1}(x)$  en  $[0, \alpha]$

$$\begin{cases} -z''(x) &= -\Phi''(x) + (d^{k+1})''(x) = 0 & \text{si } x \in ]0, \alpha[ \\ z(0) &= \Phi(0) + d^{k+1}(0) = 0 \\ z(\alpha) &= \Phi(\alpha) + d^{k+1}(\alpha) = |e^k(\alpha)| + e^k(\alpha) \geq 0 \end{cases}$$

*entonces por el principio del máximo tenemos que  $z(x) \geq 0$  en  $]0, \alpha[$  y por consecuencia  $d^{k+1}(x) \geq -\Phi(x)$  en  $]0, \alpha[$ . Entonces tenemos que :*

$$-\Phi(x) \leq d^{k+1}(x) \leq \Phi(x) \quad \text{si } x \in ]0, \alpha[$$

*eso implica que  $|d^{k+1}(x)| \leq \Phi(x)$  si  $x \in ]0, \alpha[$ , más aún :*

$$\|d^{k+1}\|_{\infty, [0, \alpha]} \leq \|\Phi\|_{\infty, [0, \alpha]} \leq |e^k(\alpha)| \leq \|e^k\|_{\infty, [\beta, 1]}$$

## Demonstración

Ahora consideramos  $\Phi(x)$  en  $[\beta, 1]$  tal que :

$$\begin{cases} -\Phi''(x) = 0 & \text{si } x \in ]\beta, 1[ \\ \Phi(\beta) = |d^{k-1}(\beta)|; \quad \Phi(1) = 0 \end{cases}$$

entonces  $\Phi(x) = |d^{k-1}(\beta)| \frac{(x-1)}{(\beta-1)} \geq 0$ .

Si  $z(x) = \Phi(x) + e^k(x)$  en  $[\beta, 1]$ ,  $z(x)$  verifica :

$$\begin{cases} -z''(x) = -\Phi''(x) - (e^k)''(x) = 0 & \text{si } x \in ]\beta, 1[ \\ z(1) = \Phi(1) + e^k(1) = 0 \\ z(\beta) = |d^{k-1}(\beta)| + e^k(\beta) = |e^k(\beta)| + e^k(\beta) \geq 0 \end{cases}$$

entonces  $z(x) \geq 0$  en  $[\beta, 1]$  (Principio del Maximo) y por consecuencia :

$$\Phi(x) + e^k(x) \geq 0 \text{ y } e^k(x) \geq -\Phi(x) \text{ en } [\beta, 1]$$

## Demonstración

Sea  $z(x) = \Phi(x) - e^k(x)$  en  $[\beta, 1]$ ,  $z(x)$  verifica :

$$\begin{cases} -z''(x) &= -\Phi''(x) + (e^k)''(x) = 0 \quad \text{si } x \in ]\beta, 1[ \\ z(1) &= \Phi(1) - e^k(1) = 0 \\ z(\beta) &= |d^{k-1}(\beta)| - e^k(\beta) = |e^k(\beta)| - e^k(\beta) \geq 0 \end{cases}$$

entonces  $z(x) \geq 0$  en  $[\beta, 1]$  (Principio del Maximo) y por consecuencia :

$$\Phi(x) - e^k(x) \geq 0 \text{ y } \Phi(x) \geq e^k(x) \text{ en } [\beta, 1]$$

## Demonstración

*Lo que implica :*

$$\begin{aligned}\|d^{k+1}\|_{\infty,[0,\alpha]} &\leq |e^k(\alpha)| \leq \Phi(\alpha) = |d^{k-1}(\beta)| \frac{(\alpha - 1)}{(\beta - 1)} \\ &\leq \gamma_1 \|d^{k-1}\|_{\infty,[0,\alpha]}\end{aligned}$$

*con*

$$\gamma_1 \leq \frac{(\alpha - 1)}{(\beta - 1)} < 1$$

*entonces :*

$$\|d^{k+1}\|_{\infty,[0,\alpha]} \leq \gamma_1 \|d^{k-1}\|_{\infty,[0,\alpha]} \text{ con } \gamma_1 \leq 1$$

*y en consecuencia*  $\|d^k\|_{\infty,[0,\alpha]} \rightarrow 0$  cuando  $k \rightarrow \infty$ .

## Demonstración

Utilizando la misma técnica podemos demostrar que

$$\|e^{k+1}\|_{\infty, [\beta, 1]} \leq \gamma_2 \|e^{k-1}\|_{\infty, [\beta, 1]} \text{ con } \gamma_2 \leq \frac{\beta}{\alpha} < 1 \text{ y entonces}$$
$$\|e^k\|_{\infty, [\beta, 1]} \rightarrow 0 \text{ cuando } k \rightarrow \infty.$$

Tenemos como consecuencia que :

$$\|d^k\|_{\infty, [0, \alpha]} \leq \gamma_1^{\frac{k}{2}} \|d^0\|_{\infty, [0, \alpha]}$$
$$\|e^k\|_{\infty, [\beta, 1]} \leq \gamma_2^{\frac{k}{2}} \|e^0\|_{\infty, [\beta, 1]}$$

donde  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  dependen directamente del solapamiento, es decir de  $\alpha - \beta$  y  $\frac{\beta}{\alpha}$ , más grande es el solapamiento más rápida es la convergencia, pero menos interesante es el método.

# Método de Schwarz método aditivo, convergencia en 1D.

Esta constatación es ilustrada en el pequeño ejemplo siguiente :

$$\begin{cases} -v''(x) = 0 & \text{si } x \in ]0, 1[ \\ v(0) = v(1) = 0 \end{cases}$$

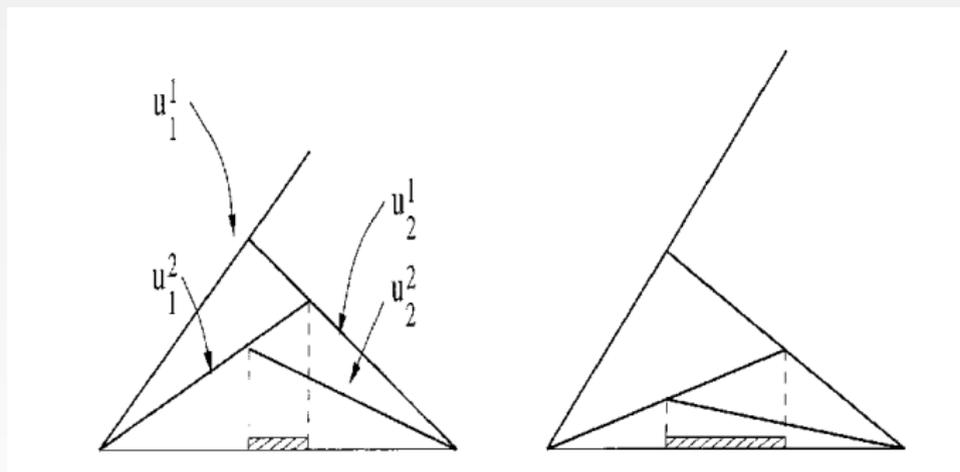


Figure – Evolución de las iteración.

Consideremos una descomposición del dominio  $\Omega$  en dos subdominios  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  tales que  $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \phi$  y  $\bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2 = \bar{\Omega}$ . Definimos  $\Gamma = \partial\bar{\Omega}_1 \cup \partial\bar{\Omega}_2$  la interfaz entre los dos subdominios.

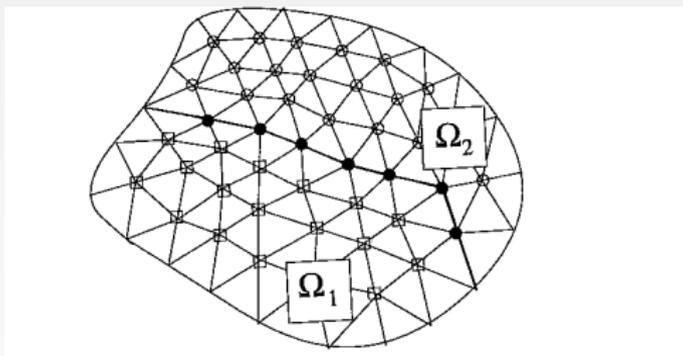


Figure – descomposición en dos subdominios sin solapado.

# Método de Subestructuración, Complemento de Schur.

Así  $u_h \in X_h$  podrá escribirse de la manera siguiente :

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^{N_1} u_h(x_j^{(1)})\varphi_j^{(1)}(x) + \sum_{j=1}^{N_2} u_h(x_j^{(2)})\varphi_j^{(2)}(x) + \sum_{j=1}^{N_\Gamma} u_h(x_j^{(\Gamma)})\varphi_j^{(\Gamma)}(x)$$

Entonces la formulacion debil toma la forma siguiente :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N_1} u_h(x_j^{(1)})a_1(\varphi_j^{(1)}, \varphi_i^{(1)}) + \sum_{j=1}^{N_\Gamma} u_h(x_j^{(\Gamma)})a_1(\varphi_j^{(\Gamma)}, \varphi_i^{(1)}) &= (f, \varphi_i^{(1)})_1, 1 \leq i \leq N_1 \\ \sum_{j=1}^{N_2} u_h(x_j^{(2)})a_2(\varphi_j^{(2)}, \varphi_i^{(2)}) + \sum_{j=1}^{N_\Gamma} u_h(x_j^{(\Gamma)})a_2(\varphi_j^{(\Gamma)}, \varphi_i^{(2)}) &= (f, \varphi_i^{(2)})_2, 1 \leq i \leq N_2 \\ \sum_{j=1}^{N_\Gamma} u_h(x_j^{(\Gamma)})[a_1(\varphi_j^{(\Gamma)}, \varphi_i^{(\Gamma)}) + a_2(\varphi_j^{(\Gamma)}, \varphi_i^{(\Gamma)}) + \\ + \sum_{j=1}^{N_1} u_h(x_j^{(1)})a_1(\varphi_j^{(1)}, \varphi_i^{(\Gamma)}) + \sum_{j=1}^{N_2} u_h(x_j^{(2)})a_2(\varphi_j^{(2)}, \varphi_i^{(\Gamma)}) \\ = (f, \varphi_i^{(\Gamma)})_1 + (f, \varphi_i^{(\Gamma)})_2, & \quad 1 \leq i \leq N_\Gamma \end{aligned}$$

Si ahora anotamos :

- $(A_{11})_{i,j} = a_1(\varphi_j^{(1)}, \varphi_i^{(1)}), (A_{1\Gamma})_{i,j} = a_1(\varphi_j^{(\Gamma)}, \varphi_i^{(1)}),$   
 $(F_1)_j = (f, \varphi_j^{(1)})_1,$
- $(A_{22})_{i,j} = a_2(\varphi_j^{(2)}, \varphi_i^{(2)}), (A_{2\Gamma})_{i,j} = a_2(\varphi_j^{(\Gamma)}, \varphi_i^{(2)}),$   
 $(F_2)_j = (f, \varphi_j^{(2)})_2,$
- $(A_{\Gamma 1})_{i,j} = a_1(\varphi_j^{(1)}, \varphi_i^{(\Gamma)}), (A_{\Gamma 2})_{i,j} = a_2(\varphi_j^{(2)}, \varphi_i^{(\Gamma)}),$
- $(A_{\Gamma\Gamma}^{(1)})_{i,j} = a_1(\varphi_j^{(\Gamma)}, \varphi_i^{(\Gamma)}), (A_{\Gamma\Gamma}^{(2)})_{i,j} = a_2(\varphi_j^{(\Gamma)}, \varphi_i^{(\Gamma)}),$
- $(F_1^\Gamma)_j = (f, \varphi_j^{(\Gamma)})_1, (F_2^\Gamma)_j = (f, \varphi_j^{(\Gamma)})_2,$
- $(U_1)_j = u_h(x_j^{(1)}), (U_2)_j = u_h(x_j^{(2)})$  y  $(\lambda)_j = u_h(x_j^{(\Gamma)}).$

El sistema discreto puede ahora formularse de la manera siguiente :

$$A_{11}U_1 + A_{1\Gamma}\lambda = F_1$$

$$A_{22}U_2 + A_{2\Gamma}\lambda = F_2$$

$$A_{\Gamma 1}U_1 + A_{\Gamma 2}U_2 + (A_{\Gamma\Gamma}^{(1)} + A_{\Gamma\Gamma}^{(2)})\lambda = F_1^\Gamma + F_2^\Gamma$$

Dicho de otra manera,  $U$  es solución del sistema lineal :

$$\begin{bmatrix} A_{11} & 0 & A_{1\Gamma} \\ 0 & A_{22} & A_{2\Gamma} \\ A_{\Gamma 1} & A_{\Gamma 2} & A_{\Gamma\Gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_\Gamma \end{bmatrix}$$

donde  $A_{\Gamma\Gamma} = (A_{\Gamma\Gamma}^{(1)} + A_{\Gamma\Gamma}^{(2)})$  y  $F_\Gamma = F_1^\Gamma + F_2^\Gamma$ .

Una sustitución de Gauss por bloques nos da :

$$U_1 = A_{11}^{-1}(F_1 - A_{1\Gamma}U_\Gamma), \text{ y } U_2 = A_{22}^{-1}(F_2 - A_{2\Gamma}U_\Gamma).$$

reemplazando en la ultima ecuación obtenemos :

$$(A_{\Gamma\Gamma} - A_{\Gamma 1}A_{11}^{-1}A_{1\Gamma} - A_{\Gamma 2}A_{22}^{-1}A_{2\Gamma})U_\Gamma = F_\Gamma + A_{\Gamma 1}A_{11}^{-1}F_1 + A_{\Gamma 2}A_{22}^{-1}F_2.$$

Podemos ahora notar

$$\sum_h = (A_{\Gamma\Gamma} - A_{\Gamma 1}A_{11}^{-1}A_{1\Gamma} - A_{\Gamma 2}A_{22}^{-1}A_{2\Gamma})$$

la matriz complemento de Schur y

$$\chi_\Gamma = f_\Gamma + A_{\Gamma 1}A_{11}^{-1}F_1 + A_{\Gamma 2}A_{22}^{-1}F_2$$

.

Obtenemos así el sistema lineal complemento de Schur siguiente :

$$\Sigma_h u_\Gamma = \chi_\Gamma$$

que es la versión algebraica del sistema de Stelov-Poincaré.

Si descomponemos  $A_{\Gamma\Gamma} = A_{\Gamma\Gamma}^{(1)} + A_{\Gamma\Gamma}^{(2)}$ , podemos decir que :

$$\Sigma_h = \Sigma_{1,h} + \Sigma_{2,h}.$$

donde :

$$\Sigma_{i,h} = A_{\Gamma\Gamma}^{(i)} - A_{\Gamma i} A_{ii}^{-1} A_{i\Gamma}, \quad i = 1, 2.$$

Estas matrices son densas, simétricas y definidas positivas (versión discreta de la elasticidad). Cuando el número de incógnitas es pequeño y podemos calcular el complemento de Schur el método es llamado de condensación estática. Sino, en general, para resolver el sistema lineal se utiliza el método del Gradiente Conjugado.

Si se nota  $r^k = \chi_\Gamma - \sum_h u_\Gamma^k$  el residuo a la iteración  $k$ .

- Etape 0 :  $u^0 \in \mathbb{R}^n$  et  $tol > 0$  ;  $k = 1$  ;  $p^0 = r^0$

- Etape  $k$  : verificación de la condición de corte. Si  $\|r^k\| \leq tol$

STOP

- Sinon

- Calcular :

- $$\rho^k = -\frac{\|r^k\|^2}{(\sum_h p^k, p^k)}$$

- 

- $$u^{k+1} = u^k + \rho^k p^k$$

- 

- $$r^{k+1} = r^k - \rho^k \sum_h p^k$$

- 

- $$\beta^{k+1} = \frac{\|r^{k+1}\|^2}{\|r^k\|^2}$$

- 

- $$p^{k+1} = r^{k+1} + \beta^{k+1} p^k$$

- $k = k + 1$

Dos dificultades aparecen en este algoritmo, la primera de orden operativo, el cálculo de  $\Sigma_h p^k$ , y la segunda la convergencia.

Para calcular  $\Sigma_h v$ ,  $v$  un vector de dimensión  $N_\Gamma$  efectuamos :

$$\Sigma_{1,h} v = (A_{\Gamma\Gamma}^{(1)} - A_{\Gamma 1} A_{11}^{-1} A_{1\Gamma}) v$$

$$\Sigma_{2,h} v = (A_{\Gamma\Gamma}^{(2)} - A_{\Gamma 2} A_{22}^{-1} A_{2\Gamma}) v$$

La evaluación de  $w = A_{ii}^{-1} A_{i\Gamma} v$ ,  $i = 1, 2$  se hace de la manera siguiente, se calcula la solución del sistema lineal :

$$A_{ii} w = A_{i\Gamma} v$$

Esto equivale a resolver el problema discreto sobre cada sub dominio, y se puede hacer en paralelo.

El segundo problema, la convergencia del algoritmo del Gradiente Conjugado depende del condicionamiento de la matriz  $\Sigma_h$  que se nota  $cond_2(\Sigma_h)$ . Una estimación del número  $cond_2(\Sigma_h)$  (ver Quarteroni) nos dice que :

$$cond_2(\Sigma_h) \leq C_0 h^{-1}$$

donde  $h$  es el paso de discretización y la constante  $C_0$  es independiente de  $h$ .

Una primera posibilidad de preconditionamiento, para que el condicionamiento sea independiente de  $h$  es considerar el sistema :

$$\Sigma_{i,h}^{-1} \Sigma_h u_\Gamma = \Sigma_{i,h}^{-1} \chi_\Gamma, \quad i = 1, 2$$

' El nuevo sistema, preconditionado por  $\Sigma_{1,h}^{-1}$  o  $\Sigma_{2,h}^{-1}$  tiene un número de condicionamiento independiente de  $h$ .

$$cond_2(\Sigma_{i,h}^{-1} \Sigma_h) \leq C_i, \quad i = 1, 2.$$

Con  $C_i$  independiente de  $h$ .

Haciendo una permutación de índices adaptada podremos particionar el vector de incógnitas  $U = [U_I, U_\Gamma]$  y el vector del segundo miembro en  $[F_I, F_\Gamma]$ . Así la ecuación :

$$Au = f$$

donde  $A$  es la matriz de rigidez, puede describirse por bloques :

$$\begin{bmatrix} A_{II} & A_{I\Gamma} \\ A_{\Gamma I} & A_{\Gamma\Gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_I \\ U_\Gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_I \\ F_\Gamma \end{bmatrix}$$

donde la matriz  $A_{II}$  es una matriz por bloques :

$$A_{II} = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & A_{mm} \end{bmatrix}$$

donde  $A_{ij}$  es la sub-matriz de la matriz de rigidez local asociada a un problema sea de Dirichlet o Neumann en  $\Omega_j$ .

La matriz de rigidez asociada a un problema local es dada por :

$$A_i = \begin{bmatrix} A_{ii} & A_{i\Gamma} \\ A_{\Gamma i} & A_{\Gamma\Gamma}^{(i)} \end{bmatrix}$$

Los coeficientes de los bloques de la matriz  $A_i$  están dados por ;

$$(A_{ii})_{l,j} = a_i(\phi_j, \phi_l), \quad 1 \leq j, l \leq N_i$$

$$(A_{i\Gamma})_{l,r} = A_i(\psi_r, \phi_l), \quad 1 \leq r \leq J_i, \quad 1 \leq l \leq N_i$$

$$(A_{\Gamma\Gamma}^{(i)})_{s,r} = a_i(\psi_r, \psi_s), \quad 1 \leq r, s \leq J_i$$

donde  $\phi_j, j = 1, \dots, N_i$  son los elementos de la base de elementos finitos correspondientes a los nodos en el interior de  $\Omega_i$  y  $\psi_r, r = 1, \dots, J_i$  son los elementos de la base correspondientes a los nodos en la interfaz  $\Gamma_i$ .

Un proceso de sustitución de tipo Gauss por bloques similar al caso de una descomposición en dos sub dominios nos permite de calcular la matriz complemento de Schur en el caso multidominios.

$$\Sigma_h = \sum_{i=1}^m R_{i,\Gamma}^t (A_{\Gamma\Gamma}^{(i)} - A_{i\Gamma}^t A_{ii}^{-1} A_{i\Gamma}) R_{i,\Gamma}$$
$$F_\Gamma = \chi_\Gamma = \sum_{i=1}^m R_{i,\Gamma}^t (F_{i,\Gamma} - A_{i\Gamma}^t A_{ii}^{-1} F_i)$$

y el sistema lineal asociado es :

$$\Sigma_h U_\gamma = \chi_\Gamma$$

1) para  $i = 1, \dots, m$  (Número de subdominios)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ensamblar las matrices } A_{ii}, A_{i\Gamma}, A_{\Gamma\Gamma}^{(i)}, F_i, F_{i\Gamma}, \\ \text{Calcular los factores de Cholesky : } A_{ii} = L_i L_i^t \\ \text{Ensamblar las matrices } \Sigma_i = A_{\Gamma\Gamma}^{(i)} - A_{i\Gamma}^t L_i^t L_i^{-1} A_{i\Gamma} \\ \text{Ensamblar } F_{i\Gamma} = F_{i,\Gamma} - A_{i\Gamma}^t L_i^t L_i^{-1} F_i. \end{array} \right.$$

Fin de la iteración sobre los subdominios.

2) Ensamblar :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma_h = \sum_{i=1}^m R_{i,\Gamma}^t \Sigma_i R_{i,\Gamma} \\ F_\Gamma = \sum_{i=1}^m R_{i,\Gamma}^t F_{i\Gamma} \end{array} \right.$$

3) Factorización de Cholesky de  $\Sigma_h$  :  $\Sigma_h = L_\Sigma L_\Sigma^t$  y resolver :

$$\begin{cases} L_\Sigma w_\Gamma = F_\Gamma \\ L_\Sigma^t u_\Gamma = w_\Gamma \end{cases}$$

4) Para  $i = 1, \dots, m$  resolver (eventualmente en paralelo) :  
 $A_{ii} U_i = (F_i - A_{i\Gamma} R_{i,\Gamma} U_\Gamma)$

Fin de la iteración sobre los subdominios.

Obtenemos  $U = (U_1^t, \dots, U_m^t, U_\Gamma^t)$  la solución numérica de nuestro problema.

El objetivo de este tipo de métodos es de calcular de manera iterativa una solución del problema multi-dominios :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u_1(x) = f(x) & \text{si } x \in \Omega_1 \\ u_1(x) = 0 & \text{si } x \in \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega \\ u_1(x) = u_2(x) & \text{si } x \in \Gamma \\ \frac{\partial u_2}{\partial \bar{n}} = \frac{\partial u_1}{\partial \bar{n}} & \text{si } x \in \Gamma \\ u_2(x) = 0 & \text{si } x \in \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega \\ -\Delta u_2(x) = f(x) & \text{si } x \in \Omega_2 \end{array} \right. \quad (48)$$

Vamos iterar en una de las condiciones de frontera, en este primer caso la condición de Dirichlet :

Dado una primera estimación  $\lambda_0$ , por cada  $k \geq 0$  calcularemos las secuencias  $u_1^k$  y  $u_2^k$  solución de :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u_1^{k+1} = f, \text{ en } \Omega_1 \\ u_1^{k+1} = 0, \text{ en } \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega \\ u_1^{k+1} = \lambda^k \text{ en } \Gamma \end{array} \right. \text{ y } \left\{ \begin{array}{l} -\Delta u_2^{k+1} = f, \text{ en } \Omega_2 \\ u_2^{k+1} = 0, \text{ en } \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega \\ \frac{\partial u_2^{k+1}}{\partial n} = \frac{\partial u_1^{k+1}}{\partial n} \text{ en } \Gamma \end{array} \right.$$

y la evolución de  $\lambda$  :

$$\lambda^{k+1} = \theta u_2^{k+1} + (1 - \theta)\lambda^k, \quad 1 > \theta > 0.$$

# Método Dirichlet-Neumann

Si  $\theta = 1$  El método puede no converger sin hipótesis sobre los subdominios  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$ . Consideremos el caso elemental siguiente :

$$\begin{cases} -u''(x) = 0, & \text{en } (0, 1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Si la descomposición es de la forma  $\Omega_1 = ]0, \alpha[$  y  $] \beta, 1[$  el método convergera sii  $\alpha > (1 - \beta)$ , sinon no tendremos convergencia, ver la figura.

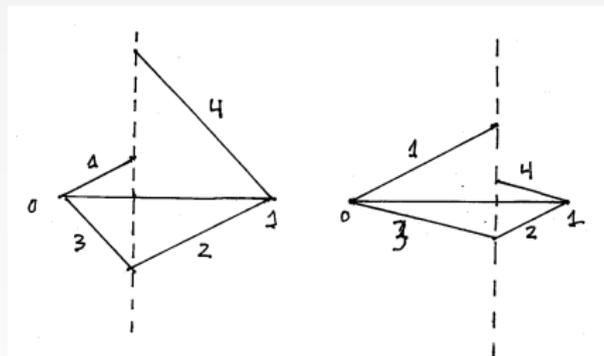


Figure – Convergencia si  $\theta = 1$ .

Se puede obtener un método similar relajando la condición de frontera de tipo Neumann, definiendo las secuencias  $\tilde{u}_1^{k+1}$  y  $\tilde{u}_2^{k+1}$  siguientes :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta \tilde{u}_2^{k+1} = f, \text{ en } \Omega_2 \\ \tilde{u}_2^{k+1} = 0, \text{ en } \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega \\ \frac{\partial \tilde{u}_2^{k+1}}{\partial n} = \mu^k \text{ en } \Gamma \end{array} \right. \text{ y } \left\{ \begin{array}{l} -\Delta \tilde{u}_1^{k+1} = f, \text{ en } \Omega_2 \\ \tilde{u}_1^{k+1} = 0, \text{ en } \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega \\ \tilde{u}_1^{k+1} = \tilde{u}_2^{k+1} \text{ en } \Gamma \end{array} \right.$$

el parámetro  $\mu^k$  calculado a cada iteración :

$$\mu^{k+1} = \theta \frac{\partial \tilde{u}_1^{k+1}}{\partial n} + (1 - \theta)\mu^k, \quad 1 > \theta > 0.$$

Sea  $\lambda^0 \in \Lambda$ ;

$$\begin{cases} a_1(u_1^{k+1}, v_1) = (f, v_1)_1, \text{ para todo } v_1 \in V_1^0 \\ u_1^{k+1} = \lambda^k \text{ en } \Gamma \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} a_2(u_2^{k+1}, v_2) = (f, v_2)_2, \text{ para todo } v_2 \in V_2^0 \\ a_2(u_2^{k+1}, \mathcal{R}_2\mu) = (f, \mathcal{R}_2\mu)_2 + (f, \mathcal{R}_1\mu)_1 - a_1(u_1^{k+1}, \mathcal{R}_1\mu) \\ \text{para todo } \mu \in \Lambda \end{cases}$$

con la evolución de  $\lambda$  definida por :

$$\lambda^{k+1} = \theta u_2^{k+1} + (1 - \theta)\lambda^k, \quad 1 > \theta > 0.$$

Este método puede ser interpretado como una iteración de Richardson preconditionada por el operador de Steklov-Poincaré  $S_2$ ; la primera ecuación puede reescribirse de la manera siguiente :

$$u_1^{k+1} = H_1 \lambda^k + G_1 f \quad (49)$$

con  $H_1 \lambda^k$  la solución de : determinar  $H_1 \lambda^k \in V_1$  tal que

$$\begin{cases} a_1(H_1 \lambda^k, v_1) = 0, \text{ para todo } v_1 \in V_1^0 \\ H_1 \lambda^k = \lambda^k \text{ en } \Gamma \end{cases}$$

y  $G_1 f$  es la solución de ; determinar  $G_1 f \in V_1^0$  tal que

$$a_1(G_1 f, v_1) = (f, v_1)_1, \text{ para todo } v_1 \in V_1^0$$

Por otro lado, si escribimos  $u_2^{k+1} = u_2^{k+1} - G_2 f + G_2 f$  se verifica que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta(u_2^{k+1} - G_2 f) = 0, \text{ en } \Omega_2 \\ u_2^{k+1} - G_2 f = 0 \text{ en } \partial\Omega \cap \Omega_2 \\ \frac{\partial(u_2^{k+1} - G_2 f)}{\partial n_2} = -\frac{\partial(u_1^{k+1})}{\partial n} + \frac{\partial(G_2 f)}{\partial n} \end{array} \right.$$

pues  $n_2 = -n_1 = n$ . Entonces :

$$\begin{aligned} u_2^{k+1}|_{\Gamma} &= (u_2^{k+1} - G_2 f)|_{\Gamma} \\ &= S_2^{-1} \left( -\frac{\partial(H_1 \lambda^k)}{\partial n} - \frac{\partial(G_1 f)}{\partial n} + \frac{\partial(G_2 f)}{\partial n} \right) \\ &= S_2^{-1} (-S_1 \lambda^k + \chi) \text{ con } \chi = \frac{\partial(G_2 f)}{\partial n} - \frac{\partial(G_1 f)}{\partial n} \end{aligned}$$

Podemos ahora re-escribir la evolución de  $\lambda$  como una iteración de Richardson :

$$\begin{aligned}\lambda^{k+1} &= \theta u_2^{k+1}|_{\Gamma} + (1 - \theta)\lambda^k = \lambda^k + \theta(u_2^{k+1}|_{\Gamma} - \lambda^k) \\ &= \lambda^k + \theta(S_2^{-1}(-S_1\lambda^k + \chi) - (S_2^{-1}S_2)\lambda^k) \\ &= \lambda^k + \theta S_2^{-1}(-S\lambda^k + \chi)\end{aligned}$$

es decir una iteración de Richardson preconditionada por  $S_2$ .

Dado  $\lambda^0 \in (\Lambda)^d$  para cada  $k \geq 0$  resolver :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{encontrar } u_1^{k+1} \in (V^1)^d \\ e_1(u_1^{k+1}, v_1) = (f, v_1) \quad \forall v_1 \in (V_1^0)^d \\ u_1^{k+1} = \lambda^k \text{ en } \Gamma \end{array} \right.$$

seguido de :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{encontrar } u_2^{k+1} \in (V^2)^d \\ e_2(u_2^{k+1}, v_2) = (f, v_2) \quad \forall v_2 \in (V_2^0)^d \\ e_2(u_2^{k+1}, R_2\mu) = (f, R_2\mu) + (f, R_1\mu) - e_1(u_1^{k+1}, R_1\mu) \quad \forall \mu \in (\Lambda)^d \end{array} \right.$$

la evolución de  $\lambda^k$  en  $\lambda^{k+1}$  se obtiene de la manera siguiente :

$$\lambda^{k+1} = \theta u_2^{k+1} + (1 - \theta) \lambda^k \text{ sobre } \Gamma,$$

con  $0 < \theta < 1$ .

Dado  $\lambda^0$  definido sobre  $\Gamma$ , para  $k \geq 0$  se construyen las secuencias  $u_i^{k+1}$ ,  $i = 1, 2$  y  $\psi_i^{k+1}$ ,  $i = 1, 2$  que son solución de :

$$\begin{cases} -\Delta u_i^{k+1} = f, & \text{en } \Omega_i \\ u_i^{k+1} = 0, & \text{en } \partial\Omega_i \cap \partial\Omega \\ u_i^{k+1} = \lambda^k & \text{en } \Gamma \end{cases}$$

para  $i = 1, 2$ . A continuación resolvemos la ecuación sobre la condición en las derivadas normales.

$$\begin{cases} -\Delta \psi_i^{k+1} = f, & \text{en } \Omega_i \\ \psi_i^{k+1} = 0, & \text{en } \partial\Omega_i \cap \partial\Omega \\ \frac{\partial \psi_i^{k+1}}{\partial n} = \frac{\partial u_1^{k+1}}{\partial n} - \frac{\partial u_2^{k+1}}{\partial n}, & \text{en } \Gamma \end{cases}$$

para  $i = 1, 2$ . La evolución de  $\lambda^k$  es dada por :

$$\lambda^{k+1} = \lambda^k + \theta(\sigma_1 \psi_1^{k+1}|_{\Gamma} - \sigma_2 \psi_2^{k+1}|_{\Gamma})$$

Los parámetros verifican  $0 < \theta, \sigma_1, \sigma_2 < 1$ .

# Método Neumann-Neumann, forma variacional.

La formulación debil es la siguiente : determinar  $u_i^{k+1} \in V_i, i = 1, 2$  solución de

$$\begin{cases} a_i(u_i^{k+1}, v_i) = (f, v_i)_i, \text{ para todo } v_i \in V_i^0 \\ u_i^{k+1} = \lambda^k \text{ en } \Gamma \end{cases}$$

y  $\psi_i^{k+1} \in V_i, i = 1, 2$  solución de :

$$\begin{cases} a_1(\psi_1^{k+1}, v_1) = 0, \text{ para todo } v_1 \in V_1^0 \\ a_1(\psi_1^{k+1}, \mathcal{R}_1\mu) = - (f, \mathcal{R}_1\mu)_1 - (f, \mathcal{R}_2\mu)_2 \\ \quad + a_1(u_1^{k+1}, \mathcal{R}_1\mu) + a_2(u_2^{k+1}, \mathcal{R}_2\mu) \text{ para todo } \mu \in \Lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_2(\psi_2^{k+1}, v_2) = 0, \text{ para todo } v_2 \in V_2^0 \\ a_2(\psi_2^{k+1}, \mathcal{R}_2\mu) = (f, \mathcal{R}_1\mu)_1 + (f, \mathcal{R}_2\mu)_2 \\ \quad - a_1(u_1^{k+1}, \mathcal{R}_1\mu) - a_2(u_2^{k+1}, \mathcal{R}_2\mu) \text{ para todo } \mu \in \Lambda \end{cases}$$

## Método Neumann-Neumann, forma variacional.

El algoritmo Neumann-Neumann puede también interpretarse como un método de Richardson preconditionado. Si :

$$u_i^{k+1} = H_i \lambda^k + G_i f$$

entonces :

$$\begin{aligned}\psi_1^{k+1}|_{\Gamma} &= S_1^{-1} \left( \frac{\partial(H_1 \lambda^k)}{\partial n} - \frac{\partial(G_1 f)}{\partial n} - \frac{\partial(H_2 \lambda^k)}{\partial n} - \frac{\partial(G_2 f)}{\partial n} \right) \\ &= S_1^{-1} (-S \lambda^k + \psi).\end{aligned}$$

Si  $n = n_1 = -n_2$  obtenemos :

$$\psi_2^{k+1}|_{\Gamma} = S_2^{-1} (-S \lambda^k + \psi).$$

entonces la evolución de la condición de frontera  $\lambda^k$

$$\lambda^{k+1} = \lambda^k + \theta(\sigma_1 S_1^{-1} + \sigma_2 S_2^{-1})(\psi - S \lambda^k).$$

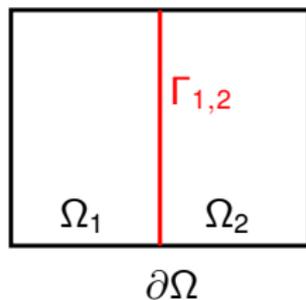
obtenemos un método de Richardson preconditionado por la matriz  $\sigma_1 S_1^{-1} + \sigma_2 S_2^{-1}$ .

$$-\Delta u = f, \text{ en } \Omega \quad (50)$$

$$u = 0, \text{ en } \partial\Omega \quad (51)$$

con  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d = 2, 3$  y  $f \in L^2(\Omega)$ .

Para obtener un método sin solapamiento vamos a considerar una formulacion multidominios equivalente a la formulación monodominio, en el caso de dos subdominios,  $k = 1, 2$  :



En el caso de dos subdominios,  $k = 1, 2$  :

$$\begin{aligned} -\Delta u_k &= f, \text{ en } \Omega_k \\ u_k &= 0 \text{ en } \partial\Omega_k \cap \partial\Omega \end{aligned}$$

con condiciones de transmisión de Robin :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial n_1} + \alpha_1 u_1 &= \frac{\partial u_2}{\partial n_1} + \alpha_1 u_2, \text{ en } \Gamma_{1,2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial n_2} + \alpha_2 u_2 &= \frac{\partial u_1}{\partial n_2} + \alpha_2 u_1, \text{ en } \Gamma_{1,2} \end{aligned}$$

## Método de Schwarz sin solapamiento, Lions 1990.

En 1990, P.L. Lions propuso el algoritmo siguiente; para  $n \geq 1$  a cada paso  $n$  se resuelve en paralelo los problemas de Robin siguientes :

$$\begin{aligned} -\Delta u_1^n &= f, \text{ en } \Omega_1 \\ u_1^n &= 0 \text{ en } \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega \\ \frac{\partial u_1^n}{\partial n_1} + \alpha_1 u_1^n &= \frac{\partial u_2^{n-1}}{\partial n_1} + \alpha_1 u_2^{n-1}, \text{ en } \Gamma_{1,2} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} -\Delta u_2^n &= f, \text{ en } \Omega_2 \\ u_2^n &= 0 \text{ en } \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega \\ \frac{\partial u_2^n}{\partial n_2} + \alpha_2 u_2^n &= \frac{\partial u_1^{n-1}}{\partial n_2} + \alpha_2 u_1^{n-1}, \text{ en } \Gamma_{1,2} \end{aligned}$$

el dato necesario para comenzar las iteraciones es

$$\frac{\partial u_k^0}{\partial n_k} + \alpha_k u_k^0 = \zeta_k^0.$$

Si notamos  $e_k^n = u_k^n - u$  el error cometido en el dominio  $k$ , para  $k = 1, 2$ , verifica las ecuaciones siguientes :

$$\begin{aligned} -\Delta e_1^n &= 0, \text{ en } \Omega_1 \\ e_1^n &= 0 \text{ en } \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega \\ \frac{\partial e_1^n}{\partial n_1} + \alpha_1 e_1^n &= \frac{\partial e_2^{n-1}}{\partial n_1} + \alpha_1 e_2^{n-1}, \text{ en } \Gamma_{1,2} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} -\Delta e_2^n &= 0, \text{ en } \Omega_2 \\ e_2^n &= 0 \text{ en } \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega \\ \frac{\partial e_2^n}{\partial n_2} + \alpha_2 e_2^n &= \frac{\partial e_1^{n-1}}{\partial n_2} + \alpha_2 e_1^{n-1}, \text{ en } \Gamma_{1,2} \end{aligned}$$

Ahora vamos a suponer que  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$  y establecer estimaciones en  $L^2(\Omega_k)$  que demostrarán que  $\|e_k^n\|_1 \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .  
Aplicando el teorema de Green se obtiene :

$$\int_{\Omega_k} (|\nabla e_k^n|^2) dx = \int_{\Gamma_{1,2}} \frac{\partial e_k^n}{\partial n_k} e_k^n d\gamma$$

pero utilizando la igualdad :

$$AB = \frac{1}{4\alpha} [(A + \alpha B)^2 - (A - \alpha B)^2]$$

$$\int_{\Gamma_{1,2}} \frac{\partial e_k^n}{\partial n_k} e_k^n d\gamma = \frac{1}{4\alpha} \int_{\Gamma_{1,2}} \left( \left( \frac{\partial e_k^n}{\partial n_k} + \alpha e_k^n \right)^2 - \left( \frac{\partial e_k^n}{\partial n_k} - \alpha e_k^n \right)^2 \right) d\gamma$$

Usando las condiciones de interfaz se obtiene :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_k} (|\nabla e_k^n|^2) dx + \frac{1}{4\alpha} \int_{\Gamma_{1,2}} \left( \frac{\partial e_k^n}{\partial n_k} - \alpha e_k^n \right)^2 d\gamma \\ = \frac{1}{4\alpha} \int_{\Gamma_{1,2}} \left( \frac{\partial e_l^{n-1}}{\partial n_l} - \alpha e_l^{n-1} \right)^2 d\gamma \end{aligned}$$

para  $k = 1, 2$  y  $l \neq k$ .

Sumando en  $k$  :

$$\underbrace{\sum_{k=1}^2 \int_{\Omega_k} |\nabla e_k^n|^2 dx}_{E^n} + \underbrace{\frac{1}{4\alpha} \sum_{k=1}^2 \int_{\Gamma_{1,2}} \left( \frac{\partial e_k^n}{\partial n_k} - \alpha e_k^n \right)^2 d\gamma}_{B^n}$$

$$= \underbrace{\sum_{k=1}^2 \frac{1}{4\alpha} \int_{\Gamma_{1,2}} \left( \frac{\partial e_k^{n-1}}{\partial n_k} - \alpha e_k^{n-1} \right)^2 d\gamma}_{B^{n-1}}$$

Sumando en  $n = 1, \dots, M$  :

$$\sum_{n=1}^M (E_n + B_n) = \sum_{n=1}^M B_{n-1}.$$

Utilizando el carácter telescópico :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^M \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega_k} |\nabla e_k^n|^2 dx + \frac{1}{4\alpha} \sum_{k=1}^2 \int_{\Gamma_{1,2}} \left( \frac{\partial e_k^M}{\partial n_k} - \alpha e_k^M \right)^2 d\gamma \\ = \sum_{k=1}^2 \frac{1}{4\alpha} \int_{\Gamma_{1,2}} \left( \frac{\partial e_k^0}{\partial n_k} - \alpha e_k^0 \right)^2 d\gamma \end{aligned}$$

En consecuencia la serie de términos positivos  $\sum_{n=1}^{\infty} E^n \leq B^0$ , está acotada, podemos concluir que  $\lim_{n \rightarrow \infty} E^n = 0$ . Entonces

$|e_1^n|_1^2 + |e_2^n|_1^2 \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Pero  $|\cdot|_1$  es equivalente a la norma  $\|\cdot\|_1^2$  en  $H_0^1(\Omega)$  tenemos la convergencia a zero de la función error.

# Método de Schwarz sin solapamiento, Elección del parámetro $\alpha$ .

Consideremos el caso de una dimensión :

$$\begin{cases} -u'' = f \text{ en } (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

La descomposición del dominio  $(0, 1)$  es de la forma  $\Omega_1 = (0, \gamma)$  y  $\Omega_2 = (\gamma, 1)$ .

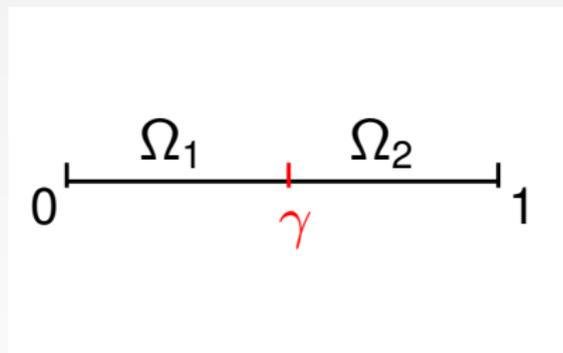


Figure – Descomposición de dominios en 1D.

# Método de Schwarz sin solapamiento, Elección del parámetro $\alpha$ .

El error  $e_k^n = u_k^n - u$ ,  $k = 1, 2$  verifica la ecuación siguiente :

$$-e_k^{n''} = 0 \text{ en } \Omega_k$$

$$\frac{\partial e_1^n}{\partial n_1} + \alpha_1 e_1^n = \frac{\partial e_2^{n-1}}{\partial n_1} + \alpha_1 e_2^{n-1}, \text{ en } \Gamma_{1,2}$$

$$\frac{\partial e_2^n}{\partial n_2} + \alpha_2 e_2^n = \frac{\partial e_1^{n-1}}{\partial n_2} + \alpha_2 e_1^{n-1}, \text{ en } \Gamma_{1,2}, \quad e_1^n(0) = 0, \quad e_2^n(1) = 0$$

La solución está dada por  $e_1^n = C_1^n x$  y  $e_2^n = C_2^n (x - 1)$  y las condiciones de interfaz ( o de transmisión) en  $x = \gamma$  :

$$C_1^n + \alpha_1 C_1^n \gamma = C_2^{n-1} + \alpha_1 C_2^{n-1} (\gamma - 1)$$

$$C_1^n (1 + \alpha_1 \gamma) = C_2^{n-1} (1 - \alpha_1 (1 - \gamma)),$$

$$-C_2^n + \alpha_2 C_2^n (\gamma - 1) = -C_1^{n-1} + \alpha_2 C_1^{n-1} \gamma$$

$$C_2^n (1 + \alpha_2 (1 - \gamma)) = C_1^{n-1} (1 - \alpha_2 \gamma)$$

Esto permite determinar  $C_1^n$  y  $C_2^n$ .

## Método de Schwarz sin solapamiento, Elección del parámetro $\alpha$ .

Así el factor de convergencia  $\rho_1 = \frac{e_1^n}{e_1^{n-2}}$  es dado por  $\frac{C_1^n}{C_1^{n-2}}$  y entonces :

$$\rho_1 = \left( \frac{1 - \alpha_1(1 - \gamma)}{1 + \alpha_1\gamma} \right) \left( \frac{1 - \alpha_2\gamma}{1 + \alpha_2(1 - \gamma)} \right)$$

y el algoritmo converge en dos iteraciones ( $\rho = 0$ ) si elegimos :

$$\alpha_1 = \frac{1}{1 - \gamma}, \text{ y } \alpha_2 = \frac{1}{\gamma}$$

se obtiene el mismo resultado si se considera  $\rho_2 = \frac{e_2^n}{e_2^{n-2}} = \frac{C_2^n}{C_2^{n-2}}$ .

# Método FETI (Finite Element Tearing and Interconnecting method).

Consideramos el caso auto adjunto y elíptico (coercivo) siguiente :

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (a(x)\nabla u(x)) + c(x)u(x) = f(x) & x \in \Omega \\ u(x) = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

La formulación debil consiste en encontrar  $u \in H_0^1(\Omega)$  tal que :

$$A(u, v) = F(u)$$

con

$$\begin{cases} A(u, v) = \int_{\Omega} (a\nabla u\nabla v + cuv) dx \\ F(v) = \int_{\Omega} f v dx \end{cases}$$

Como el problema es auto adjunto y elíptico, por el teorema de Lax-Milgram es equivalente a un problema de minimización : calcular  $u \in H_0^1(\Omega)$  argumento mínimo de una energía :

$$J(u) = \min_{v \in H_0^1(\Omega)} J(v)$$

con

$$J(v) = \frac{1}{2}A(v, v) - F(v)$$

# Método FETI, Introducción.

Si consideramos una descomposición geométrica del dominio  $\Omega$ , en  $m$  subdominios  $\Omega_1, \dots, \Omega_m$ , definimos las fronteras y interfaces :  
 $\Gamma^I = \partial\Omega_I \cap \Omega$  y  $\Gamma_I = \partial\Omega_I \cap \partial\Omega$ .

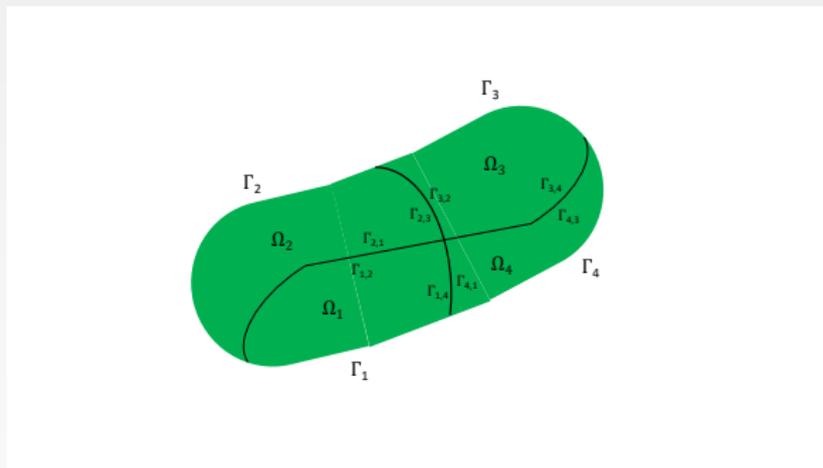


Figure – descomposición en sub dominios, sin solapamiento, notación

Podemos definir un problema en cada subdominio  $I$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_I(u, v) = \int_{\Omega_I} (a \nabla u_I \nabla v_I + c u_I v_I) dx, \quad \forall u_I, v_I \in H_{\Gamma_I}^1(\Omega_I) \\ F_I(v_I) = \int_{\Omega_I} f v_I dx \\ H_{\Gamma_I}^1(\Omega_I) = \{v \in H^1(\Omega_I) \text{ tal que } v = 0 \text{ en } \Gamma_I\} \end{array} \right.$$

Dado un conjunto de funciones  $v_\epsilon = (v_1, \dots, v_m)$  con  $v_l \in H_{\Gamma_l}^1(\Omega_l)$  podemos definir una energía :

$$J_\epsilon(v_\epsilon) = \sum_{l=1}^m \left( \frac{1}{2} A_l(v_l, v_l) - F_l(v_l) \right)$$

Si  $v \in H_0^1(\Omega)$  es tal que  $v = v_l$  en  $\Omega_l$  para  $1 \leq l \leq m$  entonces :

$$J(v) = J_\epsilon(v_\epsilon)$$

En general  $v_i \neq v_j$  en  $\Gamma_{ij} = \partial\Omega_i \cap \Omega_j$ .

Definimos para uso técnico los conjuntos siguientes :

Notemos  $I^*(I) = \{j : \Gamma_{Ij} \neq \emptyset\}$ , está claro que si  $j \in I^*(I) \Leftrightarrow I \in I^*(j)$ .

- $I(I) \subset I^*(I) = \{j : \Gamma_{Ij} \text{ tal que si } \Gamma_{Ij} \neq \emptyset \text{ entonces } j \in I(I) \text{ o } I \in I(j) \text{ pero no los dos al mismo tiempo}\}$ .
- $I_* \subset I(I)$  las interfaces de dimension  $d - 1$  cuando  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ .
- $\mathcal{V}_0 = \{v_\epsilon : v_I = v_j \text{ en } \Gamma_{Ij}, \text{ si } j \in I(I); 1 \leq I \leq m\}$ .

Es decir que  $\mathcal{V}_0$  es el conjunto de funciones definidas en los subdominios continuas através de las interfaces.

Para obtener soluciones continuas através las interfaces introducimos el problema siguiente :

Minimizar  $J_\epsilon(v_\epsilon)$  en  $\mathcal{V}_0$ . Es decir calcular  $u_\epsilon$  tal que :

$$J_\epsilon(u_\epsilon) = \min_{v_\epsilon \in \mathcal{V}_0} J_\epsilon(v_\epsilon) \quad (52)$$

El método FETI consiste en resolver el problema de optimización (52) utilizando multiplicadores de Lagrange.

A continuación se resuelve el problema de punto silla resultante utilizando el gradiente proyectado, pre condicionado.

Consideremos  $\mathcal{T}_h(\Omega)$  una triangulación de  $\Omega$  casi-uniforme. Sea  $V_h$  el espacio de elementos finitos asociado a la triangulación  $\mathcal{T}_h(\Omega)$ . El problema discreto se enuncia : encontrar  $u_h \in V_h \cap H_0^1(\Omega)$  tal que :

$$A(u_h, v_h) = F(v_h) \quad \forall v_h \in V_h \cap H_0^1(\Omega)$$

Si  $u_h(x) = \sum_{i=1}^{N_h} U_i \varphi_i(x)$  con  $\varphi_i, i = 1, \dots, N_h$  una base de

$X_h = V_h \cap H_0^1(\Omega)$  obtenemos un sistema lineal.

$$AU = F$$

con

$$(A)_{i,j} = A(\varphi_j, \varphi_i) = A(\varphi_i, \varphi_j)$$

$$(F)_j = \int_{\Omega} f \varphi_j dx$$

$$U = (U_1, \dots, U_{N_h})^t$$

Si ahora consideramos una descomposición de dominios de  $\Omega$  sin solapamiento  $\{\Omega_1, \dots, \Omega_m\}$ .

$\Omega_4$	$\Omega_5$	$\Omega_9$	$\Omega_{13}$
$\Omega_3$	$\Omega_6$	$\Omega_{10}$	$\Omega_{14}$
$\Omega_2$	$\Omega_7$	$\Omega_{11}$	$\Omega_{15}$
$\Omega_1$	$\Omega_8$	$\Omega_{12}$	$\Omega_{16}$

Figure – descomposición en 16 sub dominios.

Anotamos  $\Omega(l)$  los nodos interiores de  $\Omega_l$  y  $\Gamma^{(l)}$  los nodos en el borde  $\Omega_l$ . El conjunto de todos los nodos en las interfaces son :

$$\Gamma = \cup_{l=1}^m \Gamma^{(l)}$$

El número de nodos en  $\Omega_l$  lo llamamos  $N_l^{(l)}$  y el número de nodos en  $\Gamma^{(l)}$  es  $N_\Gamma^{(l)}$ .

Llamamos  $N_l = N_l^{(l)} + N_\Gamma^{(l)}$ .

Sea  $U_I^{(l)} \in \mathbb{R}^{N_I^{(l)}}$  y  $U_\Gamma^{(l)} \in \mathbb{R}^{N_\Gamma^{(l)}}$  los valores de  $U$  correspondientes a los nodos de  $\Omega_I$  y  $\Gamma^{(l)}$  respectivamente.

Los desplazamientos locales, la matriz de rigidez y las cargas locales son llamadas :

$$U_I = \begin{pmatrix} U_I^{(l)} \\ U_\Gamma^{(l)} \end{pmatrix}, \quad A^{(l)} = \begin{pmatrix} A_{II}^{(l)} & A_{I\Gamma}^{(l)} \\ A_{\Gamma I}^{(l)t} & A_{\Gamma\Gamma}^{(l)} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad F_I = \begin{pmatrix} F_I^{(l)} \\ F_\Gamma^{(l)} \end{pmatrix}$$

para  $1 \leq l \leq m$ .

Si  $R_l$  es la restricción de  $\mathbb{R}^{N_h} \rightarrow \mathbb{R}^{N_l}$ ,  $U_l = R_l U$ . La transpuesta  $R_l^t$  expande  $U_l$  a un  $U$  completado con zeros. Entonces tenemos que :

$$A = \sum_{l=1}^m R_l^t A^{(l)} R_l$$
$$F = \sum_{l=1}^m R_l^t F_l$$

que son las relaciones entre las cantidades locales y globales.

Si  $c(x) = 0$  y  $\bar{\Omega}_l \subset \Omega$  (el caso de los subdominios  $\Omega_6, \Omega_{10}, \Omega_7, \Omega_{11}$  en la figura) la matriz  $A^{(l)}$  puede ser singular.

Puede ser de dimensión  $d_l \geq 1$ . En este caso definimos  $Z^{(l)}$  es la matriz de dimensión  $N_l \times d_l$  donde las columnas son la base del  $\text{Kernel}(A^{(l)})$  :

$$\text{Imagen}(Z^{(l)}) = \text{Kernel}(A^{(l)})$$

Si  $A^{(l)}$  es regular  $Z^{(l)} = 0$  y  $d_l = 0$ .

El equivalente del teorema de Lax-Milgram en el caso discreto nos dice que si  $A = A^t$  es estrictamente definida positiva y  $AU = F$  entonces :

$$J(U) = \min_{V \in \mathbb{R}^{N_h}} J(V)$$

con  $J(V) = \frac{1}{2} V^t A V - V^T F \quad \forall V \in \mathbb{R}^{N_h}$ .

En el método FETI el funcional de energía no impone la continuidad de las incógnitas a través de las interfaces. Esta continuidad es impuesta por medio de restricciones.

Si ahora introducimos una notación más próxima con la elasticidad lineal el vector de desplazamiento global  $v_\epsilon = (v_1^t, \dots, v_m^t)^t$  es de dimension  $N_\epsilon = N_1 + \dots + N_l$  y los vectores  $v_l = (v_l^t, v_\Gamma^t)^t$  son los desplazamientos locales.

La carga global es definida como  $f_\epsilon = (f_1^t, \dots, f_l^t)^t$  donde  $f_l^t = (f_l^{(l)t}, f_\Gamma^{(l)t})$  son las cargas locales.

La matrix de rigidez global es block diagonal :

$$A_\epsilon = \begin{pmatrix} A^{(1)} & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & A^{(m)} \end{pmatrix} \quad (53)$$

Definimos también la matriz global  $Z$  de dimensión  $N_\epsilon \times d$  tal que :

$$Z = \begin{pmatrix} Z^{(1)} & & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & Z^{(m)} \end{pmatrix} \quad (54)$$

donde  $Z^{(l)}$  son las matrices de dimensión  $N_l \times \min\{1, d_l\}$  donde las columnas son una base del  $\text{Kernel}(A^{(l)})$ , entonces  $d = \sum_{l=1}^m d_l$ . La construcción de la matriz  $Z^{(l)}$  puede realizarse utilizando el método de triangulación de Gauss.

Ahora podemos introducir la versión discreta de la energía  $J_\epsilon(w_\epsilon)$  como :

$$J_\epsilon(w_\epsilon) = \frac{1}{2} w_\epsilon^t A_\epsilon w_\epsilon - w_\epsilon^t f_\epsilon$$

Cuando la continuidad es verificada en las interfaces, es decir si  $w_l = R_l v$ , podemos demostrar una igualdad entre  $J(v)$  y  $J_\epsilon(w_\epsilon)$ .  
Éxplicitamente si  $v \in \mathbb{R}^{N_h}$  :

- Definimos  $w_\epsilon = (w_1^t, \dots, w_m^t)$  con  $w_l = R_l v$ .
- Definimos  $f = \sum_{l=1}^m f_l$  y  $f_\epsilon = (f_1^t, \dots, f_m^t)$ .
- Definimos la energía extendida :

$$J_\epsilon(w_\epsilon) = \frac{1}{2} w_\epsilon^t A_\epsilon w_\epsilon - w_\epsilon^t f_\epsilon$$

entonces :  $J(v) = J_\epsilon(w_\epsilon)$ .

Para obtener un problema de minimisation tal que  $w_l = R_l v$  se introduce una restriction lineal de la forma  $Mw_\epsilon = 0$  donde  $M$  es una matriz de dimensión  $m \times N_\epsilon$  que verifica :

$w_l = R_l v, l = 1, \dots, m$  si y solamente si  $Mw_\epsilon = 0$  y  $w_\epsilon = (w_1^t, \dots, w_m^t)$ .

Es decir que el conjunto definido por las restricciones

$\mathcal{V}_0 = \{v_\epsilon : v_l = v_j \text{ en } \Gamma_{lj}, \text{ si } j \in I(l); 1 \leq l \leq m\}$  en el caso discreto se escribe :  $\mathcal{V}_0 = \{v_\epsilon \in \mathbb{R}^{N_\epsilon} : Mw_\epsilon = 0\}$ .

Así el problema de minimización toma la forma : calcular  $w_\epsilon \in \mathbb{R}^{N_\epsilon}$  tal que :

$$\begin{aligned} J_\epsilon(w_\epsilon) &= \min_{w_\epsilon \in \mathbb{R}^{N_\epsilon}} J_\epsilon(v_\epsilon) \\ Mv_\epsilon &= 0 \end{aligned} \tag{55}$$

Se puede demostrar que si  $u$  es solución del problema original monodominio y  $w_\epsilon$  es solución de (55), entonces  $w_l = R_l u, l = 1, \dots, l$

La matriz  $M$  es tal que  $\mathcal{V}_0 = \text{Kernel}(M)$ , y tal que obligue a los desplazamientos  $w_\Gamma^{(i)}$  y  $w_\Gamma^{(j)}$  a ser continuos a través de la frontera  $\Gamma_{ij}$ .

Sea  $\{x_1, \dots, x_{N_\Gamma}\}$  el conjunto de los nodos de interpolación en la interfaz  $\Gamma$ . Comenzamos por definir los conjuntos y cantidades siguientes :

- $W(i) = \{j : x_i \in \partial\Omega_j\}$ , el conjunto de los índices de interfaces a las cual  $x_i$  pertenece.
- $\text{grado}(x_i) = \#(W(i))$ , el número de elementos de  $W(i)$ , es decir el número de interfaces a las cuales  $x_i$  pertenece.
- $\text{índice}(x_l, \Gamma^{(j)}) =$  al índice local de  $x_l$  en  $\Gamma^{(j)}$

La idea inmediata es obligar a que  $v_l(x_i) - v_j(x_i) = 0$  para todo par  $l, j \in W(x_i)$ .

Puede ocurrir que algunos nodos de la interfaz pertenezcan a más de dos subdominios,  $\text{grado}(x_i) \geq 3$ .

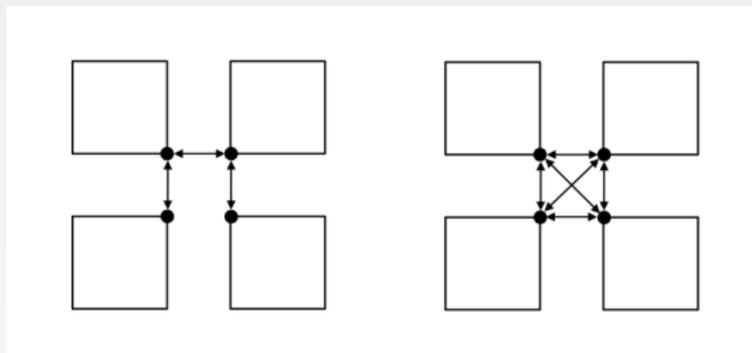


Figure – Caso con el  $\text{grado}(x_i) \geq 3$

y entonces aparecen ecuaciones redundantes. Será necesario seleccionar un pequeño número de restricciones de manera a que todas las condiciones de continuidad sean verificadas sin redundancia.

La matriz  $M$  será de la forma :

$$M = \left[ M^{(1)}, \dots, M^{(m)} \right]$$

tal que  $Mv_\epsilon = M^{(1)}v_1 + \dots + M^{(m)}v_m$  donde  $M^{(i)}$  es de dimensión  $r \times N_i$ .

Descomponemos  $v_i = (v_I^{(i)t}, v_\Gamma^{(i)t})^t$  separando los nodos internos a  $\Omega_i$  de los nodos de la interfaz  $\Gamma$ .

La matriz  $M^{(i)} = \left[ M_I^{(i)}, M_\Gamma^{(i)} \right] = \left[ 0, M_\Gamma^{(i)} \right]$  pues los nodos internos no participan a las restricciones, la continuidad está garantizada por el espacio de interpolación.

Si  $\forall l, j \in W(x_i)$  con  $l < j$  anotamos  $\tilde{l}_i = \text{índice}(x_i, \Gamma^{(l)})$  y  $\tilde{j}_i = \text{índice}(x_i, \Gamma^{(j)})$ , las restricciones toman la forma :

$$(v_{\Gamma}^{(l)})_{\tilde{l}_i} - (v_{\Gamma}^{(j)})_{\tilde{j}_i} = 0$$

en consecuencia los coeficientes de  $M$  son de la forma  $\{-1, 0, 1\}$ .

Una manera de construir  $M$  es la siguiente : para cada  $W(x_i)$  se organizan los índices en orden creciente. A continuación para cada par de índices consecutivos imponemos una sola restricción, es decir en total  $\text{grado}(x_i) - 1$  restricciones. El número total de restricciones es entonces :

$$r = \sum_{i=1}^{N_\Gamma} (\text{grado}(x_i) - 1)$$

Por construcción la matriz  $M$  es de rango maximal, no hay restricciones redundantes,  $r = \text{rango}(M)$ , y la dimensión de  $M$  es  $r \times N_\epsilon$ .

Si  $l < j$  son dos índices consecutivos en  $W_{(i)}$ , sea  $k(i, l, j)$  un índice entre 1 y  $r$  asignado a la restricción involucrando  $v_l$  y  $v_j$ . Podemos ahora definir los coeficientes de  $M$  :

$$(M_{\Gamma}^{(l)})_{k,s} = 1, \text{ si } s = \tilde{l}_i$$

$$(M_{\Gamma}^{(l)})_{k,s} = 0, \text{ si } s \neq \tilde{l}_i$$

$$(M_{\Gamma}^{(j)})_{k,s} = 1, \text{ si } s = \tilde{j}_i$$

$$(M_{\Gamma}^{(j)})_{k,s} = 0, \text{ si } s \neq \tilde{j}_i$$

todos los otros coeficientes son nulos.

Una segunda posibilidad es la redundancia, imponemos una restricción para todo  $l < j$ ,  $l, j \in W(x_i)$ . Obtenemos así  $\frac{1}{2}(\text{grado}(x_i)(\text{grado}(x_i) - 1))$  restricciones y

$$r = \sum_{i=1}^{N_r} \frac{1}{2}(\text{grado}(x_i)(\text{grado}(x_i) - 1))$$

En los dos casos

$$\mathcal{V}_0 = \text{Kernel}(M) = \{(R_1 v)^t, \dots, (R_m v)^t : v \in \mathbb{R}^{N_h}\}.$$

El objetivo es ahora : resolver el problema de minimización siguiente, calcular  $u_\epsilon = (u_1^y, \dots, u_m^t) \in \mathbb{R}^{N_\epsilon}$  solución de

$$J_\epsilon(u_\epsilon) = \min_{w_\epsilon \in \mathcal{V}_0} J_\epsilon(w_\epsilon)$$

donde :

$$J_\epsilon(w_\epsilon) = \frac{1}{2} w_\epsilon^t A_\epsilon w_\epsilon - w_\epsilon^t f_\epsilon$$

y  $\mathcal{V}_0 = \text{Kernel}(M) = \{w_\epsilon \in \mathbb{R}^{N_\epsilon} : Mw_\epsilon = 0\}$ .

El objetivo de la formulación utilizando los multiplicadores de Lagrange es de buscar una solución del problema de minimización como el punto silla del Lagrangiano asociado.

Dado  $\mu \in \mathbb{R}^r$  el Lagrangiano asociado al problema de optimización es dado por :

$$\mathcal{L}(w_\epsilon, \mu) = J_\epsilon(w_\epsilon) + \mu^t M w_\epsilon = \frac{1}{2} w_\epsilon^t A_\epsilon w_\epsilon - w_\epsilon^t f_\epsilon + \mu^t M w_\epsilon$$

Las variables  $w_\epsilon$ , los desplazamientos, son llamadas variables primales; la variables  $\mu$ , los multiplicadores de Lagrange son llamadas variables duales, y representan el flujo entre dominios.

Podemos definir una función dual, para todo  $\mu \in \mathbb{R}^r$  definimos  $D(\mu)$  :

$$D(\mu) = \inf_{v_\epsilon} \mathcal{L}(v_\epsilon, \mu)$$

Visto que  $A_\epsilon$  puede ser singular este infimo puede ser  $-\infty$  si  $(f_\epsilon - M^t \mu) \notin \text{Imagen}(A_\epsilon)$ . Como la matriz  $Z$  es de *rango* =  $d$ , se verifica que :

$$\text{Imagen}(Z) = \text{Kernel}(A_\epsilon)$$

Podemos definir un conjunto de multiplicadores de Lagrange admisibles :

$$\mathcal{G} = \{\mu : Z^t(f_\epsilon - M^t \mu) = 0\}$$

en consecuencia si  $\mu \in \mathcal{G}$  entonces  $D(\mu) > -\infty$ .

Para  $v_\epsilon \in \mathbb{R}^{N_\epsilon}$  definimos la función  $E(v_\epsilon)$  :

$$E(v_\epsilon) = \sup_{\mu} \mathcal{L}(v_\epsilon, \mu)$$

Como  $\mathcal{L}$  es lineal en función de  $\mu$ , verificamos que :

$$E(v_\epsilon) = \begin{cases} +\infty, & \text{si } Mv_\epsilon \neq 0 \\ J_\epsilon(v_\epsilon), & \text{si } Mv_\epsilon = 0 \end{cases}$$

Para los desplazamientos admisibles, es decir aquellos que verifican  $Mv_\epsilon = 0$  , tenemos que  $E(v_\epsilon) = J_\epsilon(v_\epsilon) < \infty$ .

## Definición

Un punto  $(u_\epsilon, \lambda)$  es un punto silla del Lagrangiano  $\mathcal{L}$  si verifica la condición siguiente :

$$\mathcal{L}(u_\epsilon, \mu) \leq E(u_\epsilon) = \mathcal{L}(u_\epsilon, \lambda) = D(\lambda) \leq \mathcal{L}(v_\epsilon, \lambda) \quad \forall v_\epsilon, \mu$$

Derivando con respecto a las variables primales y duales se obtiene que un punto crítico  $(u_\epsilon, \lambda)^t$  de  $\mathcal{L}(v_\epsilon, \mu)$  verifica la condición de primer orden siguiente :

$$\begin{cases} A_\epsilon u_\epsilon + M^t \lambda = f_\epsilon \\ Mu_\epsilon = 0 \end{cases}$$

En el caso donde la matriz  $A_\epsilon$  es regular( invertible) y en consecuencia, por construcción estrictamente definida positiva, podemos resolver el problema de optimización utilizando un método clasico para la minimization de un problema quadratico, convexo con restricciones de igualdad.

En lo que sigue consideramos que si  $A_\epsilon$  es singular, entonces la matriz  $Z$  es de rango  $d = \sum_{l=1}^m d^{(l)}$ .

La pseudo-inversa de Moore-Penrose es una generalización de la inversa de matriz, mismo rectangular. Existe para toda matriz y es única.

Sea  $A$  una matriz de dimensión  $n \times m$  a coeficientes en  $\mathbb{R}$ , admite una pseudo-inversa  $A^\dagger$  de dimensión  $m \times n$  a coeficientes en  $\mathbb{R}$  que es única. Se la puede caracterizar de la manera siguiente : una matriz  $G$  es igual a  $A^\dagger$  si :

1  $AGA = A$

2  $GAG = G$

3  $(AG)^t = AG$

4  $(GA)^t = GA$

Esta caracterización no es constructiva, pero permite verificar si una matriz  $A^\dagger$  es la pseudo-inversa de una matriz  $A$  dada.

Una observación : Si  $\bar{y}$  es un vector de  $\mathbb{R}^n$  y  $\bar{y}^{ast} = A^\dagger \bar{y}$  para todo  $\bar{x} \in \mathbb{R}^m$  tenemos que

$$\|A\bar{y}^{ast} - \bar{y}\| \leq \|A\bar{x} - \bar{y}\|$$

es decir que  $A\bar{y}^{ast}$  es la proyección de  $\bar{y}$  en el espacio generado por las columnas de  $A$ . Mas aun es solución de :

$$A\bar{x} = \bar{y}$$

en el sentido de minimos cuadrados.

Si la matriz  $A$  tiene sus líneas linealmente independientes (es decir invertible a derecha) entonces :  $A^\dagger = A^t(AA^t)^{-1}$ .

Si la matriz  $A$  tiene sus columnas linealmente independientes (es decir invertible a izquierda) entonces :  $A^\dagger = (AA^t)^{-1}A^t$ .

## Pseudo inversa de Moore-Penrose, sistema lineal

Supongamos que queremos resolver el sistema lineal sobre o subdeterminado siguiente :

$$Ax = b$$

con  $A$  una matriz rectangular de dimensión  $n \times m$ ,  $x \in \mathbb{R}^m$  y  $b \in \mathbb{R}^n$ . Anotamos el espacio generado por  $b$ ,  $R(b)$ .

Entonces  $R(b) \subseteq \text{Im}(A)$  si y solamente si  $AA^\dagger b = b$ . Lo que quiere decir que el sistema

$$Ax = b$$

tiene una solución solamente si  $R(b) \subseteq \text{Im}(A)$ .

Si  $R(b) \subseteq \text{Im}(A)$  entonces  $\forall \gamma \in \mathbb{R}$  existe un vector  $v$  tal que :

$$Av = \gamma b$$

y

$$Av = \gamma b = AA^\dagger Ab = AA^\dagger \gamma b$$

Sea  $\gamma = 1$  entonces  $AA^\dagger b = b$ , reciprocamente :si  $AA^\dagger b = b$  entonces  $A(A^\dagger b) = b$  y podemos decir que  $b \in \text{Im}(A)$ .

## Pseudo inversa de Moore-Penrose, sistema lineal

Si  $A$  una matriz rectangular de dimensión  $n \times m$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$  y se verifica que  $AA^\dagger b = b$ . Entonces todo vector de la forma :

$$x = A^\dagger b + (I - A^\dagger A)y$$

es una solución de  $Ax = b$  para todo  $y \in \mathbb{R}^m$ . En efecto :

$$\begin{aligned} Ax &= AA^\dagger b + (I - A^\dagger A)y \\ &= b + (A - AA^\dagger A)y \\ &= b \text{ gracias a la primera condición de la caracterización} \end{aligned}$$

Por otro lado : si  $z$  es solución :

$$z = A^\dagger Az + (I - A^\dagger A)z = A^\dagger b + (I - A^\dagger A)z$$

es decir toda solución tiene esta forma.

Podemos observar que si  $A$  es cuadrada y invertible  $A^\dagger = A^{-1}$  y donc  $x = A^{-1}b$  es solución unica. Es el solo caso.

Un método para calcular la pseudo-inversa es la utilización de la descomposición en valores singulares SVD.

Una matriz  $A$  de dimensión  $n \times m$  de rango  $r \leq n$  admite una factorización :

$$A = UDV^*$$

Donde :

- $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$  y  $V \in \mathbb{C}^{m \times m}$  son dos matrices unitarias.
- $D$  es una matriz diagonal de la forma :

$$D = \begin{bmatrix} S & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} \end{bmatrix}$$

donde  $S$  es una matriz diagonal con los valores singulares de  $A$ , es decir la raíz cuadrada de los valores propios de  $A^*A$ .

Entonces :

$$A^\dagger = VD^\dagger U^*$$

donde :

$$D^\dagger = \begin{bmatrix} S^{-1} & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} \end{bmatrix}^*$$

```
%  
% Ejemplo calculo SVD Octave  
%  
% Matriz rectangular 3x5  
A=[1 2 3;  
  0 5 6;  
  4 0 7;  
  5 6 7;  
  2 0 1]  
AA=A'*A  
% Calcul de la factorizacion SVD  
[U,D,V]=svd(A)  
% verification  
VERIF1=U*D*V'  
% Calculo de la pseudo inversa  
DM1=zeros(5,3)  
for i=1:3  
    DM1(i,i)=1/D(i,i);  
endfor  
DM1  
DM1PSEUDO=DM1'  
APSEUDO=V*DM1PSEUDO*U'  
VERIF2=A*APSEUDO*A  
VERIF3=APSEUDO*A*APSEUDO
```

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 4 & 0 & 7 \\ 5 & 6 & 7 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} -0.247929 & -0.093998 & 0.084889 & -0.911714 & -0.302102 \\ -0.475245 & -0.594249 & 0.526038 & 0.120067 & 0.360387 \\ -0.475413 & 0.739948 & 0.446812 & 0.128313 & -0.101754 \\ -0.689653 & -0.109475 & -0.656499 & 0.203849 & -0.199621 \\ -0.105051 & 0.280222 & -0.292309 & -0.310390 & 0.853612 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 14.9476 & 0 & 0 \\ 0 & 4.8545 & 0 \\ 0 & 0 & 2.8288 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} -0.3886 & 0.5930 & -0.7052 \\ -0.4690 & -0.7861 & -0.4026 \\ -0.7932 & 0.1743 & 0.5836 \end{pmatrix}$$

$$UDV^* = \begin{pmatrix} 1.0000e+00 & 2.0000e+00 & 3.0000e+00 \\ -9.1580e-16 & 5.0000e+00 & 6.0000e+00 \\ 4.0000e+00 & -2.0514e-15 & 7.0000e+00 \\ 5.0000e+00 & 6.0000e+00 & 7.0000e+00 \\ 2.0000e+00 & -8.2997e-16 & 1.0000e+00 \end{pmatrix}$$

$$D^\dagger = \begin{pmatrix} 0.0669 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2060 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3535 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^\dagger = VD^\dagger U^* =$$

$$\begin{pmatrix} -2.6201e-02 & 1.0917e-02 & 2.7293e-02 \\ -1.9138e-01 & 3.6264e-02 & 1.1240e-01 \\ -8.6387e-03 & -1.6850e-01 & -1.6850e-01 \\ 1.6822e-01 & 1.3281e-01 & -1.0276e-01 \\ 1.0983e-01 & -4.7465e-04 & -4.4665e-02 \end{pmatrix}^T$$

Verificación :

$$A * A^\dagger * A = \begin{pmatrix} 1.0000e+00 & 2.0000e+00 & 3.0000e+00 \\ 2.1094e-15 & 5.0000e+00 & 6.0000e+00 \\ 4.0000e+00 & 4.4131e-15 & 7.0000e+00 \\ 5.0000e+00 & 6.0000e+00 & 7.0000e+00 \\ 2.0000e+00 & 1.6653e-15 & 1.0000e+00 \end{pmatrix}$$

Si consideramos el problema de optimización numérica : calcular  $u \in \mathbb{R}^N$  tal que :

$$J(u) = \min_{v \in C} J(v)$$

donde  $J : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  es una función estrictamente convexa, diferenciable y  $C \subset \mathbb{R}^N$  es un conjunto convexo.

## Algoritmo

- 1) *Inicialización* :  $\epsilon > 0$ ,  $\tau > 0$ ,  $k = 0$ , elegimos  $v^0 \in \mathbb{R}^N$  y  $\rho_0 \in \mathbb{R}_+^*$ .
- 2) *Iteración en  $k$*  : para  $k = 1, \dots$  hasta la convergencia :
  - a) *verificación de la convergencia*

$$\frac{\|v^k - v^{k-1}\|}{\|v^0\|} \leq \epsilon, \text{ o } \frac{\|J(v^k) - J(v^{k-1})\|}{\|J(v^0)\|} \leq \tau$$

- b) *Cálculo de  $\nabla J(v^{k-1})$*
- c) *Calcular  $\rho_k$  argumento mínimo de la función :*

$$\varphi(\rho) = J(x^{k-1} - \rho J(v^{k-1}))$$

*con la restricción  $\rho > 0$ .*

- d) *Calcular  $x^k = P_C(x^{k-1} - \rho_k J(v^{k-1}))$ , donde  $P_C$  designa la proyección ortogonal sobre  $C$*

En el caso donde la restricción es de igualdad, es decir :

$$C = \{v \in \mathbb{R}^N : \text{tal que } Gv = b\}$$

entonces :

$$P_C = I_N - G^t(GG^t)^{-1}G.$$

En lo que sigue consideramos que si  $A_\epsilon$  es singular, entonces la matriz  $Z$  es de rango  $d = \sum_{l=1}^m d^{(l)}$ .

Definimos la matriz  $G = MZ$  de dimensión  $r \times d$ . La matriz  $G$  es de la forma :

$$G = MZ = [M^{(1)}Z^{(1)} \dots M^{(m)}Z^{(m)}].$$

Comenzamos por caracterizar el hecho que  $A_\epsilon u_\epsilon = f_\epsilon - M^t \lambda$ .

$$\begin{aligned} A_\epsilon u_\epsilon = f_\epsilon - M^t \lambda &\iff f_\epsilon - M^t \lambda \in \text{Imagen}(A_\epsilon) \\ &\iff f_\epsilon - M^t \lambda \perp \text{Kernel}(A_\epsilon) \\ &\iff Z^t(f_\epsilon - M^t \lambda) = 0 \\ &\iff G^t \lambda = Z^t f_\epsilon = g \end{aligned}$$

La solución general del sistema singular toma la forma :

$$u_\epsilon = A_\epsilon^t(f_\epsilon - M^t\lambda) + Z\alpha$$

con  $\alpha \in \mathbb{R}^r$  arbitrario.

Si ahora anotamos :

$$K = MA_\epsilon^\dagger M^T$$

$$e = MA_\epsilon^\dagger f_\epsilon$$

obtenemos

$$\begin{cases} K\lambda - G\alpha = e \\ G^t\lambda = g \end{cases}$$

Multiplicando por el projector :

$$P_0 = (I - G(G^t G)^\dagger)G^t$$

obtenemos que  $\lambda$  es solución de :

$$\begin{cases} P_0 K \lambda = P_0 e \\ G^t \lambda = g \end{cases}$$

con  $\alpha = (G^t G)^\dagger G^t (K \lambda - M A_\epsilon^\dagger f_\epsilon)$ . donde :

- $P_0 = I - G(G^t G)^\dagger G^t$ ,
- $K = M A_\epsilon^\dagger M^t$ ,
- $e = M A_\epsilon^\dagger f_\epsilon$ ,
- $g = Z^t f_\epsilon$ ,
- $A_\epsilon$  y  $(G^t G)^\dagger$  son las pseudo inversas de Moore Penrose.

Una vez  $\lambda$  calculado, los desplazamientos  $u_\epsilon$  son la solución de :

$$\begin{cases} u_\epsilon = A_\epsilon^\dagger (f_\epsilon - M^t \lambda) + Z \alpha \\ \alpha = (G^t G)^\dagger G^t (K \lambda - M A_\epsilon^\dagger f_\epsilon). \end{cases}$$

Cuando la matriz  $A_\epsilon$  es regular, la matriz  $Z$  es de rango nulo y entonces podemos prescindir del vector  $\alpha$ . En este caso :

- $K = MA_\epsilon^{-1}M^t$ ,
- $e = MA_\epsilon^{-1}f_\epsilon$ ,
- $G = 0$ ,  $P_0 = I_d$  y  $g = 0$ .

## Algoritmo

*Dato inicial :  $\lambda_0$ , (por ejemplo  $\lambda_0 = 0$ )*

1) *Calcular  $e$  y  $g$  :*

$$\begin{cases} e = MA_{\epsilon}^{\dagger} f_{\epsilon} \\ g = Z^t f_{\epsilon} \end{cases} \quad (56)$$

2) *Resolver los sistemas lineales siguientes usando la pseudo inversa (ver apendice)*

$$\begin{cases} G^t K(G\beta_* + C\gamma_*) + G^t G\delta_* = G^t P_0(e - K\lambda_0) \\ C^t K(G\beta_* + C\gamma_*) + C^t G\delta_* = C^t P_0(e - K\lambda_0) \\ G^t(G\beta_* + C\gamma_*) = G^t g \end{cases}$$

3) *Definimos  $\lambda_* = \lambda_0 + G\beta_* + C\gamma_*$ .*

## Algoritmo

- 4) Calcular el residuo :  $r_0 = P_0(K\lambda_* - e)$ .
- 5) Para  $k = 1, 2, \dots$  hasta la convergencia efectuamos la iteración siguiente :

$$\left\{ \begin{array}{l} z_{k-1} = Nr_{k-1} \\ y_{k-1} = Qz_{k-1} \\ \xi_k = r_{k-1}^t y_{k-1} \\ p_k = y_{k-1} + \frac{\xi_k}{\xi_{k-1}} p_{k-1}, \text{ si } k > 1, p_1 = y_0 \text{ si } k = 1 \\ \nu_k = \frac{\xi_k}{p_k^t P_0 K p_k} \\ \lambda_k = \lambda_{k-1} + \nu_k p_k \\ r_k = r_{k-1} - \nu_k P_0 K p_k \end{array} \right.$$

- 6) fin de la iteración en  $k$ .

## Algoritmo

7) *Calcular :*

$$\begin{cases} \alpha = (G^t G)^\dagger G^t (K\lambda - MA_\epsilon^\dagger f_\epsilon) \\ u_\epsilon = A_\epsilon^\dagger (f_\epsilon - M^t \lambda) + Z\alpha. \end{cases}$$

Para finalizar vamos a especificar la definición de las matrices  $C$ ,  $Q$  y  $N$  que aparecen en el algoritmo.

Para la definición de las matrices  $Q$  y  $C$  dos casos son posibles.

- Si en la ecuación  $c(x) = 0$  puede pasar que la matriz de rigidez local  $A^{(i)}$  sea singular. En este caso se introduce la matriz  $Z$  ya definida, entonces  $G = MZ$  y  $C = 0$ , en este caso  $Q = I - G(G^t G)^{-1} G^t$ .
- Si  $c(x) \geq c_0 > 0$  las matrices  $A^{(i)}$  son regulares entonces  $G = 0$  y la proyección  $P_0 = I_d$ . En este caso para acelerar la convergencia se considera la matriz  $C = M\tilde{Z}$  donde  $\tilde{Z}$  es una matriz de dimensión  $N_\epsilon \times r$ . Las columnas de la matriz  $\tilde{Z}$  son una base del  $\text{Kernel}(\tilde{A}_\epsilon)$ , donde  $\tilde{A}_\epsilon$  es la matriz de rigidez cuando hacemos  $c(x) = 0$ . Entonces la matriz  $Q = I - C(C^t K C)^{-1} C^t K$ .

En la literatura se propone la matriz de preconditionamiento  $N$  siguiente :

$$N = \sum_{i=1}^m M_{\Gamma}^{(i)} (A_{\Gamma\Gamma}^{(i)} - A_{\Gamma\Gamma'}^{(i)t} A_{\Gamma\Gamma''}^{(i)-1} A_{\Gamma\Gamma'}^{(i)}) M_{\Gamma}^{(i)t}$$

El algoritmo FETI descrito aquí es el algoritmo básico. Existen innumerables evoluciones en la literatura, en particular al algoritmo *FETI – DP* por dual-primal.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \mathcal{L}u = f & \text{en } Q_T = \Omega \times (0, T) \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \times (0, T) \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{en } \Omega \end{cases}$$

donde  $\Omega$  es un conjunto convexo, abierto de  $\mathbb{R}^d$  de frontera regular y  $T > 0$  es un dato. El operador  $\mathcal{L}$  está definido por :

$$\mathcal{L}u := \operatorname{div}(A\nabla u) - a_0u = \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{i,j} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) - a_0u.$$

La matriz de funciones  $A = A(x, t) = a_{i,j}(x, t)_{i,j} \in M_n(\mathbb{R})$  verifica la condición de elipticidad uniforme :  $\exists \alpha > 0$  tal que

$$(A(x, t)\xi, \xi) = \sum_{i,j=1}^d a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha|\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d, y (x, t) \in Q_T. \quad (57)$$

Los coeficientes  $a_{i,j}(x, t) \in C(\bar{\Omega} \times [0, T])$ . Las funciones  $a_0(x, t) > 0$  y  $f(x, t)$  también pertenecen a  $C(\bar{\Omega} \times [0, T])$ .

# Comenzamos por definir algunos espacios de funciones.

$$L^2((0, T); L^2(\Omega)) = \{v : (0, T) \rightarrow L^2(\Omega) / v \text{ integrable y } \int_0^T \|v\|_0^2 dx < \infty\},$$

$$L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) = \{v : (0, T) \rightarrow H_0^1(\Omega) / v \text{ integrable y } \int_0^T \|v\|_1^2 dx < \infty\},$$

$$L^2(0, T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) = \{v : (0, T) \rightarrow H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) / v \text{ integrable y}$$

$$\int_0^T \|v\|_1^2 dx < \infty$$

$$\text{y } \int_0^T \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial^2 x_j} \right\|_1^2 dx < \infty \forall j\},$$

$$C^0([0, T]; L^2(\Omega)) = \{v : [0, T] \rightarrow L^2(\Omega) / v \text{ es continua en } [0, T] \\ \text{y } \forall t \in [0, T], v(\cdot, t) \in L^2(\Omega)\},$$

$$C^0([0, T]; H_0^1(\Omega)) = \{v : [0, T] \rightarrow L^2(\Omega) / v \text{ es continua en } [0, T] \text{ y} \\ \forall t \in [0, T], v(\cdot, t) \in H_0^1(\Omega)\}.$$

Podemos también definir las siguientes formas bilineales :

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \left( \sum_{i,j=1}^d a_{i,j} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) + a_0 u v dx.$$

Si  $\mathcal{L}$  es el laplaciano entonces podemos afirmar que : si  $f \in L^2(Q_T)$  y  $u_0 \in L^2(\Omega)$  entonces existe una única función  $u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega))$  tal que

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(u(t), v) + (\nabla u, \nabla v) = (f(t), v), \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ u(0) = u_0, \text{ en } \Omega \end{cases}$$

- 1) sí  $f \in L^2(Q_T)$  y  $u_0 \in H_0^1(\Omega)$  entonces existe una única solución en :  
 $L^2(0, T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap C([0, T]; H_0^1(\Omega))$  y  
 $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2((0, T); L^2(\Omega))$
- 2) sí  $f \in C^\infty(\bar{Q}_T)$  et  $u_0 \in L^2(\Omega)$  entonces existe una solución única en  $C^\infty(\bar{\Omega} \times [\epsilon, T])$ ,  $\epsilon > 0$ .
- 3) Si ahora definimos la forma bilineal siguiente :

$$a(u, v) = \sum_{i,j=1}^d a_{i,j}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j}. \quad (58)$$

La condición suficiente para la existencia de una solución es la elipticidad débil (coercividad débil), es decir la existencia de  $\alpha > 0$  y  $\lambda > 0$  tales que :

$$a(v, v) + \lambda \|v\|_0^2 \geq \alpha \|v\|_1^2. \quad (59)$$

Consideremos ahora una semidiscretización en espacio, continua en la variable tiempo, usando el método de Galerkin, más precisamente en elementos finitos.

Sea  $\mathcal{T}_h$  una triangulación de  $\Omega$  tal que  $\cup_{T \in \mathcal{T}_h} T = \Omega_h \subset \Omega$  (Si  $\Omega$  es un dominio poligonal, para  $h$  suficientemente chico se puede obtener  $\Omega_h = \Omega$ ).

Sean :

$$V_h(\Omega_h) = \{p \in C^0(\Omega_h) : p|_T \in \mathbb{P}_1(T) \forall T \in \mathcal{T}_h\} \text{ y } V_h^0(\Omega_h) = V_h(\Omega_h) \cap H_0^1(\Omega_h).$$

El problema semi-discreto se escribe : dados  $f \in L^2(Q_T)$  y

$u_{h,0} \in V_h^0$  ( aproximación de  $u_0$ ) encontrar

$u_h(t) \in V_h^0, \forall t \in (0, T)$  tal que :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(u_h(t), v_h) + a(u_h, v_h) = (f(t), v_h), \forall v_h \in V_h^0 \\ u_h(0) = u_{h,0}, \text{ en } \Omega \end{cases}$$

Considerando una base de  $V_h^0$ ,  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_{N_h}\}$ , obtenemos un sistema de ecuaciones diferenciales.

Si :

$$u_h(t) = \sum_{j=1}^{N_h} \xi_j(t) \varphi_j \quad \text{y} \quad u_{0,h} = \sum_{j=1}^{N_h} \xi_{0,j} \varphi_j \quad (60)$$

el problema semidiscretodiscreto se presenta de la manera siguiente :

$$\begin{cases} M \frac{d}{dt} \xi(t) + A \xi(t) = f(t) \\ \xi(0) = \xi_0 \end{cases} \quad (61)$$

donde  $\xi(t) = \{\xi_1(t), \dots, \xi_{N_h}(t)\}$ ,  $\xi_0 = \{\xi_{0,1}, \dots, \xi_{0,N_h}\}$  y  $f(t) = \{f_1(t), \dots, f_{N_h}(t)\}$  con  $f_i(t) = (f(t), \xi_i)$ . Los coeficientes de las matrices  $M$  y  $A$  están definidos de la manera siguiente :

- $M_{i,j} = (\xi_i, \xi_j)$
- $A_{i,j} = a(\xi_j, \xi_i)$

## Euler explícito

$$\frac{\xi_h^n - \xi_h^{n-1}}{\delta t} + A \xi_h^{n-1} = f_h(t^{n-1})$$

Es decir que a cada paso de tiempo :

$$\xi_h^n = \xi_h^{n-1} - \delta t A \xi_h^{n-1} + \delta t f_h(t^{n-1})$$

con  $\xi_0 = \{\xi_{0,1}, \dots, \xi_{0,N_h}\}$ .

## Euler explícito

Anotamos :  $Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u$  y  $L_{h,\delta t}u = \frac{\xi^n - \xi^{n-1}}{\delta t} + A\xi^{n-1}$

Consistencia : si  $h$  es el paso de discretización en espacio y  $\delta t$  en tiempo. tenemos :

$$Lu - L_{h,\delta t}u = \mathcal{O}(\delta t + h^2)$$

Estabilidad : si  $\frac{\delta t}{h^2} \leq \frac{1}{2}$

$$\|\xi^n\|_\infty \leq \|\xi^0\|_\infty + T \|f\|_{\infty, Q_T}$$

Convergencia : si  $e_j^n = u(x_j, n\delta t) - \xi_j^n$  entonces : si  $\frac{\delta t}{h^2} \leq \frac{1}{2}$

$$\|e^n\|_\infty \leq \mathcal{O}(\delta t + h^2)$$

esquema  $\theta$

$$\frac{\xi_h^n - \xi_h^{n-1}}{\delta t} + \theta A \xi_h^n + (1 - \theta) A \xi_h^{n-1} = \theta f_h(t^n) + (1 - \theta) f_h(t^{n-1})$$

donde  $\xi_h^n = \{\xi_1(t^n), \dots, \xi_{N_h}(t^n)\}$  y  $f_h(t) = \{f_1(t), \dots, f_{N_h}(t)\}$ .

Es decir que a cada paso de tiempo :

$$\xi_h^n + \delta t \theta A \xi_h^n = \xi_h^{n-1} - \delta t (1 - \theta) A \xi_h^{n-1} + \delta t \theta f_h(t^n) + \delta t (1 - \theta) f_h(t^{n-1})$$

con  $\xi_0 = \{\xi_{0,1}, \dots, \xi_{0,N_h}\}$  y  $f_h(t) = \{f_1(t), \dots, f_{N_h}(t)\}$ .

Entonces :

- 1) Si  $\theta = 0$  tenemos el esquema explícito.
- 2) Si  $\theta = 1$  tenemos el esquema implícito.
- 3) Si  $\theta = 1/2$  tenemos el esquema de Crank-Nicolson.

## esquema $\theta$

### Consistencia

El error de consistencia es del orden de  $O(\delta, t + h^2)$  si  $\theta \neq 1/2$  y  $O((\delta t)^2 + h^2)$  si  $\theta = 1/2$ .

### Estabilidad

i) Para  $1/2 \leq \theta \leq 1$  el  $\theta$  esquema es incondicionalmente  $L^2$  estable.

ii) Para  $0 \leq \theta \leq 1$  el  $\theta$  esquema es  $L^\infty$  estable si  $\frac{\delta t}{h^2} \leq \frac{1}{2(1-\theta)}$

Convergencia : si  $e_j^n = u(x_j, n\delta t) - \xi_j^n$  entonces el error es del orden de  $O(\delta, t + h^2)$  si  $\theta \neq 1/2$  y  $O((\delta t)^2 + h^2)$  si  $\theta = 1/2$ .

Si definimos  $u_i = u|_{\Omega_i}$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\forall t > 0$ , una formulación de los dominios del problema es la siguiente :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u_i}{\partial t} - \mathcal{L}u_i = f & \text{en } Q_{T,i} = \Omega_i \times (0, T), i = 1, 2 \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega_i \cap \partial\Omega \times (0, T), i = 1, 2 \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{en } \Omega \\ u_1 = u_2 & \text{en } \Gamma = \bar{\Omega}_1 \cap \bar{\Omega}_2 \\ \frac{\partial u_1}{\partial n_L} = \frac{\partial u_2}{\partial n_L} & \text{en } \Gamma \end{array} \right. \quad (62)$$

con

$$\frac{\partial v}{\partial n_L} = \sum_{i,j=1}^d a_{i,j} \frac{\partial u}{\partial x_j} n_i, \quad n_i \text{ componente } i \text{ de la normal } n_L. \quad (63)$$

La forma débil de esta formulación es la siguiente :

encontrar  $u_i \in L^2(0, T; H^1_{\partial\Omega \cap \partial\Omega_i}(\Omega_i) \cap C^2([0, T]; L^2(\Omega_i)))$ ,  $i = 1, 2$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t}(u_1, v_1)_1 + a_1(u_1, v_1) = (f, v_1)_1 \quad \forall v_1 \in H^1_0(\Omega_1) \\ u_1 = u_2 \quad \text{en } \Gamma \\ \frac{\partial}{\partial t}(u_2, v_2)_2 + a_2(u_2, v_2) = (f, v_2)_2 \quad \forall v_2 \in H^1_0(\Omega_2) \\ \frac{\partial}{\partial t}(u_2, \mathcal{R}_2\mu)_2 + a_2(u_2, \mathcal{R}_2\mu) = (f, \mathcal{R}_2\mu)_2 + (f, \mathcal{R}_1\mu)_1 - \\ - \frac{\partial}{\partial t}(u_1, \mathcal{R}_1\mu)_1 - a_1(u_1, \mathcal{R}_1\mu) \quad \forall \mu \in \Lambda. \end{array} \right.$$

Si  $\Omega_{i,h}$ ,  $i = 1, \dots, m$  es una descomposición de dominios sin solapamiento.

Recordamos las definiciones de los espacios de aproximación en los sub dominios :

- $V_{i,h}(\Omega_{i,h}) = \{p \in C^0(\Omega_{i,h}) : p|_T \in \mathbb{P}_1(T) \forall T \in \mathcal{T}_{i,h}\}$ ,
- $V_{i,h}^0(\Omega_{i,h}) = V_{i,h}(\Omega_{i,h}) \cap H_0^1(\Omega_{i,h})$ ,
- $V_{i,h}^*(\Omega_{i,h}) = \{p \in V_{i,h}(\Omega_{i,h}) : p = 0 \in \partial\Omega_h \cap \partial\Omega_{i,h}\}$ ,

por otra parte, en la practica consideramos una aproximacion  $\mu_h \in \mathbb{P}_1$  de  $\mu \in \Lambda$ . Obtenemos el espacio de aproximación  $V_{\Gamma,h}^0$ . Si  $\{\gamma_1, \dots, \gamma_{N_\Gamma}\}$  es una base en la cual representamos los elementos de  $V_{\Gamma,h}^0$  podemos escribir :

$$\mu_h(x) = \sum_{j=1}^{N_\Gamma} \mu_{h,j} \gamma_j(x)$$

La formulación multi-dominios del problema semi-discreto es la siguiente : Encontrar

$u_{1,h}(t) \in V_{1,h}^* \cap L^2(0, T, V_{1,h}^*)$  y  $u_{2,h}(t) \in V_{2,h}^* \cap L^2(0, T, V_{2,h}^*)$  tal que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}(u_{1,h}, v_{1,h})_1 + a_1(u_{1,h}, v_{1,h}) = (f, v_{1,h})_1 \quad \forall v_{1,h} \in V_{1,h}^0(\Omega_{1,h}) \\ u_{1,h} = u_{2,h} \quad \text{en } \Gamma_h \\ \frac{d}{dt}(u_{2,h}, v_{2,h})_2 + a_2(u_{2,h}, v_{2,h}) = (f, v_{2,h})_2 \quad \forall v_{2,h} \in V_{2,h}^0(\Omega_{2,h}) \\ \frac{d}{dt}(u_{2,h}, \mathcal{R}_{2,h}\mu_h)_2 + a_2(u_{2,h}, \mathcal{R}_{2,h}\mu_h) = (f, \mathcal{R}_{2,h}\mu_h)_2 + (f, \mathcal{R}_{1,h}\mu_h)_1 \\ - \frac{d}{dt}(u_{1,h}, \mathcal{R}_{1,h}\mu_h)_1 - a_1(u_{1,h}, \mathcal{R}_{1,h}\mu_h) \quad \forall \mu_h \in V_{\Gamma,h}^0 \end{array} \right.$$

Donde  $\mathcal{R}_{1,h} : V_{\Gamma,h}^0 \rightarrow V_{1,h}^*(\Omega_{1,h})$  y  $\mathcal{R}_{2,h} : V_{\Gamma,h}^0 \rightarrow V_{2,h}^*(\Omega_{2,h})$  son operadores de prolongación o extensión del valor de la función definida en el borde(frontera)  $\Gamma_h$  a todo el dominio.

Podemos elegir dos maneras de calcular las prolongaciones  $\mu_{1,h} = \mathcal{R}_{1,h}\mu_h$  y  $\mu_{2,h} = \mathcal{R}_{2,h}\mu_h$  : la primera es considerar un relevamiento armónico en  $V_{1,h}^*(\Omega_{1,h})$  y  $V_{2,h}^*(\Omega_{1,h})$  respectivamente, es decir la solución de :

$$\begin{cases} -\Delta\mu_{i,h} = 0, & \text{en } \Omega_{i,h} \\ \mu_{i,h} = 0, & \text{en } \partial\Omega_h \cap \partial\Omega_{i,h} \\ \mu_{i,h}(x) = \mu_h(x) & \text{en } \Gamma_h \end{cases}$$

La segunda es simplemente definir :  $\mathcal{R}_{1,h}\mu_h$  en  $V_{1,h}^*(\Omega_{1,h})$  tal que :

$$\begin{cases} \mathcal{R}_{1,h}\mu_h(x_{j,h}) = \mu(x_{j,h}) & \text{si } x_{j,h} \text{ es un nudo de discretización de } \Gamma_h, \\ \mathcal{R}_{1,h}\mu_h(x_{j,h}) = 0 & \text{si } x_{j,h} \text{ es un nudo de discretización de } \Omega_{i,h}. \end{cases}$$

Si aplicamos un esquema de discretización en la variable tiempo implícito se obtiene una secuencia de funciones  $u_h^n \in V_h^0$ , aproximación de  $u(t^n, x)$ , que es la solución en el tiempo  $t^n$ .

$$\begin{cases} \frac{1}{\Delta t^n}((u_h^n, \varphi_j) - (u_h^{n-1}, \varphi_j)) + a(u_h^n, \varphi_j) = (f(t^n), \varphi_j), \forall j = 1, \dots, N_h \\ u_h^0 = u_{h,0}, \text{ en } \Omega_h \end{cases}$$

donde  $\Delta t^n$  es el paso de discretización del tiempo y  $t^n = t^{n-1} + \Delta t^n$ .

Si  $u_h^n \in V_h^0$  el esquema implícito es de orden uno en tiempo y dos en espacio.

Más aun este esquema es estable sin condiciones sobre la magnitud del paso de tiempo  $\Delta t$ .

Ahora definimos la forma bilineal  $a_t(u, v)$  de la manera siguiente :

$$a_t(u, v) = (u, v) + \Delta t a(u, v),$$

y el segundo miembro :

$$g(t, u, v) = (u, v) + \Delta t f(t, v).$$

El sistema discreto podemos re escribirlo de la forma :

$$\begin{cases} a_t(u_h^n, \varphi_j) = g(t^n, u_h^{n-1}, \varphi_j) \forall \varphi_j, j = 1, \dots, N_h, \\ u_h^0 = u_{h,0}, \text{ en } \Omega_h \end{cases}$$

Consideramos una discretización del tiempo  $\{t^n\}_n$  y una secuencia  $\Delta t^n$  tal que  $t^0 = 0$ ,

$$t^n = t^{n-1} + \Delta t^n \text{ y } T = \sum_{n=1}^{T_h} \Delta t^n.$$

Para resolver el sistema discreto a cada paso de tiempo introducimos un método de descomposición de dominios de Schwarz. Para comenzar consideramos a cada paso de tiempo una descomposición geométrica del dominio con solapamiento de  $\Omega_h$ . Podemos considerar una descomposición que será la misma a cada paso de tiempo o una descomposición adaptada a cada paso de tiempo.

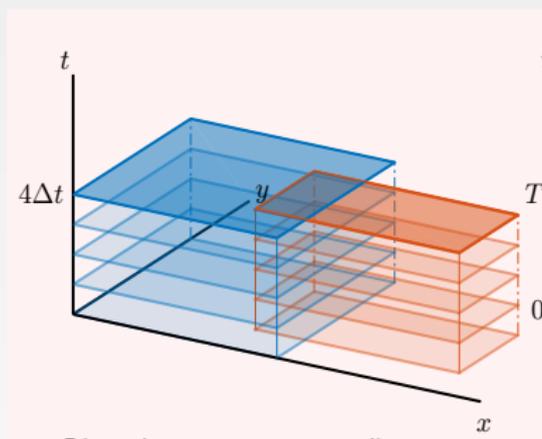


Figure – descomposición de dominios uniforme en tiempo

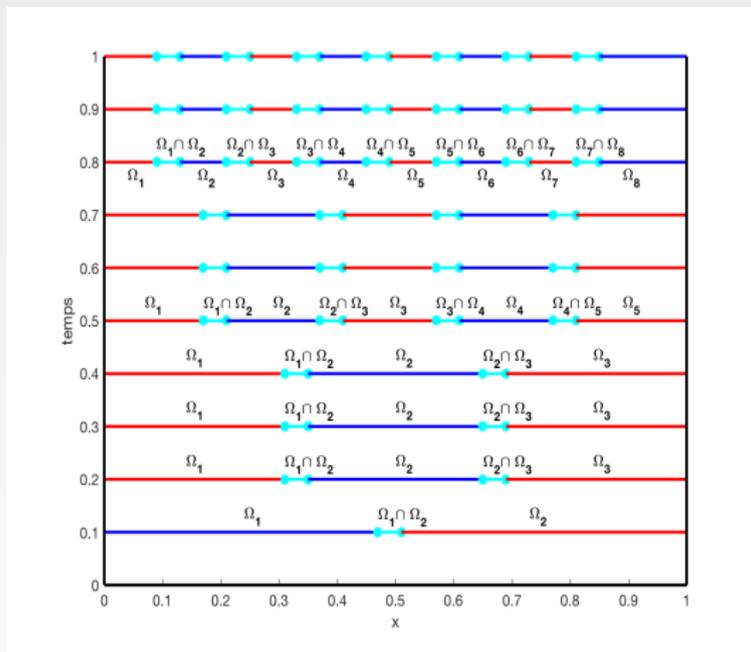


Figure – descomposición de dominios no-uniforme en tiempo

- 1 Sea  $u_h^0 \in V_h^0$  una aproximación de  $u_0$
- 2 Para  $n = 1, \dots, T_h$  resolvemos (64), es decir :  
Sea  $u_h^{0,n} = u_h^{n-1}$ .  
Para  $l = 1, \dots$ , hasta la convergencia del método de descomposition de dominios :

- a) Para  $i = 1, \dots, m_n$  resolvemos el problema :  
Calcular  $w_i^l \in V_{i,h}^0$  solución del sistema :

$$a_t(w_i^l, \varphi_{i,j}) = g(t^n, u_h^{n-1}, \varphi_{i,j}) - a_t(u_h^{l,n}, \varphi_{i,j}) \quad \forall \varphi_{i,j}, j = 1, \dots, N_{i,h},$$

- b) 
$$u_h^{l+1,n} = u_h^{l,n} + \sum_{i=1}^{m_n} \tilde{w}_i^l$$

Si  $l^*$  es el índice para el cual la iteración del método de descomposition de dominios para :  $u_h^n = u_h^{l^*,n}$ .

Las funciones  $\varphi_{i,j}$ ,  $j = 1, \dots, N_{i,h}$  son la base de  $V_{i,h}^0$ , que es de dimensión  $N_{i,h}$ . Las funciones  $\tilde{w}_i^l$  son la extensión por cero de  $w_i^l \in V_{i,h}^0$ .

Consideremos el caso siguiente :

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) = u''(x, t) + \mu |u(x, t)|^p + f(x, t) & \text{en } ]0, 1[ \times ]0, T], \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0 & \text{en } ]0, 1[ \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 & \text{en } ]0, T], \end{cases}$$

donde  $f(x, t) = 100t(\delta_{0.5} + \delta_{0.8} + \delta_{0.2})$ , es una fuente con soporte puntual. La potencia  $p = 4$  y  $\mu = 1200$ . La condición inicial está dada por la función  $u_0(x) = 0.01x(1 - x)$ .

Aplicando una discretización en elementos finitos de tipo  $\mathbb{P}_1$  y una discretización implícita en la variable temporal obtenemos :

$$\frac{1}{\tau_n} M_h (U_h^{n+1} - U_h^n) + A_h(U_h^{n+1}) = \tilde{F}(U_h^{n+1}) + \tilde{f}^{n+1}. \quad (64)$$

- $\tau_n$  es el paso de tiempo.
- $M_h = \left( \int_{\Omega} \psi_i \psi_j dx \right)_{i,j=1:N_h}$ ,
- $A_h = \left( \int_{\Omega} \nabla \psi_i \nabla \psi_j dx \right)_{i,j=1:N_h}$ .
- $U_h^n = (U_1^n, U_2^n, \dots, U_{N_h}^n)^T = (u_h^n(x_1), u_h^n(x_2), \dots, u_h^n(x_{N_h}))^T \simeq U_h(t^n)$ .
- $\tilde{F}(U_h^n) = \left( \int_{\Omega} |u_h^n|^p \psi_j dx \right)_{j=1:N_h}^T$ .
- $\tilde{f}^n = \tilde{f}(t^n) = \left( \int_{\Omega} f(t^n) \psi_j dx \right)^T$ .
- $\{\psi_i\}$ , ( $i = 1, \dots, N_h$ ), es la base de Lagrange de los elementos  $\mathbb{P}_1$ .

## Ecuaciones Parabólicas, Ejemplo .

A cada paso de tiempo tenemos que resolver el problema en dimensión finita siguiente :

$$\frac{1}{\tau_n} M_h U_h^{n+1} + A_h U_h^{n+1} - \tilde{F}(U_h^{n+1}) = \frac{1}{\tau_n} M U_h^n + \tilde{f}^{n+1}.$$

Es decir, si anotamos  $\alpha = \frac{1}{\tau_n}$  y :

$$K_h(U_h^{n+1}) = \alpha M_h U_h^{n+1} + A_h U_h^{n+1} - \tilde{F}(U_h^{n+1})$$

y

$$G_h = \alpha M_h U_h^n + \tilde{f}^{n+1}$$

Tenemos que resolver a cada paso de tiempo el sistema non lineal siguiente :

$$K_h(U) = G_h$$

en  $\mathbb{R}^{N_h}$

Aplicaremos un método de Newton para resolverlo.

Si anotamos  $J_h(U) : \mathbb{R}^{N_h} \rightarrow \mathbb{R}^{N_h}$  la aplicación lineal :

$$J_h(U)\delta = \alpha M_h \delta + A_h \delta - \frac{\partial}{\partial r} \tilde{F}(U) \delta$$

La iteración de Newton a realizar a cada paso de tiempo es la siguiente : Encontrar *delta* en  $\mathbb{R}^{N_h}$  tal que :

$$J_h(U^k)\delta = -K(U^k) + G_h$$

y entonces  $U^{k+1} = U^k + \delta$

Para que este algoritmo iterativo converja es necesario que  $J_h$  sea coercivo.

A cada iteración del método de Newton aplicamos el método de descomposición de dominios que nos garantiza la existencia y unicidad de la iteración de Newton, pues una elección suficientemente pequeña de los subdominios garantiza la coercividad de  $J_h$ .

En este caso alcanza con elegir subdominios  $(a_i, b_i)$  verificando :

$$|b_i - a_i| < \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{c_\infty - \alpha}}$$

donde :

$$c_\infty = \left\| \frac{\partial}{\partial r} \tilde{F}(U^k) \right\|$$

En nuestro ejemplo calculamos hasta el tiempo final  $T = 4$ . El número de puntos de discretización es  $N = 300$ , el paso de tiempo fijado es  $\tau = 0.2$ .

A cada paso de tiempo, a la primera iteración consideramos un dominio unico.

# Ecuaciones Parabólicas, Ejemplo .

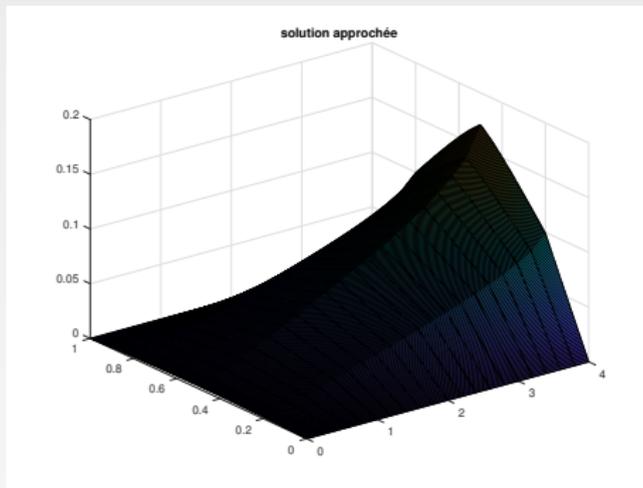


Figure – 20 pasos de tiempo

$n$	1	2	...	19	20
# Iter-Newton	2	2	...	3	4
$\ \delta_h\ _\infty$	$7.9e^{-10}$	$2.7e^{-7}$	...	$9.53e^{-5}$	$9.8e^{-5}$
# sd	1	1	...	2	3

Para explicar la estrategia del algoritmo waveform, proponemos, como primer paso, aplicar el método de descomposición de dominios al problema inicial unidimensional :

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) - u''(x, t) = f(x, t) & \text{en } Q_T = (0, L) \times (0, T], \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{en } [0, L] \\ u(0, t) = g_1(t) \text{ y } u(L, t) = g_2(t) & \text{en } (0, T], \end{cases}$$

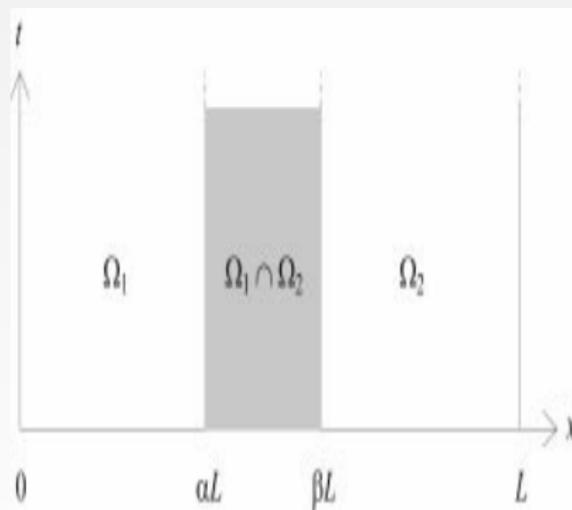
La función  $f$  es supuesta acotada en  $Q_T$  y Hölder continua, ( existe  $C > 0$  y  $\alpha > 0$  tal que

$|f(x_1, t_1) - f(x_2, t_2)| \leq C \|(x_1, t_1) - (x_2, t_2)\|^\alpha$ ), las condiciones frontera  $g_1(t)$  y  $g_2(t)$  son supuestas continuas por trozos. Con estas hipótesis hay existencia y unicidad de la solución, si  $f = 0$  y  $u_0 = 0$  le solución verifica la estimación siguiente :

$$\|u(x, \cdot)\|_\infty \leq \frac{L-x}{L} \|g_1(t)\|_\infty + \frac{x}{L} \|g_2(t)\|_\infty$$

# Ecuaciones Parabólicas, Método Waveform .

Para introducir el método de descomposición de dominios de Schwarz waveform consideramos la descomposición geométrica con solapamiento en una dimensión. Consideramos una descomposición del dominio  $Q_T = (0, L) \times (0, T]$  en dos subdominios  $Q_{T_1} = (0, \beta L) \times (0, T]$  y  $Q_{T_2} = (\alpha L, L) \times (0, T]$  con  $0 < \alpha < \beta < 1$ .



La solución  $u(x, t)$  de la ecuación de evolución puede ser obtenida a partir de  $u_1(x, t)$  y  $u_2(x, t)$  solución de las ecuaciones :

$$\begin{cases} \partial_t u_1(x, t) - u_1''(x, t) = f(x, t) & \text{en } Q_T = (0, \beta L) \times (0, T], \\ u_1(x, 0) = u_0(x) & \text{en } [0, \beta L] \\ u_1(0, t) = g_1(t) \text{ y } u_1(\beta L, t) = u_2(\beta L, t) & \text{en } (0, T], \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} \partial_t u_2(x, t) - u_2''(x, t) = f(x, t) & \text{en } Q_T = (\alpha L, L) \times (0, T], \\ u_2(x, 0) = u_0(x) & \text{en } [\alpha L, L] \\ u_2(\alpha L, t) = u_1(\alpha L, t) \text{ y } u_2(L, t) = g_2(t) & \text{en } (0, T], \end{cases}$$

La solución del problema original  $u(x, t)$  (monodominio) es igual a  $u_1(x, t)$  sobre  $Q_{T_1}$  y a  $u_2(x, t)$  sobre  $Q_{T_2}$ .

Deducimos un algoritmo iterativo, dada la condición inicial  $u_0$ , para  $l = 1, \dots$  hasta la convergencia del método de Schwarz, vamos a resolver de manera independiente, es decir con pasos de tiempo eventualmente diferentes, los problemas siguientes :

$$\begin{cases} \partial_t u_1^{l+1}(x, t) - u_1^{l+1}''(x, t) = f(x, t) & \text{en } Q_T = (0, \beta L) \times (0, T) \\ u_1^{l+1}(x, 0) = u_0(x) & \text{en } [0, \beta L] \\ u_1^{l+1}(0, t) = g_1(t) \text{ y } u_1^{l+1}(\beta L, t) = u_2^l(\beta L, t) & \text{en } (0, T), \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} \partial_t u_2^{l+1}(x, t) - u_2^{l+1}''(x, t) = f(x, t) & \text{en } Q_T = (\alpha L, L) \times (0, T) \\ u_2^{l+1}(x, 0) = u_0(x) & \text{en } [\alpha L, L] \\ u_2^{l+1}(\alpha L, t) = u_1^l(\alpha L, t) \text{ y } u_2^{l+1}(L, t) = g_2(t) & \text{en } (0, T), \end{cases}$$

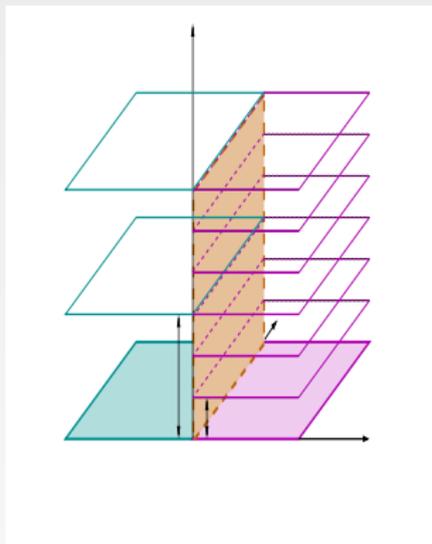


Figure – Descripción del algoritmo waveform

La dificultad de este algoritmo es conectar las soluciones  $u_i^l$  en las fronteras de los subdominios. Hassan y al presentaron un método que implica una corrección a partir de una malla fina, calculando los valores medios de los datos en las interfaces.

Los errores  $d^l(x, t) = u_1^l(x, t) - u_1(x, t)$  y  $e^l(x, t) = u_2^l(x, t) - u_2(x, t)$  verifican las estimaciones siguientes en la interfaces  $x = \alpha L$  y  $x = \beta L$  :

$$\|d^{l+2}(\alpha L, \cdot)\|_\infty \leq \frac{\alpha(1-\beta)}{\beta(1-\alpha)} \|d^l(\alpha L, \cdot)\|_\infty$$

$$\|e^{l+2}(\beta L, \cdot)\|_\infty \leq \frac{\alpha(1-\beta)}{\beta(1-\alpha)} \|e^l(\beta L, \cdot)\|_\infty$$

Si definimos la norma siguiente :

$$\|g(\cdot, \cdot)\|_\infty = \sup_{[0, L]} \|g(x, \cdot)\|_\infty$$

obtenemos que :

$$\|d^{l+2}(\cdot, \cdot)\|_\infty \leq \left(\frac{\alpha(1-\beta)}{\beta(1-\alpha)}\right)^l \|e^0(\beta L, \cdot)\|_\infty$$

$$\|e^{l+2}(\cdot, \cdot)\|_\infty \leq \left(\frac{\alpha(1-\beta)}{\beta(1-\alpha)}\right)^l \|d^0(\alpha L, \cdot)\|_\infty$$

Vamos ahora a considerar la versión multidominios del algoritmo waveform Schwarz. La descomposición geométrica en  $m$  subdominios es de la forma  $Q_{T,i} = (\alpha_i L, \beta_i L) \times (0, T]$  para  $i = 1, \dots, m$  con  $\alpha_1 = 0$ ,  $\beta_m = 1$  y  $\alpha_{i+1} \leq \beta_i$ ,  $i = 1, \dots, m - 1$ .

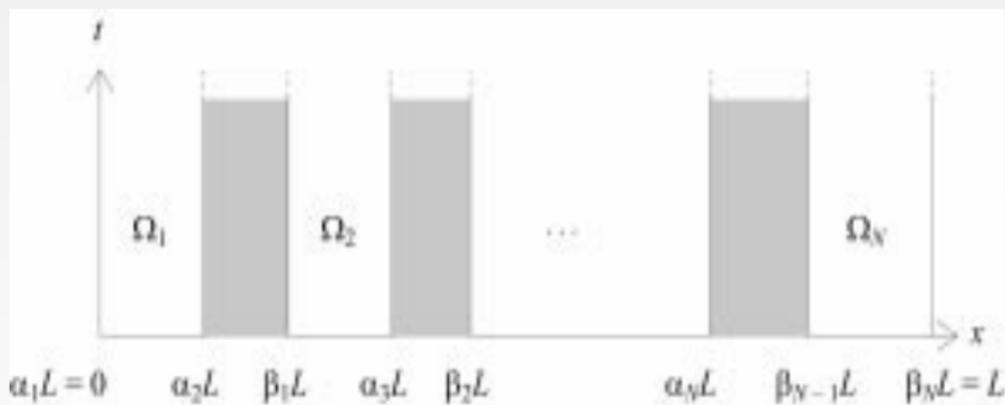


Figure – Descomposición multidominio con solapamiento

La solución  $u(x, t)$  en  $Q_T$  sobre cada subdominio  $Q_{T,i}$  es igual a la solución  $u_i(x, t)$  de la ecuación :

$$\begin{cases} \partial_t u_i(x, t) - u_i''(x, t) = f(x, t) & \text{en } Q_{T,i} \\ u_i(x, 0) = u_0(x) & \text{en } [\alpha_i L, \beta_i L] \\ u_i(\alpha_i L, t) = u_{i-1}(\alpha_i L, t) \text{ y } u_i(\beta_i L, t) = u_{i+1}(\beta_i L, t) & \text{en } (0, T], \end{cases}$$

con  $u_0(0, t) = g_1(t)$  y  $u_{N+1}(L, t) = g_2(t)$  para  $t \in (0, T]$ .

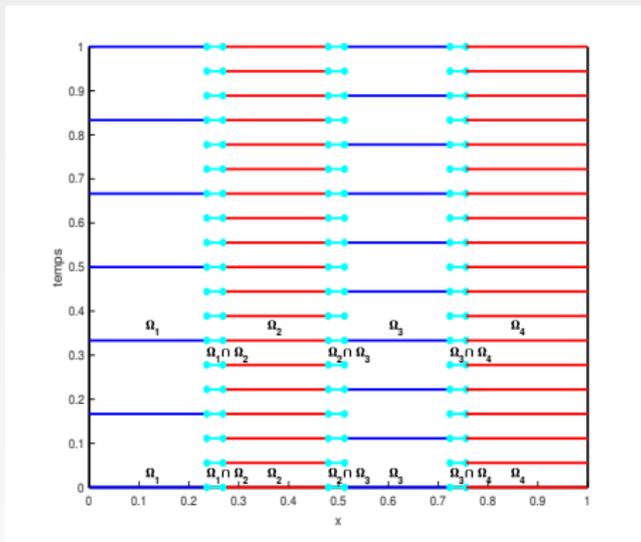


Figure – Descripción del algoritmo waveform multidomaine

## Algoritmo

*(Algoritmo Waveform)*

1) *para*  $l = 1, \dots, m$  (número de sub dominios)

a) *para*  $t = \Delta t, \dots, T$

*inicializar*  $u_i^0(x, t)$ ,  $x \in \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j$

*fin de la iteración a).*

*fin de la iteración 1)*

## Algoritmo

2) Para  $k = 1, \dots$ , convergencia de la iteración Schwarz waveform

a) para  $l = 1, \dots, m$  (número de sub dominios)  
para  $t = \Delta t, \dots, T$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u_l^{k+1}(x, t) - u_l^{k+1}''(x, t) = f(x, t) \text{ en } Q_{T,l} \\ u_l^{k+1}(x, 0) = u_0(x) \text{ en } [\alpha_l L, \beta_l L] \\ u_l^{k+1}(\alpha_l L, t) = u_{l-1}^l(\alpha_l L, t) \\ \text{y } u_l^{k+1}(\beta_l L, t) = u_{l+1}^l(\beta_l L, t) \text{ en } (0, T], \end{array} \right.$$

fin de la iteración en  $t$

para  $t = \Delta t, \dots, T$

Transmisión de datos frontera de cada  $u_l^{k+1}(x, t)$

fin de la iteración en  $t$ ,

fin de la iteración en  $l$

fin de la iteración en  $k$

Consideramos la ecuación de Chipot-Weissler

$$\begin{cases} u_t(x, t) - \Delta u(x, t) + |\nabla u(x, t)|^q = |u(x, t)|^p & \text{in } Q_T, \\ u(x, t) = 0 & \text{on } \Sigma_T, \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0 & \text{on } \Omega \end{cases}$$

Suponemos que  $p = 2$ ,  $q = 1.3$ . En este caso Chipot-Weissler [?] demostraron que la solución explota en tiempo finito, es decir existe únicamente en un intervalo de tiempo  $(0, T_{max})$  donde  $T_{max} < \infty$ , y  $\lim_{t \rightarrow T_{max}} \|u\|_{\infty} = \infty$ . Consideramos la condition inital  $u_0 = 10^3 \sin(\pi x)$ ,  $f = 0$ .

# Método Waveform, Ejemplo .

Fijamos a priori el número de sub dominios a  $m = 3$ . El paso de tiempo es fijado a  $\tau_1 = \tau_3 = 1.e^{-5}$  en los dominios uno y tres y  $\tau_2 = 0.5e^{-5}$  en el dominio dos. El resultado calculado al tiempo  $T_{max} = 1.e^3$ .

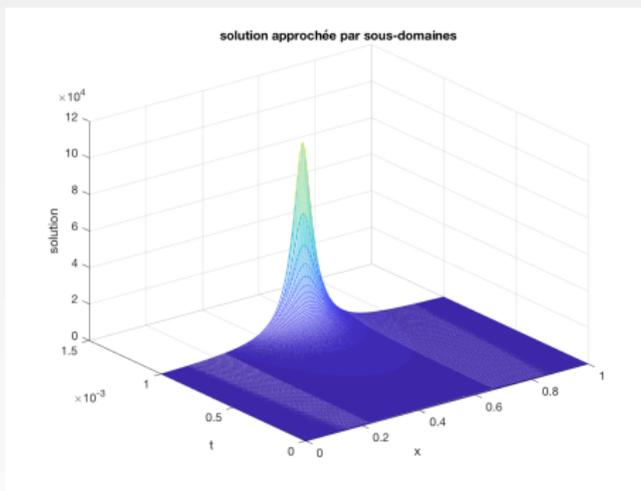


Figure – Solución numérica

# Introducción al cálculo paralelo, Clasificación de las arquitecturas

Consideramos aquí la clasificación dicha de Flynn de 1972. Calculadoras secuenciales SISD (Single Instruction flow Single Data flow). Son las calculadoras secuenciales clásicas.

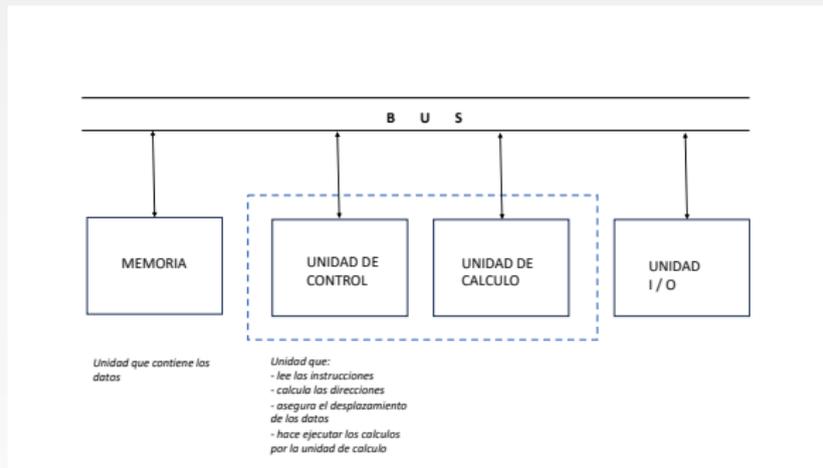


Figure – Arquitectura SISD.

Por ejemplo para calcular  $A = B + C$  efectuamos las operaciones siguientes :

- i) lire  $B$ ,
- ii) lire  $C$ ,
- iii) realizar la operación  $B + C$ ,
- iv) depositar el resultado en  $A$ .

# Introducción al cálculo paralelo, Calculadoras SIMD (Single Instruction flow Multiple Data flow).

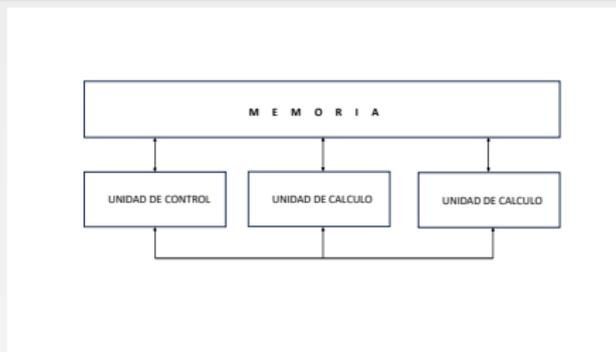


Figure – Arquitectura SIMD.

Permite efectuar simultáneamente la misma operación sobre datos diferentes. Pero estas arquitecturas presentan algunos problemas.

- El tiempo de cebado de una serie de operaciones tiende a aumentar con el número de unidades de cálculo.
- La aceleración obtenida no es uniforme, el número de operaciones a efectuar no es siempre un múltiplo del número de unidades de cálculo.

- Incapacidad de realizar cálculos recursivos

*do*  $i = 2, N$

$$X(i) = 2 \times X(i - 1)$$

- Es necesario que en la memoria se pueda acceder a varios datos en paralelo. Una solución utilizada, es organizar la memoria en bancos.

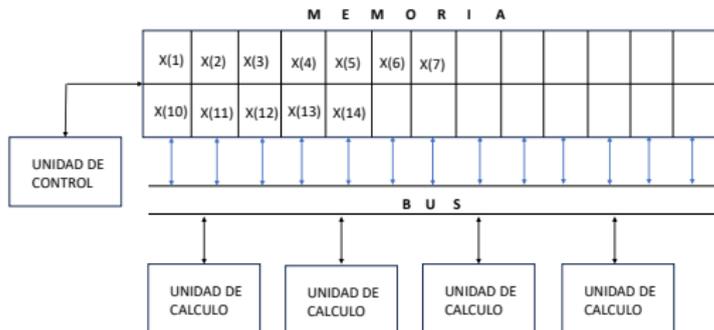


Figura – Pipeline

# Introducción al cálculo paralelo, Calculadoras MIMD (Multiple Instruction flow Multiple Data flow).

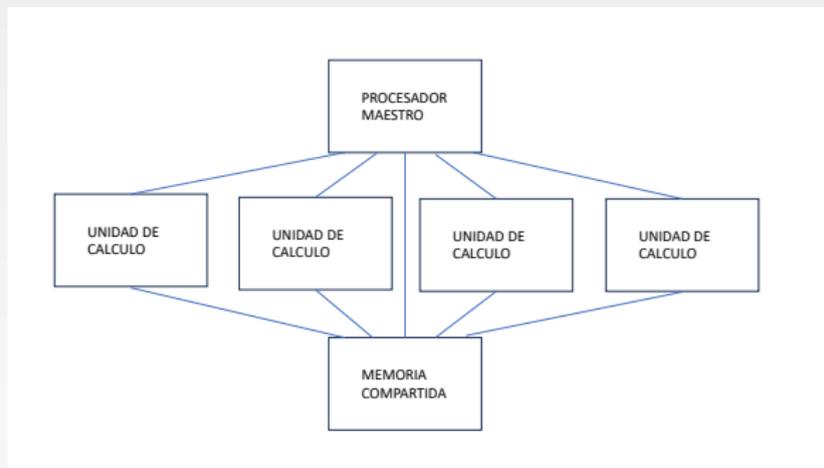


Figure – Arquitectura MIMD. Memoria Compartida

# Introducción al cálculo paralelo, Calculadoras MIMD (Multiple Instruction flow Multiple Data flow).

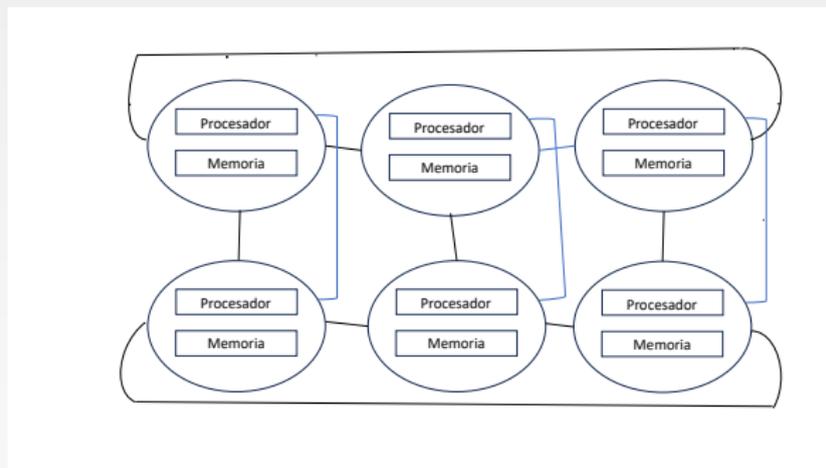


Figure – Arquitectura MIMD, memoria distribuida.

Dos parámetros experimentales :

- $n_{1/2}$  medida de media eficiencia.
- $r_{\infty}$  velocidad asintótica.

Programa test :

```
DO 3 i = 1, N  
  V3(i) = V1(i) × V2(i)  
END
```

$r_\infty$  es la velocidad máxima expresada en términos de Mflops para  $N$  grande. Mflops =  $10^6$  operaciones flotantes por segundo.

La velocidad asintótica depende del periodo del reloj, del número de unidades de cálculo y del flujo máximo de la memoria

$n_{1/2}$  es el valor de  $N$  para el cual la velocidad medida es igual a la mitad de la velocidad asintótica, (Expresa la tasa de paralelismo de la arquitectura).

# Introducción al cálculo paralelo, Velocidad asintótica.

El tiempo de ejecución  $T$  de una boucle es una función afin de  $N$ ,

$$T = d + aN$$

donde  $d$  es el tiempo de cebado,  $a$  la pendiente y  $N$  el nombre de iteraciones. Entonces  $r_{\infty} = 1/a$  y  $n_{1/2} = d/a$ .

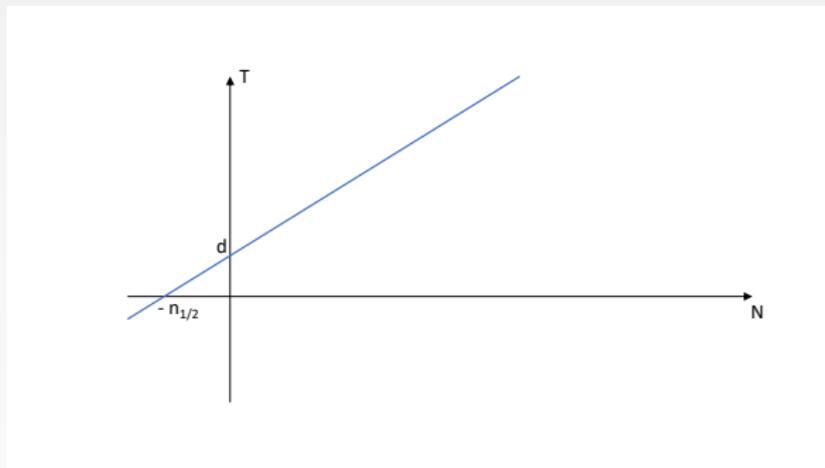


Figure – Tiempo de cálculo en función de  $N$ .

# Introducción al cálculo paralelo, Velocidad asintótica.

Si la computadora es del tipo SIMD con  $p$  procesadores,  $\tau$  el tiempo necesario para calcular una serie de  $p$  operaciones en paralelo, entonces :

$$T = d + \tau(N/p) + r\tau$$

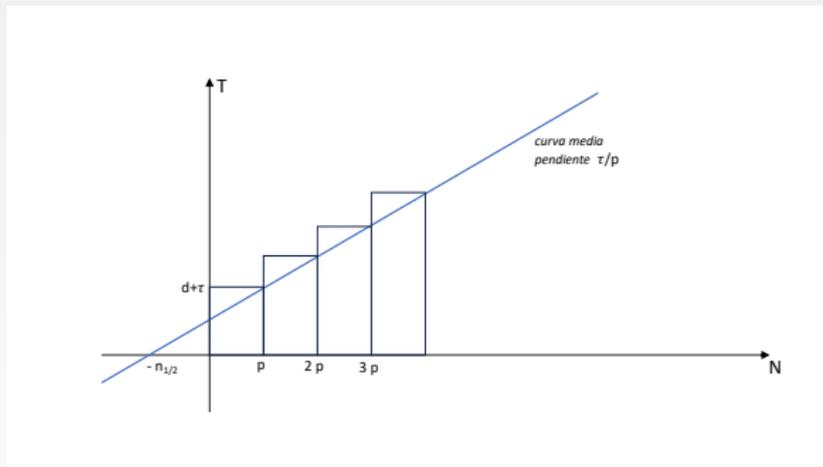


Figure – Tiempo de cálculo en función de  $N$ , caso de  $p$  procesadores.

$$\textit{Speedup} = \frac{\text{Tiempo con un solo procesador}}{\text{Tiempo con } p \text{ procesadores}} \quad (65)$$

# Introducción a la interfaz MPI (Message Passing Interface).

El modelo por pasaje de mensajes es un modelo de programación que puede ser utilizado con conjunto de procesadores que disponen de una memoria local y que comunican el pasaje de mensajes, es decir enviando y recibiendo mensajes.

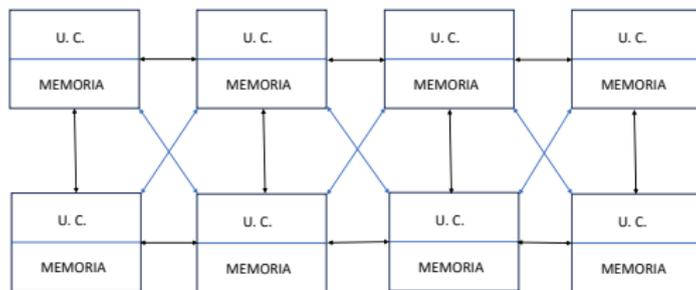


Figure – Message Passing Interface.

## Ventajas del modelo MPI

El modelo por pasaje de mensajes se acomoda de un conjunto de procesadores no homogéneos conectados por una red de comunicaciones. Soporta algoritmos diversos con cargas no homogéneas sobre cada procesador.

La mayor parte de los errores de programación provienen de la mala gestión de la locación de la memoria.

El rendimiento es mejorado pues este tipo de computadora permite de disponer de mucha memoria y sobre todo de memoria cache rápida.

Creación del proceso :

## Algoritmo

*Ejemplo MPI*

*program main*

*include " mpif.h "*

*integer ierr,myid, numprocs*

*C inicialización MPI*

*Call MPI\_INIT(ierr)*

*C Saver quien soy*

*Call MPI\_COMM\_RANK(MPI\_COMM\_WORLD,myid,ierr)*

*Call MPI\_COMM\_SIZE(MPI\_COMM\_WORLD,numprocs,ierr)*

## Algoritmo

```
C if (myid.eq.0) then  
C  
C trabajo del maestro  
C  
end if  
C  
C trabajo de los esclavos  
C  
C Stop MPI  
C  
Call MPI_FINALIZE(ierr)  
stop  
end
```

Las instrucciones siguientes hacen parte de todo programa :

- Call `MPI_NIT(ierr)`,
- Call `MPI_COMM_RANK(MPI_COMM_WORLD,myid,ierr)`,
- Call `MPI_COMM_SIZE(MPI_COMM_WORLD,numprocs,ierr)`,
- Call `MPI_FINALISE(ierr)`

- MPI-INIT(ierr)  
ierr : un entero  
ierr es un código de error o MPI\_\_success
- MPI\_COMM\_RANK(comm,rank,ierr)  
Comm : entero, caracteriza o identifica el contexto de comunicación y el grupo de procesos asociados.  
Es definido por "mpif.h"  
rank : un entero  
Cada proceso a un rank en el grupo asociado al comunicador MPI\_COMM\_WORLD.  
ierr : un entero, código de error.

- Call `MPI_COMM_SIZE(MPI_COMM_WORLD, size, ierr)`  
size : un número entero.

Esta rutina nos informa en size el número de procesos que el utilizador a inicializado para el programa.

Si "numprocs" es el valor de size, es el número de procesadores asociados a `MPI_COMM_WORLD`.  
Cada proceso a el mismo `MPI_COMM_WORLD` y "numprocs" pero un diferente "myid" (rank).

MPI\_SEND( adres, length,tipodata, destinación,tag,comm)

- adres : lugar en la memoria del comienzo del buffer que contiene los datos a enviar.
- length : Entero. El tamaño del mensaje.
- tipodata : Tipo de dato, enteros, reales, caracteres, etc...
- destinación : identificación del proceso al que los datos son destinados.
- tag : un número arbitrario, entero positivo, que exprime la exclusividad y caracteriza el un mensaje. Permite de organizar el recibo de los mensajes en el buen orden.
- comm : identifica el grupo de procesos y el contexto de comunicación.

Diferentes "tipodata" :

- MPI\_CHAR,
- MPI\_INTEGER,
- MPI\_FLOAT,
- MPI\_DOUBLE\_PRECISION,
- etc...

Por ejemplo si queremos enviar una columna de una matriz  $a$  :

## Algoritmo

```
do 40 i = 1, numprocs - 1
do 30 j = 1, acols
30 buffers(j) = a(i,j)
call MPI_SEND(buffer,acols,MPI_DOUBLE_PRECISION,i,i,
MPI_COMM_WORLD,ierr)
40 continue
```

MPI\_RECV(adress,  
maxlength,tipodata,source,tag,comm,status,ierror)

- adress : lugar en la memoria del comienzo del buffer que contiene los datos a enviar.
- maxlength : Entero. El tamaño maximal del mensaje.
- tipodata : Tipo de dato, enteros, reales, caracteres, etc...
- source : identificación del proceso de donde aceptamos los datos. Por ejemplo MPI\_ANY\_SOURCE, indica que aceptamos datos de todo proceso asociado al contexto MPI\_COMM\_WORLD.
- tag : un número arbitrario, entero positivo, que exprime la exclusividad y caracterizar del un mensaje. Permite de organizar el recibo de los mensajes en el buen orden.
- comm : identifica el grupo de procesos y el contexto de comunicación.
- status : informaciones sobre el mensaje. Por ejemplo : stat(MPI\_SOURCE) es el rank del proceso de donde vienen los datos.

`MPI_BCAST(adress, length, tipodata,source,tag,comm,ierr)`

source : entero, proceso origen de los datos.

Va a enviar el contenido de los datos en adress a todos los procesos de comm.

## Reduction

MPI\_REDUCE(sendbuffer, recvbuffer,length, tipodata, operación, source , comm,erreur)

Operación : tipo de operación.

- MPI\_MAX
- MPI\_MIN
- MPI\_SUM
- MPI\_PROD
- MPI\_LAND
- MPI\_BAND
- MPI\_LOR
- MPI\_BOR

## Evaluación del tiempo

`tt=MPI_WTIME()`

variable en doble precisión que contiene el tiempo transcurrido desde un punto inicial arbitrario.

`t1=MPI_WTICK`

variable en doble precisión que contiene el tiempo transcurrido entre dos consultaciones sucesivas.

# Introducción a la interfaz MPI, Ejemplo.

Cálculo de  $\pi$ .

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) \Big|_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}$$

Algoritmo de calculo de la integrale.

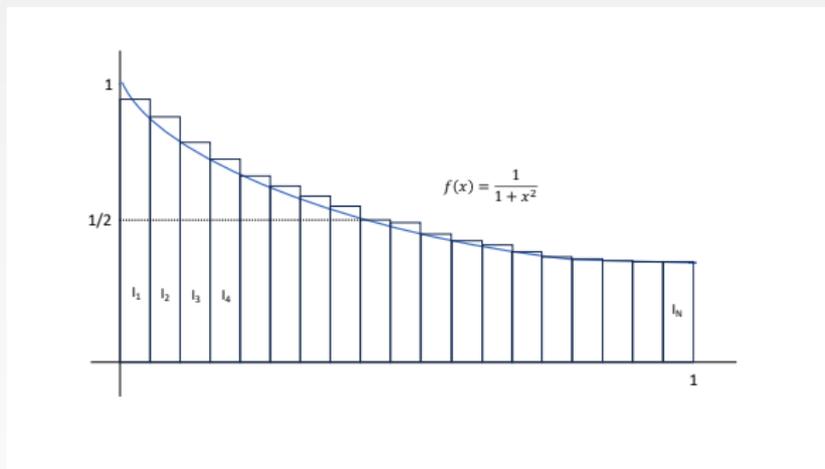


Figure – Descomposición del intervalo.

Paralelizamos el cálculo agrupando la evaluación de la superficie  $I_i$  en varios subgrupos y efectuando la adición.

A continuación, con una operación de reducción (suma global) obtenemos el resultado.

Un proceso, el director, es responsable de la comunicación con el exterior. Por otro lado calcula el valor de  $N$  y lo distribuye a todos los procesos(broadcast).

Entonces cada proceso calcula el subgrupo de superficies que le fueron atribuidas, y envía el resultado al proceso que hace la suma global.

## Algoritmo

```
include "mpif.h"
double precision PI25D
parameter(PI25D=3.141592653589793239462643)
double precision mypi,pi,h,sum,x,f,a
integer n,myid,numprocs,i,ierr
C
C función a integrar
C
 $f(a) = 4.d0 / (1.d0 + a * a)$ 
C Call MPI_INIT(ierr)
Call MPI_COMM_RANK(MPI_COMM_WORLD,myid,ierr)
Call MPI_COMM_SIZE(MPI_COMM_WORLD,numprocs,ierr)
10  if(myid.eq.0) then
print*, " entrar el número de intervalos :( si zero stop)"
read(*,*) n
endif
```

## Algoritmo

```
C  
C broadcast n  
C  
Call  
MPI_BCAST(n,1,MPI_INT,0,MPI_COMM_WORLD,ierr)  
C  
C Verificación de n  
C  
C  
if(n.le.0) go to 30  
C
```

## Trabajo de cada esclavo

### Algoritmo

```
h=1/n  
sum=0.  
do 20 i = myid + 1, n, numprocs  
x=h*(dble(i)-0.5)  
sum=sum+f(x)  
20 continue  
mypi=h*sum
```

## Algoritmo

```
C
C recuperación de todas las sumas parciales
C
Call
MPI_REDUCE(my $\pi$ , $\pi$ ,1,MPI_DOUBLE_PRECISION,MPI_SUM,0,
MPI_COMM_WORLD,ierr)
C
C El proceso 0 escribe la respuesta
C
if(myid.eq.0) then
print*, "pi es ",  $\pi$ , "Erreur", abs( $\pi$ -PI25D)
endif
go to 10
30 Call MPI_FINALIZE(ierr)
Stop
end
```

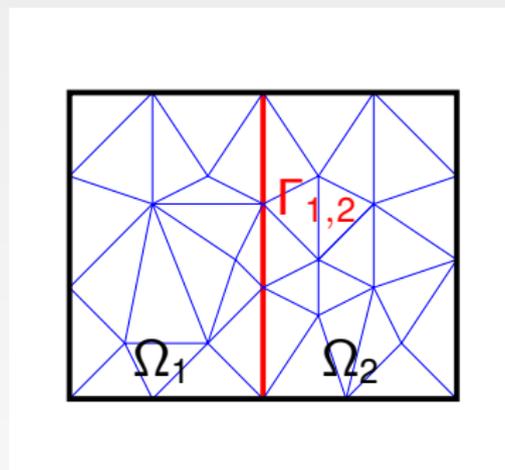


Figure – Descomposición en dos subdominios sin solapamiento.

$$-\Delta u_1^n + \eta u_1^n = f, \text{ en } \Omega_1$$

$$u_1^n = 0 \text{ en } \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega$$

$$\frac{\partial u_1^n}{\partial n_1} + \alpha_1 u_1^n = \frac{\partial u_2^{n-1}}{\partial n_1} + \alpha_1 u_2^{n-1} = \xi_1, \text{ en } \Gamma_{1,2}$$

y

$$-\Delta u_2^n + u_2^n = f, \text{ en } \Omega_2$$

$$u_2^n = 0 \text{ en } \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega$$

$$\frac{\partial u_2^n}{\partial n_2} + \alpha_2 u_2^n = \frac{\partial u_1^{n-1}}{\partial n_2} + \alpha_2 u_1^{n-1} = \xi_2, \text{ en } \Gamma_{1,2}$$

A cada iteración debemos resolver :

$$\begin{aligned} -\Delta u_k^n &= f, \quad \text{en } \Omega_k \\ u_k^n &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega \\ \frac{\partial u_k^n}{\partial n_k} + \alpha_k u_k^n &= \xi_k, \quad \text{en } \Gamma_{1,2} \end{aligned}$$

y

$$(\xi_k, u_k) \rightarrow \frac{\partial u_k^n}{\partial n_l} + \alpha_l u_k^n$$

con  $k = 1, 2, l = 1, 2, l \neq k$

Formulación variacional :

$$\int_{\Omega_k} (-\Delta u_k^n + \eta u_k^n) v \, dx = \int_{\Omega_k} f v \, dx$$

$$\int_{\Omega_k} \nabla u_k^n \nabla v + \eta u_k^n v \, dx - \int_{\Gamma_{1,2}} \frac{\partial u_k^n}{\partial n_1} v \, d\gamma = \int_{\Omega_k} f v \, dx$$

$$\int_{\Omega_k} \nabla u_k^n \nabla v + \eta u_k^n v \, dx - \int_{\Gamma_{1,2}} (\xi_k - \alpha_k u_k^n) v \, d\gamma = \int_{\Omega_k} f v \, dx$$

# Aspectos prácticos de Schwarz sin solapamiento

Un aspecto práctico es la evaluación fuerte o débil de la derivada normal :

1) Si  $k = 1$  y  $l = 2$ ,

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial u_1^n}{\partial n_2} + \alpha_2 u_1^n\right)|_{\Gamma_{1,2}} &= \left(-\frac{\partial u_1^n}{\partial n_1} + \alpha_2 u_1^n\right)|_{\Gamma_{1,2}} \\ &= (\alpha_1 u_1 - \xi_1 + \alpha_2 u_1)|_{\Gamma_{1,2}}\end{aligned}$$

2) Consideremos la función test  $v$  definida en  $\Gamma_{1,2}$ . Sean  $v_1$ ,  $v_2$  relevamientos de  $v$  en  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  respectivamente.

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_{1,2}} \left(\frac{\partial u_1^n}{\partial n_2} + \alpha_2 u_1^n\right) v_2 \, d\gamma &= - \int_{\Gamma_{1,2}} \frac{\partial u_1^n}{\partial n_1} v_1 \, d\gamma + \int_{\Gamma_{1,2}} \alpha_2 u_1^n v_1 \, d\gamma \\ &= - \left( \int_{\Omega_1} \nabla u_1^n \nabla v_1 + \eta u_1^n v \, dx - \int_{\Omega_1} f v_1 \, dx \right) + \\ &\quad + \int_{\Gamma_{1,2}} \alpha_2 u_1^n v_1 \, d\gamma\end{aligned}$$

En una dimensión, utilizando diferencias finitas (Que de hecho son equivalentes a elementos finitos  $\mathbb{P}_1$ ) definimos una descomposición en dos subdominios dando  $\gamma = x_m$ .

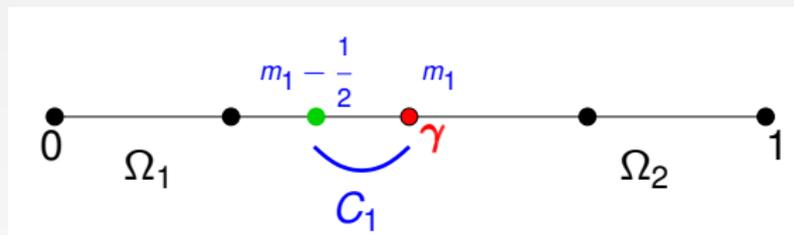


Figure – Descomposición en dos subdominios sin solapamiento.

El algoritmo toma la forma :'

$$-(u_1^n)'' + \eta u_1^n = f \text{ en } (0, \gamma)$$

$$u_1^n(0) = 0$$

$$(u_1^n)' + \alpha_1 u_1^n = (u_2^{n-1})' + \alpha_1 u_2^{n-1} = \xi_1 \text{ en } x_m = \gamma$$

y

$$-(u_2^n)'' + \eta u_2^n = f \text{ en } (\gamma, 1)$$

$$u_2^n(1) = 0$$

$$-(u_2^n)' + \alpha_2 u_2^n = -(u_1^{n-1})' + \alpha_2 u_1^{n-1} = \xi_2 \text{ en } x_m = \gamma$$

Dado  $u_1^n$  el calculo de  $-(u_1^n)' + \alpha_2 u_1^n$  en  $\gamma$  lo podemos efectuar de la manera siguiente :

1) Como en dos dimensiones :

$$-(u_1^n)'(\gamma) + \alpha_2 u_1^n(\gamma) = \alpha_1 u_1^n(\gamma) - \xi_1 + \alpha_2 u_1^n(\gamma)$$

2) Integrando numéricamente en un pequeño intervalo :

$$\int_{\gamma-h/2}^{\gamma} -(u_1^n)''(x) + \eta u_1^n(x) - f(x) dx = 0$$

obtenemos :

$$(u_1^n)' = -\left(\frac{u_1^n(\gamma) - (u_1^n(\gamma - h))}{h}\right) - \eta \frac{h}{2} u_1^n(\gamma) + \frac{h}{2} f(\gamma)$$

Consideramos las ecuaciones de Maxwell siguientes :

$$\begin{cases} \frac{\partial D}{\partial t} = \text{rot}\mathcal{H} - \mathcal{J} \\ \frac{\partial B}{\partial t} = -\text{rot}\mathcal{E} \end{cases}$$

$\mathcal{E}$  campo eléctrico

$\mathcal{H}$  campo magético

$D$  induction eléctrica

$B$  inducción magética

$\mathcal{J}$  densidad de corriente eléctrica

$D = \epsilon\mathcal{E}$  y  $B = \mu\mathcal{H}$ , donde  $\epsilon$  es la permitividad dieléctrica y  $\mu$  la permeabilidad magnética.

$\mathcal{J} = \sigma\mathcal{E}$ ,  $\sigma > \sigma_0$  es la conductividad eléctrica.

$$\mathcal{E} = \operatorname{Re}[E(x) \exp i\omega t].$$

$$\mathcal{H} = \operatorname{Re}[H(x) \exp i\omega t].$$

donde  $\omega$  es la frecuencia angular o pulsación,  $\omega \neq 0$ .

$\Rightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{rot} H - i\epsilon\omega E - \sigma E = 0 \quad \text{en } \Omega \\ \operatorname{rot} E - i\mu\omega H = 0 \quad \text{en } \Omega \\ n \times E = \psi \quad \text{en } \partial\Omega \end{array} \right.$$

Sustituyendo y eliminando  $H$  obtenemos una equation en terminos de  $E$  :

$$\begin{cases} \operatorname{rot}(\mu^{-1} \operatorname{rot} E) - \omega^2 \epsilon E + i\omega\sigma E = 0 & \text{en } \Omega \\ n \times E = \psi & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Si  $u = E - E_\psi$  con  $n \times E_\psi = \psi$  en  $\partial\Omega$ .

$$\begin{cases} \operatorname{rot}(\mu^{-1} \operatorname{rot} u) - \omega^2 \epsilon u + i\omega\sigma u = F & \text{en } \Omega \\ n \times u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

con  $F = -\operatorname{rot}(\mu^{-1} \operatorname{rot} E_\psi) + \omega^2 \epsilon E_\psi - i\omega\sigma E_\psi$

Si  $u_i = u|_{\Omega_i}$ , para  $i = 1, 2$

$$\operatorname{rot}(\mu^{-1} \operatorname{rot} u_1) - \omega^2 \epsilon u_1 + i\omega\sigma u_1 = F_1 \quad \text{en } \Omega_1$$

$$n \times u_1 = 0 \quad \text{en } \partial\Omega \cap \partial\Omega_1$$

$$n \times u_1 = n \times u_2 \quad \text{en } \Gamma$$

$$n \times (\mu^{-1} \operatorname{rot} u_1) = n \times (\mu^{-1} \operatorname{rot} u_2) \quad \text{en } \Gamma$$

$$n \times u_2 = 0 \quad \text{en } \partial\Omega \cap \partial\Omega_2$$

$$\operatorname{rot}(\mu^{-1} \operatorname{rot} u_2) - \omega^2 \epsilon u_2 + i\omega\sigma u_2 = F_2 \quad \text{en } \Omega_2$$

Consideremos los espacios :

$$H(\text{rot}, \Omega) = \{v \in (L^2(\Omega))^3 \mid \text{rot } v \in (L^2(\Omega))^3\}$$

$$H_0(\text{rot}, \Omega) = \{v \in H(\text{rot}, \Omega) \mid (n \times v)|_{\partial\Omega} = 0\}$$

Definimos la forma bilineal :

$$m(u, v) = \int_{\Omega} (\mu^{-1} \text{rot } u \text{ rot } \bar{v} - \omega^2 \epsilon u \bar{v} + i\omega \sigma u \bar{v}) dx \quad \forall u, v \in H(\text{rot}, \Omega)$$

La formulación débil del problema es la siguiente : encontrar  $u \in H_0(\text{rot}, \Omega)$  tal que :

$$m(u, v) = (F, v) \quad \forall v \in H_0(\text{rot}, \Omega)$$

$$\forall u, v \in H(\text{rot}, \Omega) \quad \int_{\Omega} [\text{rot } u v - u \text{ rot } v] dx = (u, v \times n)|_{\Gamma}$$

El caso de baja frecuencia corresponde a prescindir del termino

$$-\omega^2 \int_{\Omega} \epsilon u \bar{v} dx$$

entonces es facil demostrar la coercividad.

$$|m(v, v)|^2 = \int_{\Omega} (\mu^{-1} \operatorname{rot} v \operatorname{rot} \bar{v} + \omega \sigma v \bar{v}) dx$$

Pero  $\int_{\Omega} (\sigma v \bar{v}) dx \geq \sigma_0 \|v\|_0^2$   
 $\Rightarrow$

$$|m(v, v)|^2 \geq \max\{\mu^{-1}, \omega \sigma_0\} \|v\|_{H_{rot}}^2$$

donde :

$$\|v\|_{H_{rot}}^2 = \left( \int_{\Omega} (\operatorname{rot} v \operatorname{rot} \bar{v} + v \bar{v}) dx \right)^{1/2}$$

si consideramos los espacios :

$$Z_j = \{v_j \in H(\text{rot}, \Omega_j) \mid n \times v_j = 0 \text{ en } \partial\Omega_j \cap \partial\Omega\}$$

$$Z_j^0 = H_0(\text{rot}, \Omega_j)$$

$$\chi_\Gamma = \{\Psi : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \Psi = n \times v|_\Gamma, v \in H_0(\text{rot}, \Omega)\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1(u_1, v_1) = (F_1, v_1)_1 \quad \forall v_1 \in Z_1^0 \\ n \times u_1 = n \times u_2 \text{ en } \Gamma \\ m_2(u_2, v_2) = (F_2, v_2)_2 \quad \forall v_2 \in Z_2^0 \\ m_2(u_2, \mathcal{R}_2\Psi) = (F_2, \mathcal{R}_2\Psi)_2 + (F_1, \mathcal{R}_1\Psi)_1 - m_1(u_1, \mathcal{R}_1\Psi) \quad \forall \Psi \in \chi_\Gamma \end{array} \right.$$

donde  $\mathcal{R}_1\Psi$  y  $\mathcal{R}_2\Psi$  son operadores de  $\chi_\Gamma \rightarrow Z_j, j = 1, 2$  tal que  $n \times \mathcal{R}_j\Psi = \Psi, j = 1, 2$ .

Dado  $\lambda_h^0 \in \chi_h$  para cada  $k \geq 0$  hacer :

$$\begin{cases} \text{calcular } u_{1,h}^{k+1} \in Z_{1,h} \\ m_1(u_{1,h}^{k+1}, v_{1,h}) = (F, v_{1,h}) \quad \forall v_{1,h} \in Z_{1,h}^0 \\ (n \times u_{1,h}^{k+1})|_{\Gamma} = \lambda_h^k \text{ en } \Gamma \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} \text{calcular } u_{2,h}^{k+1} \in Z_{2,h} \\ m_2(u_{2,h}^{k+1}, v_{2,h}) = (F, v_{2,h}) \quad \forall v_{2,h} \in Z_{2,h}^0 \\ m_2(u_{2,h}^{k+1}, \mathcal{R}_{2,h}\Psi_h) = (F_2, \mathcal{R}_{2,h}\Psi_h)_2 + (F_1, \mathcal{R}_{1,h}\Psi_h)_1 \\ \quad - m_1(u_{1,h}^{k+1}, \mathcal{R}_{1,h}\Psi_h) \quad \forall \Psi_h \in \chi_{\Gamma,h} \end{cases}$$

y entonces :

$$\lambda_k^{k+1} = \theta (n \times u_{2,h}^{k+1})|_{\Gamma} + (1 - \theta)\lambda_h^k \text{ en } \Gamma$$

Consideramos el problema de calcular el campo eléctrico en un tokamak :

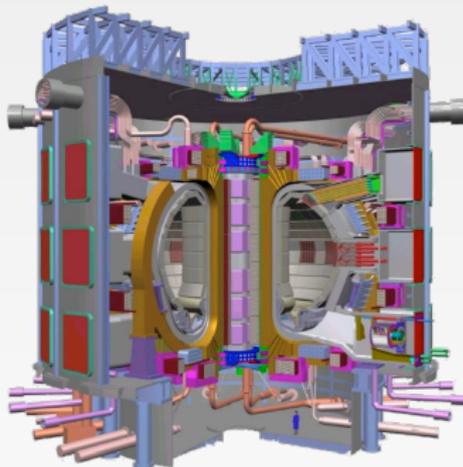


Figure – Maqueta de un tokamak.

Introducimos un modelo en dos dimensiones en una sección :

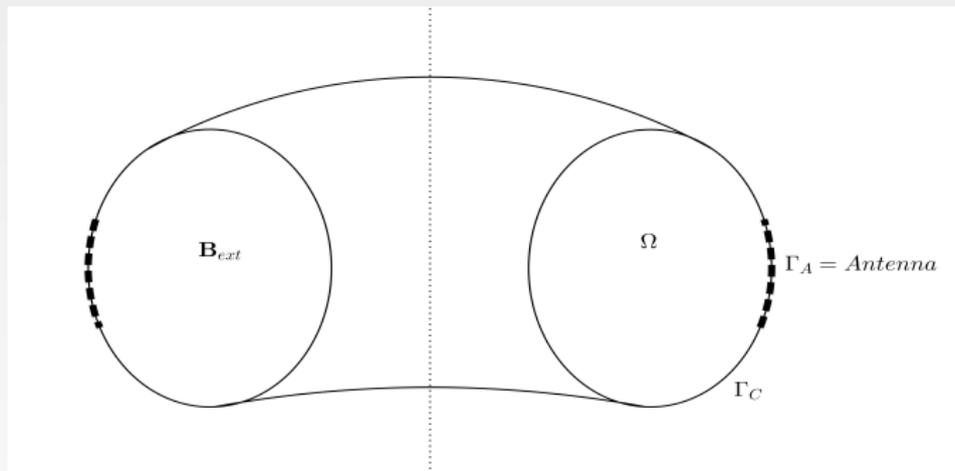


Figure – Dominio de calculo.

y consideramos una formulación armónica.

Entonces las ecuaciones de Maxwell se transforman en una equation de segundo orden en el campo eléctrico

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} - \frac{\omega^2}{c^2} \underline{\mathbf{K}} \mathbf{E} &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ \operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}} \mathbf{E}) &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} \times \mathbf{n} &= i\omega\mu_0 \mathbf{j}_s \quad \text{on } \Gamma_A, \\ \mathbf{E} \times \mathbf{n} &= 0 \quad \text{on } \Gamma_C = \Gamma \setminus \Gamma_A.\end{aligned}$$

# Formulación mixta aumentada

Para tener en cuenta las condiciones de borde introducimos multiplicadores y restricciones :

- $\mathbf{H}_0^C(\text{rot}, \Omega) := \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega) \mid \mathbf{u} \times \mathbf{n}|_{\Gamma_C} = 0\}$ .
- $\mathbf{X}_N^C(\underline{\mathbf{K}}, \Omega) := \mathbf{H}_0^C(\text{rot}, \Omega) \cap \mathbf{H}(\text{div} \underline{\mathbf{K}}, \Omega)$ .

Calculamos  $(\mathbf{E}, p) \in \mathbf{X}_N^C(\underline{\mathbf{K}}, \Omega) \times L^2(\Omega)$  tal que :

$$a_s(\mathbf{E}, \mathbf{F}) + \overline{b(\mathbf{F}, p)} = l(\mathbf{F}) \quad \forall \mathbf{F} \in \mathbf{X}_N^C(\underline{\mathbf{K}}, \Omega), \quad (66)$$

$$b(\mathbf{E}, q) = 0 \quad \forall q \in L^2(\Omega), \quad (67)$$

donde :

$$\begin{aligned} a_s(\mathbf{E}, \mathbf{F}) &:= (\text{rot} \mathbf{E} \mid \text{rot} \mathbf{F}) - \frac{\omega^2}{c^2} (\underline{\mathbf{K}} \mathbf{E} \mid \mathbf{F}) + \\ &\quad + s(\text{div}(\underline{\mathbf{K}} \mathbf{E}) \mid \text{div}(\underline{\mathbf{K}} \mathbf{F})), \quad s \in \mathbb{C} \\ b(\mathbf{F}, p) &:= (\text{div}(\underline{\mathbf{K}} \mathbf{F}) \mid p), \\ l(\mathbf{F}) &:= i\omega\mu_0 \langle \mathbf{j}_s, \mathbf{F}_T \rangle_{\Gamma}. \end{aligned} \quad (68)$$

En cada subdominio calculamos los campos  $\mathbf{E}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) tal que :

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E}_i - \frac{\omega^2}{c^2} \underline{\mathbf{K}} \mathbf{E}_i &= \mathbf{f}_i \quad \text{en } \Omega_i, \\ \operatorname{div}(\underline{\mathbf{K}} \mathbf{E}_i) &= \mathbf{g}_i \quad \text{en } \Omega_i, \\ \mathbf{E}_i \times \mathbf{n} &= 0 \quad \text{en } \Gamma^i,\end{aligned}$$

Las condiciones de transmisión en  $\Sigma_{i,j}$  son :

$$[\mathbf{E} \times \mathbf{n}]_{\Sigma_{i,j}} = 0 \quad (69)$$

$$[\underline{\mathbf{K}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}]_{\Sigma_{i,j}} = 0 \quad (70)$$

$$[\operatorname{rot} \mathbf{E} \times \mathbf{n}]_{\Sigma_{i,j}} = 0. \quad (71)$$

Sea :

$$\mathbf{W}_i = \{ \mathbf{v}_i \in \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega_i) \cap \mathbf{H}(\text{div } \underline{\mathbf{K}}, \Omega_i) \mid \mathbf{v}_i \times \mathbf{n}|_{\Gamma^i} = 0 \}$$

$$\mathbf{W}_i^0 = \mathbf{H}_0(\text{rot}, \Omega_i) \cap \mathbf{H}(\text{div } \underline{\mathbf{K}}, \Omega_i) = \mathbf{X}_N(\underline{\mathbf{K}}, \Omega_i)$$

La formulación débil es :

encontrar  $(\mathbf{E}_i, p_i) \in \mathbf{W}_i \times L^2(\Omega_i)$  tal que

$$\begin{aligned} a_{i,s}(\mathbf{E}_i, \mathbf{F}_i) + \overline{b_i(\mathbf{F}_i, p_i)} &= L_i(\mathbf{F}_i) \quad \forall \mathbf{F}_i \in \mathbf{W}_i^0 \\ b_i(\mathbf{E}_i, q_i) &= l_i(\mathbf{F}_i) \quad \forall q_i \in L^2(\Omega_i) \\ [\mathbf{E}]_{\Sigma_{i,j}} &= 0 \\ [\text{rot } \mathbf{E} \times \mathbf{n}]_{\Sigma_{i,j}} &= 0 \end{aligned} \quad (72)$$

La solución de este sistema de ecuaciones es solución de el problema multidominios.

Para considerar las condiciones de salto a travez de las fronteras introducimos multiplicadores de Lagrange  $\lambda_{ij}$ , obtenemos una formulación llamada LDMAVF :

Encontrar  $(\mathbf{E}_i, p_i, \lambda_i) \in \mathbf{W}_i \times L^2(\Omega_i) \times \chi$  tal que :

$$\begin{aligned}
 & a_{i,s}(\mathbf{E}_i, \mathbf{F}_i) + \overline{b_i(\mathbf{F}_i, p_i)} \\
 + \langle \lambda_{in}, [\underline{\mathbf{K}}\mathbf{F}_i \cdot \mathbf{n}_i] \rangle_{\Sigma} + \langle \lambda_{iT}, [\mathbf{F}_i \times \mathbf{n}_i] \rangle_{\Sigma} &= L_i(\mathbf{F}_i) \quad \forall \mathbf{F}_i \in \mathbf{W}_i^0 \\
 & b_i(\mathbf{E}_i, q_i) = l_i(\mathbf{F}_i) \quad \forall q_i \in L^2(\Omega_i) \\
 \langle \mu_{in}, [\underline{\mathbf{K}}\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{n}_i] \rangle_{\Sigma} + \langle \mu_{iT}, [\mathbf{E}_i \times \mathbf{n}_i] \rangle_{\Sigma} &= 0 \quad \forall (\mu_i) \in \chi
 \end{aligned}$$

con  $\chi = \{ \varphi \in H^{-1/2}(\Sigma_{ij}) \mid \varphi|_{\Sigma_{ij}} = \mathbf{v}|_{\Sigma_{ij}}, \mathbf{v} \in \mathbf{X}_N(\underline{\mathbf{K}}, \Omega) \}$ .

(1) Assous et al., 2011

## Théorème

La formulacion LDMAVF admite una solución unica

$$(\mathbf{E}_i, p_i, \boldsymbol{\lambda}_i) \in \mathbf{W}_i \times L^2(\Omega_i) \times \boldsymbol{\chi}_\Sigma^W.$$

Ademas  $(\mathbf{E}_i, p_i) \in \mathbf{X}_N(\underline{\mathbf{K}}, \Omega_i) \times L^2(\Omega_i)$  es solución de la formulación monodominio. Y tenemos que :

$$\lambda_n = (s g - s \operatorname{div} \underline{\mathbf{K}} \mathbf{E} - p)|_{\Sigma_{i,j}} \quad y \quad \boldsymbol{\lambda}_T = (\operatorname{rot} \mathbf{E})_T|_{\Sigma_{i,j}} \quad (73)$$

Sistema de coordenadas  $(R, Z, \theta)$ .

Elementos finitos de Taylor-Hood,  $\mathbb{P}_2 - \mathbb{P}_1$ .

Descomposición en cinco subdominios.

Solución del sistema lineal : algoritmo GMRES.

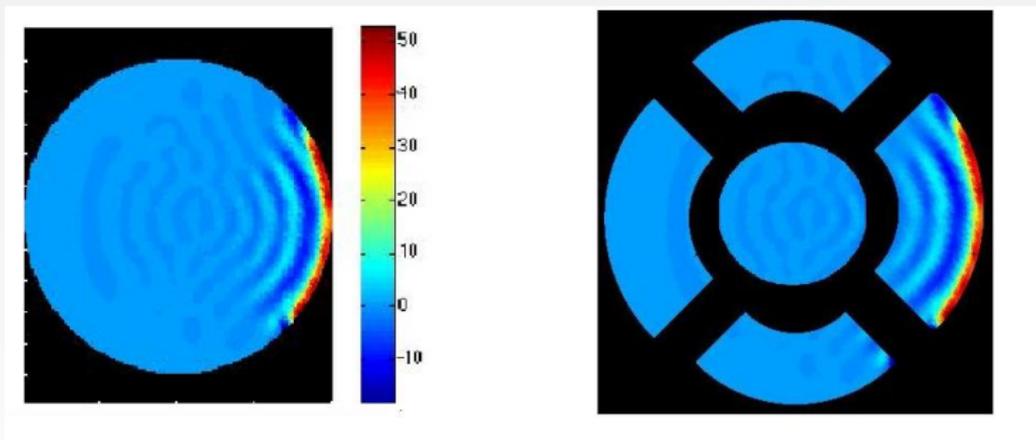


Figure – descomposición en cinco subdominios.

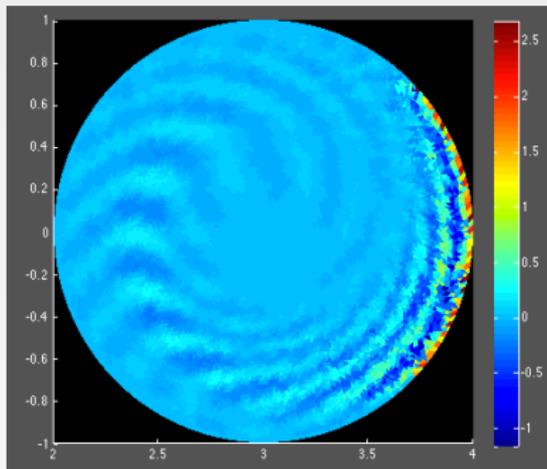


Figure – Componente en R.

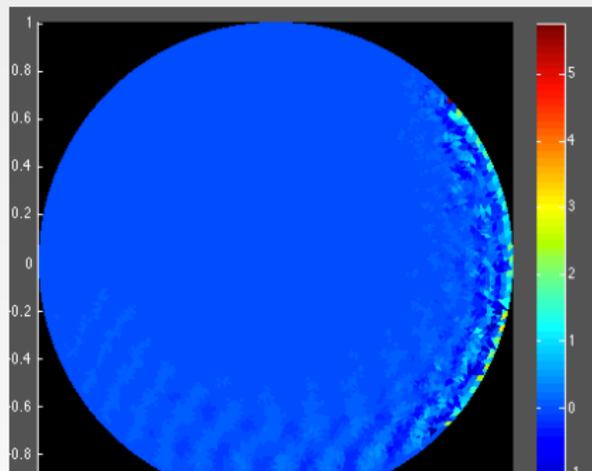


Figure – Componente en Z.

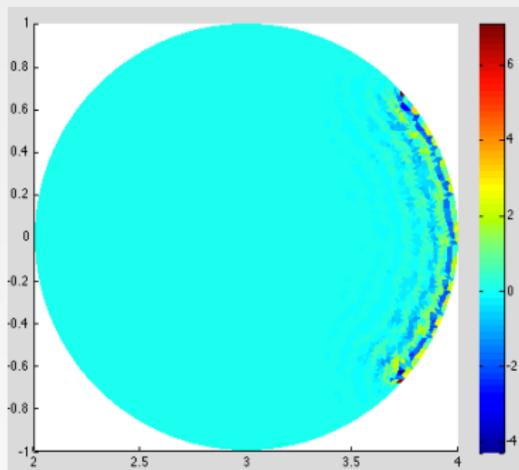


Figure – Componente en  $\theta$ .