

# **Introducción al método de descomposición de dominios**

**Universidad de la República, Montevideo, Uruguay, Octubre 2023**

Jean Rodolphe Roche,  
Profesor Emérito de la Universidad de Lorena, Francia

5 de octubre de 2023

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>4</b>
1.1. Motivación . . . . .	4
1.2. Formulación multidominios . . . . .	5
1.2.1. Interpretación con elementos finitos . . . . .	9
1.2.2. Operador de Steklov-Poincaré . . . . .	11
1.2.3. Formulación débil del problema de Steklov-Poincaré . . . . .	12
1.2.4. Caso de la elasticidad lineal . . . . .	14
<b>2. Método de Schwarz</b>	<b>17</b>
2.1. Introducción . . . . .	17
2.2. Formulación variacional . . . . .	19
2.3. Formulación como un método de proyección . . . . .	20
2.4. Una generalización . . . . .	22
2.5. Discretización . . . . .	23
2.5.1. Ejemplo de aplicación del método de Schwarz . . . . .	27
2.5.2. Método de Schwarz discretización, Gauss Seidel . . . . .	29
2.5.3. Método de Schwarz discretización, RAS. . . . .	30
2.5.4. Algoritmo multicolor . . . . .	30
2.5.5. Método de Richardson. . . . .	31
2.6. Convergencia en una dimensión . . . . .	32
<b>3. Métodos de Subestructuración</b>	<b>37</b>
3.1. Método del complemento de Schur . . . . .	37
3.1.1. Caso multidominios . . . . .	40
3.2. Métodos de subestructuración en formulación continua . . . . .	42
3.2.1. Método Dirichlet-Neumann . . . . .	42
3.2.2. Método Neumann-Neumann . . . . .	44
3.2.3. Método de Dirichlet- Neumann para la ecuación de elasticidad lineal . . . . .	45
3.2.4. Método de Schwarz sin solapado, condiciones de Robin . . . . .	45
3.2.5. Convergencia del método de Schwarz sin solapamiento . . . . .	46
3.2.6. Elección del parámetro $\alpha$ . . . . .	48
3.2.7. Método de Agoshkov-Lebedev . . . . .	50
3.2.8. Método FETI (Finite Element Tearing and Interconnecting method) . . . . .	51
3.2.9. Formulación utilizando multiplicadores de Lagrange . . . . .	56
<b>4. Ecuaciones Parabólicas (Problemas de evolución)</b>	<b>60</b>
4.0.1. Existencia y unicidad de la solución . . . . .	60
4.0.2. Descomposición de dominios . . . . .	62
4.0.3. Método clásico . . . . .	64

4.0.4.	Ejemplo numérico . . . . .	66
4.0.5.	Método Waveform . . . . .	67
<b>5.</b>	<b>Apéndice</b>	<b>73</b>
5.1.	Condicionamiento de sistemas lineales . . . . .	73
5.1.1.	Introducción . . . . .	73
5.1.2.	Norma de una matriz . . . . .	73
5.1.3.	Condicionamiento de un sistema lineal . . . . .	79
5.1.4.	Condicionamiento y descomposición de dominios . . . . .	87
5.2.	Precondicionadores . . . . .	87
5.2.1.	El preconditionador SSOR d'Evans . . . . .	88
5.2.2.	El algoritmo de Richardson . . . . .	90
5.3.	Pseudo inversa de Moore-Penrose . . . . .	93
5.4.	Gradiente Proyectado . . . . .	94
5.5.	Reconexión de espacios de Sobolev . . . . .	95
5.6.	Fórmula de Green . . . . .	95
5.7.	Introducción al cálculo paralelo . . . . .	97
5.7.1.	Clasificación de la arquitecturas . . . . .	97
5.7.2.	Caracterización del rendimiento de una calculadora paralela . . . . .	98
5.8.	Introducción a la interfaz MPI (Message Passing Interface) . . . . .	101
5.8.1.	Ejemplo . . . . .	104

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Motivación

Podemos considerar dos tipos de motivación, la primera de orden informática y la segunda análisis numérico.

Es conveniente de establecer que la primera utilización del método de descomposición de dominios es obra de Hermann Amandus Schwarz que en un artículo publicado en 1870 utilizó una descomposición de dominios para resolver una ecuación de Laplace en un dominio en forma de L utilizando la representación de la solución en serie de Fourier cuando el dominio es un rectángulo. Pero fue una utilización aislada que no dio lugar ni a un desarrollo intensivo de la metodología, ni a un análisis de rendimiento y de las aplicaciones posibles.

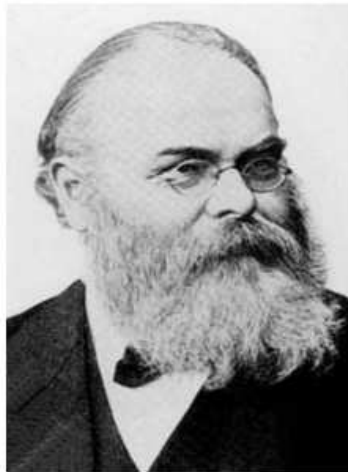


Figura 1.1: Hermann Amandus Schwarz.

Posteriormente el método de descomposición de dominios volvió a ser estudiado cuando aparecieron las computadoras paralelas. La discretización de ecuaciones diferenciales a derivadas parciales establecidas en dominios de geometría muy compleja, con características físicas muy variables (por ejemplo, las secciones eficaces de fenómenos físicos) implican en general un mallado muy fino y en consecuencia un sistema lineal de tal tamaño que es insoluble con un computador monoprocesador, sin contar con los problemas causados por la necesidad de pre-condicionamiento.

El método de descomposición de dominios permitirá resolver este tipo de problemas descomponiendo el problema inicial, sobre todo el dominio, en un conjunto de problemas de dimensión más

pequeña definidos en subdominios. Cada sub-problema discretizado tendrá una dimensión bien inferior a la dimensión del problema original, el sistema lineal resultante será de dimensión menor, mejor condicionado y resoluble con una computadora mono procesadora. Los diversos sub-problema podrán ser resueltos en paralelo en una computadora con multiprocesadores y un algoritmo, en general iterativo, permitirá la convergencia a la solución del problema original.

Fundamentalmente los métodos de descomposición de dominios se dividen en dos tipos, los métodos con o sin solapamiento (o superposición) de subdominios. Los métodos con solapamiento son llamados métodos de Schwarz y los métodos sin solapamiento se los suele llamar métodos de subestructuración.

Para resolver una ecuación diferencial a derivadas parciales en un dominio  $\Omega$  utilizando la descomposición de dominios  $\{\Omega_i\}_{i=1,\dots,m}$  se deberá establecer la formulación multidominios equivalente, es decir los subproblemas a resolver sobre cada sub-dominio  $\Omega_i$  y las condiciones de interfaz, es decir a la frontera de subdominios, de tal manera que la solución del problema mono dominio sea la misma que la solución del problema multidominios. Enseguida establecer el algoritmo de resolución del problema multidominios y para terminar desarrollar el programa informático que implemente el algoritmo multidominios en un computador multiprocesador.

Estas notas de curso están inspirada en un conjunto des trabajos y libros que son referenciados en la bibliografía. Señalo aquí los principales: [55], [14], [63], [3], [9], [18] y [17].

## 1.2. Formulación multidominios

Para introducir la formulación multidominios de un problema dado por ecuaciones diferenciales de derivadas parciales vamos a considerar un problema simple, la ecuación de Poisson definida sobre un dominio acotado  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$ .

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x) & \text{si } x \in \Omega \\ u(x) = 0 & \text{si } x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (1.1)$$

Introducimos una descomposición del dominio  $\Omega$  en dos subdominios  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  sin solapamiento es decir que  $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2$  y  $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ .

Definimos  $\Gamma = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$  la interfaz entre los dos subdominios, que suponemos Lipschitz. Sea  $\bar{n} = \bar{n}_1$  el vector normal exterior al dominio  $\Omega_1$ .

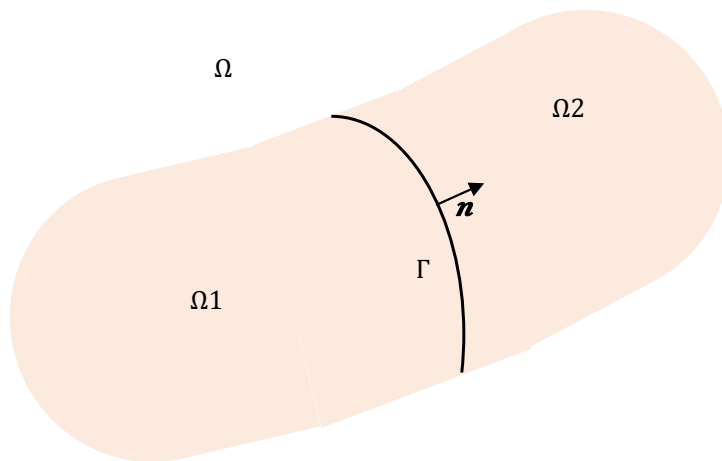


Figura 1.2: descomposición en dos subdominios.

En lo que sigue notamos  $u_i, i = 1, 2$  las restricciones a  $\Omega_i, i = 1, 2$  respectivamente de  $u$  la solución del problema (1.1).

El problema (1.1) puede ser reformulado en la forma multi-dominio siguiente:

$$\begin{cases} -\Delta u_1(x) = f(x) & \text{si } x \in \Omega_1 \\ u_1(x) = 0 & \text{si } x \in \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega \\ u_1(x) = u_2(x) & \text{si } x \in \Gamma \\ \frac{\partial u_2}{\partial \bar{n}} = \frac{\partial u_1}{\partial \bar{n}} & \text{si } x \in \Gamma \\ u_2(x) = 0 & \text{si } x \in \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega \\ -\Delta u_2(x) = f(x) & \text{si } x \in \Omega_2 \end{cases} \quad (1.2)$$

Tenemos una equivalencia fuerte entre los dos problemas (es decir tienen la misma solución) si  $u$  es suficientemente regular, es decir  $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ . En otros casos se obtiene una equivalencia entre las formulaciones débiles de los dos problemas.

### Definiciones de espacios útiles

$$\begin{aligned} (u, v) &= \int_{\Omega} uv \, dx \\ L^2(\Omega) &= \{v \text{ función medible definida sobre } \Omega \text{ tal que } (v, v) \text{ es finita}\} \text{ (funciones de cuadrado integrable).} \\ H^1(\Omega) &= \{v \in L^2(\Omega) \text{ tal que } \nabla v \in L^2(\Omega)\} \\ H_0^1(\Omega) &= \{v \in H^1(\Omega) \text{ tal que } v = 0 \text{ en } \partial\Omega\} \\ H^{1/2}(\Gamma) &= \text{espacio de trazas en } \Gamma \text{ de las funciones de } H^1(\Omega). \end{aligned}$$

Además definimos los siguientes espacios funcionales definidos sobre los subdominios:

$$\begin{aligned} V &= H_0^1(\Omega) \\ V_i &= \{v_i \in H^1(\Omega_i) \text{ tal que } v_i|_{\partial\Omega_i \cap \partial\Omega} = 0\} \\ V_i^0 &= H_0^1(\Omega_i) \\ \Lambda &= \{\eta \in H^{1/2}(\Gamma) \text{ tal que } \eta = v|_{\Gamma} \text{ para un } v \in V\} \end{aligned}$$

Cabe señalar que el espacio funcional  $\Lambda$  no es el mismo con respecto a la posición de la frontera  $\Gamma$ . Si  $\Gamma \cap \partial\Omega = \emptyset$  entonces  $\Lambda = H^{1/2}(\Gamma)$ . Si  $\Gamma \cap \partial\Omega \neq \emptyset$  entonces  $\Lambda = H_{00}^{1/2}(\Gamma)$ . El espacio  $H_{00}^{1/2}(\Gamma) \subset H^{1/2}(\Gamma)$ . Todos estos espacios están dotados de una norma:

- i) En  $L^2(\Omega)$  definimos  $\|v\|_{0,\Omega} = (v, v)^{1/2}$ .
- ii) En  $H^1(\Omega)$  definimos  $\|v\|_{1,\Omega} = (\|v\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{j=1}^2 \|\frac{\partial v}{\partial x_j}\|_{0,\Omega}^2)^{1/2}$ .

Para demostrar la equivalencia entre la forma débil o variacional mono dominio y la formulación débil multi-dominio debemos definir los operadores de relevamiento siguientes:

$$\mathcal{R}_i : \Lambda \rightarrow V_i \text{ tal que } (\mathcal{R}_i \eta)|_{\Gamma} = \eta \quad i = 1, 2 \quad (1.3)$$

Este tipo de operador continuo existe, por ejemplo el relevamiento armónico.

La formulación variacional del problema (1.1) es la siguiente: encontrar  $u \in H_0^1(\Omega)$  tal que:

$$a(u, v) = (\nabla u, \nabla v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx = (f, v), \text{ para todo } v \in H_0^1(\Omega) \quad (1.4)$$

Si ahora definimos  $(u_i, v_i)_i = \int_{\Omega_i} u_i v_i \, dx$  y  $a_i(u_i, v_i) = (\nabla u_i, \nabla v_i)_i$  la formulación débil del problema multidominios (1.2) es la siguiente: Encontrar  $u_1 \in V_1$  y  $u_2 \in V_2$  tal que:

$$\begin{cases} a_1(u_1, v_1) = (f, v_1)_1 \quad \forall v_1 \in V_1^0 \\ u_1 = u_2 \quad \text{en } \Gamma \\ a_2(u_2, v_2) = (f, v_2)_2 \quad \forall v_2 \in V_2^0 \\ a_2(u_2, \mathcal{R}_2\mu) = (f, \mathcal{R}_2\mu)_2 + (f, \mathcal{R}_1\mu)_1 - a_1(u_1, \mathcal{R}_1\mu) \quad \forall \mu \in \Lambda \end{cases} \quad (1.5)$$

**Lema 1.2.1.** *Los problemas (1.4) y (1.5) son equivalentes, es decir que si  $u$  es solución de (1.4) la restricción de  $u$  a  $\Omega_1$ ,  $u_1$  y la restricción de  $u$  a  $\Omega_2$ ,  $u_2$  son solución del problema (1.5) y viceversa.*

**Demostración 1.2.1.** *Ida*

Supongamos que  $u \in H_0^1(\Omega)$  es la solución de la ecuación (1.4). Definimos  $u_i = u|_{\Omega_i}$ ,  $i = 1, 2$ , entonces  $u_i \in V_i$  y verifican las siguientes ecuaciones:

$$a_1(u_1, v_1) = \int_{\Omega_1} \nabla u_1 \nabla v_1 \, dx = \int_{\Omega_1} \nabla u \nabla v_1 \, dx = \int_{\Omega_1} f v_1 \, dx = (f, v_1)_1 \quad \forall v_1 \in V_1^0$$

$$a_2(u_2, v_2) = \int_{\Omega_2} \nabla u_2 \nabla v_2 \, dx = \int_{\Omega_2} \nabla u \nabla v_2 \, dx = \int_{\Omega_2} f v_2 \, dx = (f, v_2)_2 \quad \forall v_2 \in V_2^0$$

y

$$u_1 = u_2 \quad \text{en } \Gamma$$

Para  $\mu \in \Lambda$  definimos la función  $\mathcal{R}$  tal que  $\mu \rightarrow \mathcal{R}\mu$  de la manera siguiente:

$$\mathcal{R}\mu = \begin{cases} \mathcal{R}_1\mu & \text{en } \Omega_1 \\ \mathcal{R}_2\mu & \text{en } \Omega_2 \end{cases}$$

entonces  $\mathcal{R}\mu \in H_0^1(\Omega)$  (reconexión de Sobolev, ver apéndice).

De la definición de  $u$  tenemos que  $a(u, \mathcal{R}\mu) = (f, \mathcal{R}\mu)$ , pero entonces:

$$a(u, \mathcal{R}\mu) = a_1(u_1, \mathcal{R}_1\mu) + a_2(u_2, \mathcal{R}_2\mu) = (f, \mathcal{R}\mu) = (f, \mathcal{R}_1\mu)_1 + (f, \mathcal{R}_2\mu)_2$$

concluimos que:

$$a_2(u_2, \mathcal{R}_2\mu) = (f, \mathcal{R}_1\mu)_1 + (f, \mathcal{R}_2\mu)_2 - a_1(u_1, \mathcal{R}_1\mu)$$

Vuelta

Consideremos ahora  $u_i, i = 1, 2$  la solución de (1.5). Definimos:

$$u = \begin{cases} u_1 & \text{en } \Omega_1 \\ u_2 & \text{en } \Omega_2 \end{cases} \quad (1.6)$$

Pero  $u_1 = u_2$  en  $\Gamma$ , entonces  $u \in H_0^1(\Omega)$  (reconexión de Sobolev).

Por otro lado si  $v \in H_0^1(\Omega)$  podemos definir  $\mu = v|_{\Gamma} \in \Lambda$ . Si ahora consideramos que el relevamiento  $\mathcal{R}_i\mu$  pertenece a  $V_i$  y además  $(v|_{\Omega_i} - \mathcal{R}_i\mu) \in H_0^1(\Omega_i) = V_i^0$  y eso para  $i = 1, 2$ .

Llevando esto a la formulación variacional del problema (1.4) obtenemos:

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \sum_{i=1}^2 a_i(u_i, v|_{\Omega_i} - \mathcal{R}_i\mu) + a_i(u_i, \mathcal{R}_i\mu) \\ &= \left( \sum_{i=1}^2 (f, v|_{\Omega_i} - \mathcal{R}_i\mu) \right) + a_1(u_1, \mathcal{R}_1\mu) \\ &\quad + (f, \mathcal{R}_1\mu) + (f, \mathcal{R}_2\mu) - a_1(u_1, \mathcal{R}_1\mu) \\ &= \sum_{i=1}^2 (f, v|_{\Omega_i} - \mathcal{R}_i\mu) + (f, \mathcal{R}_i\mu) \\ &= (f, v) \end{aligned}$$

es decir que  $u$  definido en (1.6) es solución de (1.4) en  $H_0^1(\Omega)$ .

### Caso regular

Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  un abierto acotado de borde Lipschitz y  $\Omega_1, \Omega_2$  dos abiertos de borde Lipschitz subconjuntos de  $\Omega$  tal que:

$$\overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2 = \overline{\Omega} \quad (1.7)$$

$$\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset \quad (1.8)$$

Sea  $\Gamma = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ .

Sea  $u$  una solución regular del problema siguiente:

$$Lu = -\nabla \cdot (a(x)\nabla u) + b(x) \cdot \nabla u + c(x)u = f, \text{ en } \Omega \quad (1.9)$$

$$u = 0, \text{ en } \partial\Omega \quad (1.10)$$

aquí suponemos que  $b(x)$  es regular.

### Teorema 1.2.1. (Equivalencia fuerte)

1) Suponemos que  $u$  es una solución del problema (1.9).

2) Sean  $w_1$  y  $w_2$  soluciones regulares del problema multidominios siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{lll} Lw_1(x) & = & f(x) & \text{si } x \in \Omega_1 \\ w_1(x) & = & 0 & \text{si } x \in \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega \\ w_1(x) & = & w_2(x) & \text{si } x \in \Gamma \\ n_1 \cdot (a\nabla w_2 - bw_2) & = & n_1 \cdot (a\nabla w_1 - bw_1) & \text{si } x \in \Gamma \\ w_2(x) & = & 0 & \text{si } x \in \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega \\ Lw_2(x) & = & f(x) & \text{si } x \in \Omega_2 \end{array} \right. \quad (1.11)$$

Entonces:

$$\left\{ \begin{array}{l} w_1(x) = u(x), \text{ en } \overline{\Omega}_1 \\ w_2(x) = u(x), \text{ en } \overline{\Omega}_2 \end{array} \right. \quad (1.12)$$

**Demostración 1.2.2.** Si  $u$  es solución regular de (1.9), sea  $w_i = u$  en  $\overline{\Omega}_i$ , mostremos que  $w_i, i = 1, 2$  son solución de (1.11).

Por 1)  $Lw_i = f_i, i = 1, 2$  y por la continuidad de  $u$ ,  $w_1 = w_2$  en  $\Gamma$ .

Integrando el problema (1.9) contra una función test  $v \in C_0^\infty(\Omega)$ :

$$\int_{\Omega} (a\nabla u \nabla v - u \nabla \cdot (bv) + cuv) dx = \int_{\Omega} f v dx \quad (1.13)$$

$$\sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_i} (a\nabla w_i \nabla v - w_i \nabla \cdot (bv) + cw_i v) dx = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_i} f v dx \quad (1.14)$$

Por otro lado si aplicamos Green:

$$\sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_i} (-\nabla \cdot (a\nabla w_i - b\nabla w_i)v + cw_i v) dx \quad (1.15)$$

$$- \int_{\Gamma} n_1 \cdot (a\nabla w_1 - bw_1 - a\nabla w_2 + bw_2)v d\Gamma = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_i} f v dx \quad (1.16)$$



A partir de (1.13) obtenemos:

$$\int_{\Gamma} n_1 \cdot (a \nabla w_1 - b w_1 - a \nabla w_2 + b w_2) v \, d\Gamma = 0, \forall v \in C_0^\infty(\Omega) \quad (1.17)$$

En consecuencia:

$$n_1 \cdot (a \nabla w_1 - b w_1) = n_1 \cdot (a \nabla w_2 - b w_2), \text{ en } \Gamma \quad (1.18)$$

Los cálculos, a causa de la regularidad, pueden efectuarse en los dos sentidos.

### 1.2.1. Interpretación con elementos finitos

Consideremos un dominio  $\Omega$  que descomponemos en dos subdominios  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  sin solapamiento. Consideremos una triangulación uniforme que anotamos  $\mathcal{T}_h(\Omega)$  compatible con la descomposición de dominios, ver la figura (1.3).

Sea  $V_h = \{v_h : v_h \in C^0(\Omega), y v_T \in \mathbb{P}_1(T), \forall T \in \mathcal{T}_h(\Omega)\}$  y  $X_h = V_h \cap H_0^1(\Omega)$ .

Anotamos  $x_j^{(1)}, 1 \leq j \leq N_1$  los nodos de interpolación de  $\Omega_1$ ,  $x_j^{(2)}, 1 \leq j \leq N_2$  los nodos de interpolación de  $\Omega_2$  y  $x_j^{(\Gamma)}, 1 \leq j \leq N_\Gamma$  los nodos de interpolación de  $\Gamma$ . Las funciones de base de  $X_h$  son anotadas en consecuencia:  $\varphi_j^{(1)}$  las funciones asociadas a los nodos  $x_j^{(1)}$ ,  $\varphi_j^{(2)}$  las funciones asociadas a los nodos  $x_j^{(2)}$  y  $\varphi_j^{(\Gamma)}$  las funciones asociadas a los nodos  $x_j^{(\Gamma)}$ .

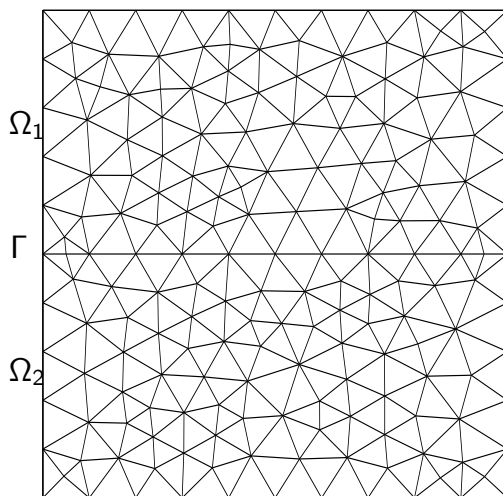


Figura 1.3: Malla en dos subdominios

Así  $u_h \in X_h$  podrá escribirse de la manera siguiente:

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^{N_1} u_h(x_j^{(1)}) \varphi_j^{(1)}(x) + \sum_{j=1}^{N_2} u_h(x_j^{(2)}) \varphi_j^{(2)}(x) + \sum_{j=1}^{N_\Gamma} u_h(x_j^{(\Gamma)}) \varphi_j^{(\Gamma)}(x) \quad (1.19)$$

Entonces la formulación débil de (1.5) toma la forma siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^{N_1} u_h(x_j^{(1)})a_1(\varphi_j^{(1)}, \varphi_i^{(1)}) + \sum_{j=1}^{N_\Gamma} u_h(x_j^{(\Gamma)})a_1(\varphi_j^{(\Gamma)}, \varphi_i^{(1)}) = (f, \varphi_i^{(1)})_1, \quad 1 \leq i \leq N_1 \\ \sum_{j=1}^{N_2} u_h(x_j^{(2)})a_2(\varphi_j^{(2)}, \varphi_i^{(2)}) + \sum_{j=1}^{N_\Gamma} u_h(x_j^{(\Gamma)})a_2(\varphi_j^{(\Gamma)}, \varphi_i^{(2)}) = (f, \varphi_i^{(2)})_2, \quad 1 \leq i \leq N_2 \\ \sum_{j=1}^{N_\Gamma} u_h(x_j^{(\Gamma)})[a_1(\varphi_j^{(\Gamma)}, \varphi_i^{(\Gamma)}) + a_2(\varphi_j^{(\Gamma)}, \varphi_i^{(\Gamma)}) + \\ + \sum_{j=1}^{N_1} u_h(x_j^{(1)})a_1(\varphi_j^{(1)}, \varphi_i^{(\Gamma)}) + \sum_{j=1}^{N_2} u_h(x_j^{(2)})a_2(\varphi_j^{(2)}, \varphi_i^{(\Gamma)})] \\ = (f, \varphi_i^{(\Gamma)})_1 + (f, \varphi_i^{(\Gamma)})_2, \quad 1 \leq i \leq N_\Gamma \end{array} \right. \quad (1.20)$$

Si ahora anotamos:

- $(A_{11})_{i,j} = a_1(\varphi_j^{(1)}, \varphi_i^{(1)})$ ,
- $(A_{22})_{i,j} = a_2(\varphi_j^{(2)}, \varphi_i^{(2)})$ ,
- $(A_{1\Gamma})_{i,j} = a_1(\varphi_j^{(\Gamma)}, \varphi_i^{(1)})$ ,
- $(A_{2\Gamma})_{i,j} = a_2(\varphi_j^{(\Gamma)}, \varphi_i^{(2)})$ ,
- $(A_{\Gamma 1})_{i,j} = a_1(\varphi_j^{(1)}, \varphi_i^{(\Gamma)})$ ,
- $(A_{\Gamma 2})_{i,j} = a_2(\varphi_j^{(2)}, \varphi_i^{(\Gamma)})$ ,
- $(A_{\Gamma\Gamma}^{(1)})_{i,j} = a_1(\varphi_j^{(\Gamma)}, \varphi_i^{(\Gamma)})$ ,
- $(A_{\Gamma\Gamma}^{(2)})_{i,j} = a_2(\varphi_j^{(\Gamma)}, \varphi_i^{(\Gamma)})$ ,
- $(F_1)_j = (f, \varphi_j^{(1)})_1$ ,
- $(F_2)_j = (f, \varphi_j^{(2)})_2$ ,
- $(F_1^\Gamma)_j = (f, \varphi_j^{(\Gamma)})_1$ ,
- $(F_2^\Gamma)_j = (f, \varphi_j^{(\Gamma)})_2$ ,
- $(U_1)_j = u_h(x_j^{(1)})$ ,  $(U_2)_j = u_h(x_j^{(2)})$  y  $(\lambda)_j = u_h(x_j^{(\Gamma)})$ .

El sistema (1.20) puede ahora formularse de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} A_{11}U_1 + A_{1\Gamma}\lambda &= F_1 \\ A_{22}U_2 + A_{2\Gamma}\lambda &= F_2 \\ A_{\Gamma 1}U_1 + A_{\Gamma 2}U_2 + (A_{\Gamma\Gamma}^{(1)} + A_{\Gamma\Gamma}^{(2)})\lambda &= F_1^\Gamma + F_2^\Gamma \end{aligned} \quad (1.21)$$

Dicho de otra manera,  $U$  es solución del sistema lineal:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & 0 & A_{1\Gamma} \\ 0 & A_{22} & A_{2\Gamma} \\ A_{\Gamma 1} & A_{\Gamma 2} & A_{\Gamma\Gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_\Gamma \end{bmatrix} \quad (1.22)$$

donde  $A_{\Gamma\Gamma} = (A_{\Gamma\Gamma}^{(1)} + A_{\Gamma\Gamma}^{(2)})$  y  $F_\Gamma = F_1^\Gamma + F_2^\Gamma$ .

### 1.2.2. Operador de Steklov-Poincaré

En esta sección vamos a estudiar un meta algoritmo para resolver el problema multidominios (1.5). El operador Steklov Poincaré que también se conoce como el operador de Dirichlet-Neumann es un operador que en el caso de una ecuación elíptica sobre un dominio acotado con condiciones de borde (en la frontera) de tipo Dirichlet le da al dato de Dirichlet en la frontera la derivada normal en la frontera.

El algoritmo consiste fundamentalmente en la resolución de una ecuación con incógnitas solamente en  $\Gamma$ . Vamos a determinar la condición de Dirichlet en el borde  $\Gamma$  de manera que la solución de nuestra ecuación en los subdominios verifique todas las condiciones de (1.2).

Sea  $\lambda$  el valor incógnita de  $u$  en  $\Gamma$ ; consideremos los dos problemas siguientes:

$$\begin{cases} -\Delta w_i(x) = f(x) & \text{si } x \in \Omega_i \\ w_i(x) = 0 & \text{si } x \in \partial\Omega_i \cap \partial\Omega \\ w_i(x) = \lambda & \text{si } x \in \Gamma \end{cases} \quad (1.23)$$

para  $i = 1, 2$ . Formalmente  $w_i = u_i$  para  $i = 1, 2$  si y solamente si

$$\frac{\partial w_1}{\partial \bar{n}} = \frac{\partial w_2}{\partial \bar{n}} \quad (1.24)$$

Veremos como establecer un algoritmo iterativo sobre  $\lambda$  de manera a converger a una solución verificando (1.24).

Consideremos la descomposición de  $w_i, i=1,2$  siguiente:

$$w_i = w_i^\circ + w_i^* \quad (1.25)$$

tal que:

$$\begin{cases} -\Delta w_i^\circ(x) = 0 & \text{si } x \in \Omega_i \\ w_i^\circ(x) = 0 & \text{si } x \in \partial\Omega_i \cap \partial\Omega \\ w_i^\circ(x) = \lambda & \text{si } x \in \Gamma \end{cases} \quad (1.26)$$

Es decir que  $w_i^\circ$  es el relevamiento armónico de  $\lambda$  en  $\Omega_i$ , que notamos  $H_i\lambda$ . Por otro lado:

$$\begin{cases} -\Delta w_i^*(x) = f(x) & \text{si } x \in \Omega_i \\ w_i^*(x) = 0 & \text{si } x \in \partial\Omega_i \cap \partial\Omega \\ w_i^*(x) = 0 & \text{si } x \in \Gamma \end{cases} \quad (1.27)$$

Notamos  $w_i^* = G_i f$ .

Formalmente tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_i}{\partial \bar{n}} &= \frac{\partial w_i^\circ}{\partial \bar{n}} + \frac{\partial w_i^*}{\partial \bar{n}} \\ &= \frac{\partial H_i \lambda}{\partial \bar{n}} + \frac{\partial G_i f}{\partial \bar{n}} \end{aligned}$$

Queremos obtener  $\lambda$  tal que se verifique la ecuación (1.24), es decir que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_1}{\partial \bar{n}} &= \frac{\partial w_2}{\partial \bar{n}} \\ \frac{\partial(w_1^\circ + w_1^*)}{\partial \bar{n}} &= \frac{\partial(w_2^\circ + w_2^*)}{\partial \bar{n}} \\ \frac{\partial(w_1^\circ - w_2^\circ)}{\partial \bar{n}} &= \frac{\partial(w_2^* - w_1^*)}{\partial \bar{n}} \\ \frac{\partial H_1 \lambda}{\partial \bar{n}} - \frac{\partial H_2 \lambda}{\partial \bar{n}} &= \frac{\partial G_2}{\partial \bar{n}} - \frac{\partial G_1}{\partial \bar{n}} \end{aligned}$$

Es decir que formalmente  $\lambda$  debe satisfacer una ecuación definida en la interfaz:

$$S\lambda = \chi \quad (1.28)$$

con  $S = S_1 - S_2$ ,  $S_i\lambda = \frac{\partial H_i\lambda}{\partial \bar{n}}$ ,  $i = 1, 2$ , el operador de Steklov-Poincaré.

El segundo miembro  $\chi$  es dado por:

$$\chi = \frac{\partial G_2 f}{\partial \bar{n}} - \frac{\partial G_1 f}{\partial \bar{n}} \quad (1.29)$$

Para definir el sentido de la ecuación (1.28), vamos a pasar por una formulación débil de el operador de Steklov-Poincaré.

### 1.2.3. Formulación débil del problema de Steklov-Poincaré

El operador de Steklov-Poincaré está definido como  $S : \Lambda \rightarrow \Lambda'$ , ( $\Lambda'$  el dual de  $\Lambda$ ). Y puede ser representado de la manera siguiente:

$$\langle S\eta, \mu \rangle_{\Lambda', \Lambda} = \sum_{i=1}^2 \left\langle \frac{\partial H_i \lambda}{\partial \bar{n}}, \mu \right\rangle \quad (1.30)$$

$$= \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_i} \nabla(H_i \eta) \nabla(R_i \mu) dx \quad (1.31)$$

$$= \sum_{i=1}^2 a_i(H_i \eta, R_i \mu) \quad \forall \eta, \mu \in \Lambda \quad (1.32)$$

Si elegimos como relevamiento  $\mathcal{R}_i$  el relevamiento armónico  $H_i$  obtenemos:

$$\langle S\eta, \mu \rangle_{\Lambda', \Lambda} = \sum_{i=1}^2 a_i(H_i \eta, H_i \mu) \quad \forall \eta, \mu \in \Lambda \quad (1.33)$$

verificamos que  $S$  es simétrico y si  $\eta = \mu$  obtenemos:

$$\langle S\eta, \eta \rangle_{\Lambda', \Lambda} = \sum_{i=1}^2 a_i(H_i \eta, H_i \mu) = \sum_{i=1}^2 \|\nabla H_i \eta\|_{0, \Omega_i}^2 \geq \sum_{i=1}^2 \frac{1}{1 + C_{\Omega_i}^2} \|H_i \eta\|_{1, \Omega_i}^2 \quad (1.34)$$

La constante  $C_{\Omega_i}$  es la constante de Poincaré.

(Por información: el lema de Poincaré nos dice que  $\|H_i \eta\|_{0, \Omega_i} \leq C_{\Omega_i} \|\nabla H_i \eta\|_{0, \Omega_i}$  puesto que  $H_i \eta \in H^1(\Omega_i)$  y  $H_i \eta = 0$  en  $\partial \Omega_i \cap \partial \Omega$ . Entonces

$$\|H_i \eta\|_{1, \Omega_i}^2 = \|H_i \eta\|_{0, \Omega_i}^2 + \|\nabla H_i \eta\|_{0, \Omega_i}^2 \leq (1 + C_{\Omega_i}^2) \|\nabla H_i \eta\|_{0, \Omega_i}^2$$

El teorema de trazas nos dice que  $\|\eta\|_{\Lambda} \leq C_i^* \|H_i \eta\|_{1, \Omega_i}$  entonces obtenemos que:

$$\langle S\eta, \eta \rangle_{\Lambda', \Lambda} \geq \sum_{i=1}^2 \frac{C_i^{*2}}{1 + C_{\Omega_i}^2} \|\eta\|_{\Lambda}^2 \geq \alpha \|\eta\|_{\Lambda}^2 \quad \forall \eta \in \Lambda \quad (1.35)$$

es decir que en consecuencia  $S$  es un operador elíptico. Es lo mismo para los operadores  $S_i$ ,  $i = 1, 2$ . Además, los operadores  $S_i$  son continuos pues:

$$\begin{aligned} \langle S_i \eta, \mu \rangle_{\Lambda', \Lambda} &= \left\langle \frac{\partial H_i \lambda}{\partial \bar{n}}, \mu \right\rangle \\ &= a_i(H_i \eta, H_i \mu) \\ &\leq C_1 \|H_i \eta\|_{1, \Omega_i} \|H_i \mu\|_{1, \Omega_i} \\ &\leq \beta_i \|\eta\|_{\Lambda} \|\mu\|_{\Lambda} \end{aligned}$$

El segundo miembro de la ecuación puede expresarse de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}
 \langle \chi, \mu \rangle_{\Lambda', \Lambda} &= - \sum_{i=1}^2 \left\langle \frac{\partial G_i f}{\partial \bar{n}_i}, \mu \right\rangle \\
 &= - \sum_{i=1}^2 \int_{\partial \Omega_i} \frac{\partial G_i f}{\partial \bar{n}_i} \mu \, d\gamma \\
 &= \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_i} -\nabla G_i f \mathcal{R}_i \mu \, dx - \int_{\Omega_i} \nabla G_i f \nabla \mathcal{R}_i \mu \, dx \\
 &= \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_i} (f \mathcal{R}_i \mu - \nabla G_i f \nabla \mathcal{R}_i \mu) \, dx \\
 &= \sum_{i=1}^2 ((f, \mathcal{R}_i \mu)_i - a_i(G_i f, \mathcal{R}_i \mu))
 \end{aligned}$$

Es lineal y continuo pues es combinación de funciones lineales y continuas sobre  $\Lambda$ . En consecuencia, el problema de Steklov-Poincaré admite una solución y es única (Teorema de Lax Milgram).

El algoritmo que resulta es el siguiente: Calcular  $\lambda$  tal que:

$$\langle S\lambda, \mu \rangle = \langle \chi, \mu \rangle \tag{1.36}$$

donde:

$$\langle S\lambda, \mu \rangle = \sum_{i=1}^2 a_i(H_i \lambda, H_i \mu) \tag{1.37}$$

$H_i \lambda$  es solución de:

$$\begin{cases} H_i \lambda \in V_i \\ a_i(H_i \lambda, v_i) = 0 \quad \forall v_i \in V_i^0 \\ H_i \lambda = \lambda \text{ en } \Gamma \end{cases} \tag{1.38}$$

El segundo miembro de la ecuación es dado por:

$$\langle \chi, \mu \rangle = \sum_{i=1}^2 ((f, H_i \mu) - a_i(G_i f, H_i \mu)) \tag{1.39}$$

donde  $G_i f$  es la solución de:

$$\begin{cases} G_i f \in V_i^0 \\ a_i(G_i f, v_i) = f \quad \forall v_i \in V_i^0 \\ G_i f = 0 \text{ en } \partial \Omega_i \end{cases} \tag{1.40}$$

Comentario: La forma variacional del operador de Steklov Poincaré puede obtenerse directamente de la relación:

$$a_2(u_2, \mathcal{R}_2 \mu) = (f, \mathcal{R}_2 \mu)_2 + (f, \mathcal{R}_1 \mu)_1 - a_1(u_1, \mathcal{R}_1 \mu) \quad \forall \mu \in \Lambda \tag{1.41}$$

Si descomponemos  $u_i = u_i^0 + u_i^*$  obtenemos:

$$\sum_{i=1}^2 a_i(u_i^0, \mathcal{R}_i \mu) = \sum_{i=1}^2 (f, \mathcal{R}_i \mu) - \sum_{i=1}^2 a_i(u_i^*, \mathcal{R}_i \mu) \quad \forall \mu \in \Lambda \tag{1.42}$$

integrando por partes se obtiene:

$$a_i(u_i^0, \mathcal{R}_i \mu) = \int_{\Gamma} \frac{\partial u_i^0}{\partial \bar{n}} \mu \, d\Gamma = \left\langle \frac{\partial u_i^0}{\partial \bar{n}}, \mu \right\rangle_{\Lambda', \Lambda} = \left\langle \frac{\partial H_i \lambda}{\partial \bar{n}}, \mu \right\rangle_{\Lambda', \Lambda} \tag{1.43}$$

y

$$a_i(u_i^*, \mathcal{R}_i \mu) = (f, \mathcal{R}_i \mu)_i + \int_{\Gamma} \frac{\partial u_i^*}{\partial \bar{n}} \mu \, d\Gamma \quad (1.44)$$

$$= (f, \mathcal{R}_i \mu)_i + \left\langle \frac{\partial u_i^*}{\partial \bar{n}}, \mu \right\rangle_{\Lambda', \Lambda} \quad (1.45)$$

$$= (f, \mathcal{R}_i \mu)_i + \left\langle \frac{\partial G_i f}{\partial \bar{n}}, \mu \right\rangle_{\Lambda', \Lambda} \quad (1.46)$$

entonces

$$\sum_{i=1}^2 a_i(u_i^0, \mathcal{R}_i \mu) = \sum_{i=1}^2 \left\langle \frac{\partial H_i \lambda}{\partial \bar{n}}, \mu \right\rangle_{\Lambda', \Lambda} \quad (1.47)$$

$$\sum_{i=1}^2 a_i(u_i^*, \mathcal{R}_i \mu) = \sum_{i=1}^2 (f, \mathcal{R}_i \mu)_i + \left\langle \frac{\partial G_i f}{\partial \bar{n}}, \mu \right\rangle_{\Lambda', \Lambda} \quad (1.48)$$

la relación (1.41) puede así reescribirse:

$$\sum_{i=1}^2 \left\langle \frac{\partial H_i \lambda}{\partial \bar{n}}, \mu \right\rangle_{\Lambda', \Lambda} = \sum_{i=1}^2 (f, \mathcal{R}_i \mu)_i - \sum_{i=1}^2 \left\{ (f, \mathcal{R}_i \mu)_i - \left\langle \frac{\partial G_i f}{\partial \bar{n}}, \mu \right\rangle_{\Lambda', \Lambda} \right\}$$

en consecuencia:

$$\int_{\Gamma} \left( \frac{\partial H_1 \lambda}{\partial \bar{n}_1} - \frac{\partial H_2 \lambda}{\partial \bar{n}_2} \right) \mu \, d\gamma = \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial G_2 f}{\partial \bar{n}_2} - \frac{\partial G_1 f}{\partial \bar{n}_1} \right) \mu \, d\gamma \quad (1.49)$$

donde  $H_i \lambda, i = 1, 2$  son solución de (1.38) y  $G_i f, i = 1, 2$  son solución de (1.40).

#### 1.2.4. Caso de la elasticidad lineal

Sea  $\Omega$  un abierto acotado y conexo. Denominamos  $\mathbf{w} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $d$  la dimensión del espacio, una

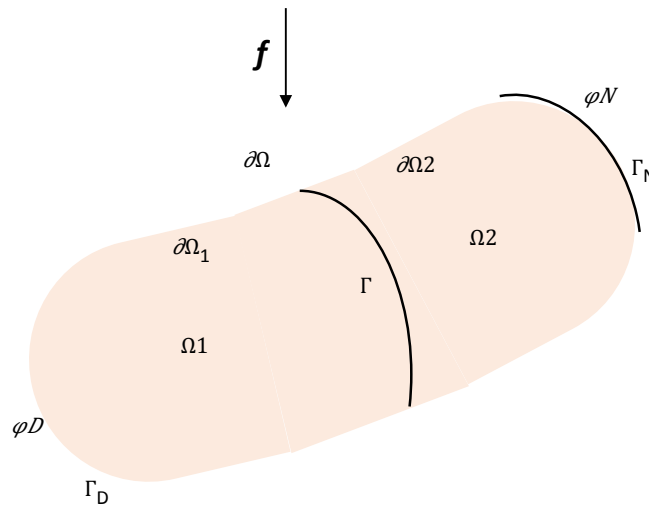


Figura 1.4: descomposición en dos subdominios.

función y  $\sigma(\mathbf{w})$  el tensor de esfuerzo (o tensión) definido por:

$$\sigma_{l,j}(\mathbf{w}) = \hat{\mu} \left( \frac{\partial}{\partial x_l} \mathbf{w}_j + \frac{\partial}{\partial x_j} \mathbf{w}_l \right) + \hat{\lambda} \operatorname{div}(\mathbf{w}) \delta_{l,j} \quad (1.50)$$

donde  $l, j = 1, \dots, d$ ,  $\hat{\mu} > 0$ ,  $\hat{\lambda} \geq 0$  los coeficientes de Lamé y  $\delta_{l,j}$  el tensor de Kronecker.

Definimos la ecuación de equilibrio a través del operador a derivadas parciales siguiente:

$$(L \mathbf{w})_l = - \sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{l,j}(\mathbf{w}), l = 1, \dots, d \quad (1.51)$$

es decir:

$$L \mathbf{w} = -div \sigma(\mathbf{w}) = -\hat{\mu} \Delta \mathbf{w} - (\hat{\mu} + \hat{\lambda}) \nabla(div \mathbf{w}) \quad (1.52)$$

Denominamos  $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  el vector de desplazamientos y entonces la ecuación de equilibrio en elasticidad lineal puede escribirse de la manera siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} (L \mathbf{u})_l = \mathbf{f}_l \text{ en } \Omega, l = 1, \dots, d, \\ u = \varphi_D \text{ en } \partial\Omega_D = \Gamma_D, \\ \sum_{j=1}^d \sigma_{l,j}(\mathbf{u}) \mathbf{u}_j = (\varphi_N)_l \text{ en } \partial\Omega_N = \Gamma_N, l = 1, \dots, d. \end{array} \right. \quad (1.53)$$

donde  $\mathbf{f}$ ,  $\varphi_D$  y  $\varphi_N$  son funciones vectoriales definidas en  $\Omega$ ,  $\Gamma_D$  y  $\Gamma_N$  respectivamente. La descomposición del borde  $\partial\Omega$  en  $\Gamma_D$  y  $\Gamma_N$  verifica que  $\bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N = \partial\Omega$ ,  $\Gamma_D \neq \emptyset$  y  $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$ .

El vector  $\mathbf{f}$  representa las fuerzas que actúan sobre el cuerpo  $\Omega$ .  $\varphi_D$  es el desplazamiento en la porción del borde o frontera llamado  $\Gamma_D$  y  $\varphi_N$  es la tracción aplicada en la región complementaria de la frontera llamada  $\Gamma_N$ .

Ahora consideramos la descomposición en sub-dominios sin solapamiento  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  tal que  $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$  y  $\bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2 = \bar{\Omega}$ . Notamos  $\Gamma$  la frontera ficticia entre  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  ( $\Gamma = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ ).

Notamos  $\mathbf{u}_i$ ,  $i = 1, 2$  las restricciones de  $\mathbf{u}$  a  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  respectivamente. Las condiciones de transmisión a través de la frontera  $\Gamma$  toman la forma siguiente:

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 \quad (1.54)$$

$$\sum_{j=1}^d \sigma_{l,j}(\mathbf{u}_1) n_j = \sum_{j=1}^d \sigma_{l,j}(\mathbf{u}_2) n_j \text{ en } \Gamma \quad (1.55)$$

donde  $n_j$  es la coordenada  $j$  de la normal al borde  $\Gamma$ ,  $\mathbf{n}$ , exterior al dominio  $\Omega_1$ . Estas condiciones representan la continuidad de los desplazamientos y los esfuerzos o tensiones normales en  $\Gamma$ .

### Formulación multidominios

Consideramos la forma bilinear siguiente:

$$\begin{aligned} e(\mathbf{w}, \mathbf{v}) &= \frac{\hat{\mu}}{2} \int_{\Omega} \sum_{j,l=1}^d \left( \frac{\partial}{\partial x_l} \mathbf{w}_j + \frac{\partial}{\partial x_j} \mathbf{w}_l \right) \left( \frac{\partial}{\partial x_l} \mathbf{v}_j + \frac{\partial}{\partial x_j} \mathbf{v}_l \right) dx \\ &\quad + \hat{\lambda} \int_{\Omega} div \mathbf{w} div \mathbf{v} dx \end{aligned} \quad (1.56)$$

en el espacio  $(H_{\Gamma_D}^1(\Omega))^d$ , y  $H_{\Gamma_D}^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) \text{ tal que } v_{\Gamma_D} = 0\}$ .

Si suponemos que  $\mathbf{f}$ ,  $\varphi_D$  y  $\varphi_N$  pertenecen a  $(L^2(\Omega))^d$  podemos enunciar la formulación débil del problema de elasticidad de la manera siguiente:

$$e(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = (f, v) + (\varphi_N, \mathbf{v}_{\Gamma_N})_{\Gamma_N} - e(\hat{\varphi}_D, v) \forall v \in (H_{\Gamma_D}^1(\Omega))^d \quad (1.57)$$

con  $(\varphi, \psi)_{\Gamma_N} = \int_{\Gamma_N} \varphi \cdot \psi d\gamma$  y  $\hat{\varphi}_D$  el prolongamiento a todo  $\Omega$  del dato  $\varphi_D$ . En consecuencia la solución del problema de elasticidad está dada por  $\mathbf{u} = \mathbf{w} + \hat{\varphi}_D$ .

La existencia y la unicidad de la solución es una consecuencia de la desigualdad de Korn:

$$\int_{\Omega} \sum_{j,l=1}^d \left( \frac{\partial}{\partial x_l} \mathbf{v}_j + \frac{\partial}{\partial x_j} \mathbf{v}_l \right)^2 dx \geq \| \mathbf{v} \|_{1,\Omega}^2 \quad (1.58)$$

Para presentar la formulación débil de la formulación multidominios vamos a suponer que  $\Gamma_N = \psi$  y  $\varphi_D = 0$  y una descomposición en dos subdominios sin solapamiento. Notamos las formas bilineales sobre cada subdominio  $\Omega_i$  de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} e_i(\mathbf{w}_i, \mathbf{v}_i) &= \frac{\hat{\mu}}{2} \int_{\Omega} \sum_{j,l=1}^d \left( \frac{\partial}{\partial x_l} \mathbf{w}_{i,j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \mathbf{w}_{i,l} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x_l} \mathbf{v}_{i,j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \mathbf{v}_{i,l} \right) dx \\ &+ \hat{\lambda} \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{w}_i \operatorname{div} \mathbf{v}_i dx \end{aligned} \quad (1.59)$$

Así la formulación débil para dos subdominios se puede enunciar de la manera siguiente:

Encontrar  $\mathbf{u}_1 \in (V_1)^d$  y  $\mathbf{u}_2 \in (V_2)^d$  tal que:

$$\begin{aligned} e_1(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) &= (\mathbf{f}_1, \mathbf{v}_1)_1 \quad \forall \mathbf{v}_1 \in (V_1^0)^d \\ \mathbf{u}_1 &= \mathbf{u}_2 \text{ en } \Gamma \\ e_2(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2) &= (\mathbf{f}_2, \mathbf{v}_2)_2 \quad \forall \mathbf{v}_2 \in (V_2^0)^d \\ e_2(\mathbf{u}_2, \mathcal{R}_2 \mu) &= (\mathbf{f}_2, \mathcal{R}_2 \mu)_2 + (\mathbf{f}_1, \mathcal{R}_1 \mu)_1 - e_1(\mathbf{u}_1, \mathcal{R}_1 \mu) \quad \forall \mu \in \Lambda^d \end{aligned}$$

donde  $\mathcal{R}_i$  es la prolongación de  $\Lambda^d \rightarrow V_i^d$ .

Para reescribir este problema en términos del operador de Steklov-Poincaré definimos las prolongaciones "harmónicas" de los datos en el borde  $\Gamma$  y la solución del problema de Dirichlet homogéneo. Es decir escribimos  $\mathbf{u}_i = \mathcal{E}_i \eta_{\Gamma} + \mathbf{u}_i^*$  donde  $\mathcal{E}_i \eta_{\Gamma}$  es la prolongación "harmónica" de  $\eta_{\Gamma}$  a todo el dominio  $\Omega_i$ , solución de:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_i \eta_{\Gamma} &\in (V_i)^d \\ e_i(\mathcal{E}_i \eta_{\Gamma}, \mathbf{v}_i) &= 0 \quad \forall \mathbf{v}_i \in (V_i^0)^d \\ \mathcal{E}_i \eta_{\Gamma} &= \eta_{\Gamma} \text{ en } \Gamma \end{aligned}$$

Por otro lado  $\mathbf{u}_i^*$  es definido como la solución de:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i^* &\in (V_i^0)^d \\ e_i(\mathbf{u}_i^*, \mathbf{v}_i) &= 0 \quad \forall \mathbf{v}_i \in (V_i^0)^d \end{aligned}$$

Así de manera similar al caso del Laplaciano podemos definir el operador de Steklov-Poincaré de la manera siguiente:

$$\langle S_i \eta, \mu \rangle = e_i(\mathcal{E}_i \eta, \mathcal{E}_i \mu), \quad \forall \eta, \mu \in (\Lambda)^d \quad (1.60)$$

y entonces la formulación en dos subdominios puede enunciarse de la manera siguiente: encontrar  $\lambda$

$$S \lambda = \chi \quad (1.61)$$

con  $S = S_1 + S_2$  y  $\chi = \chi_1 + \chi_2 \in (\Lambda')^d$ .

$$(\chi_i, \mu) = (\mathbf{f}, \mathcal{E}_i \mu) - e_i(\mathbf{u}_i^*, \mathcal{E}_i \mu) \quad \forall \mu \in \Lambda^d. \quad (1.62)$$



# Capítulo 2

## Método de Schwarz

### 2.1. Introducción

Consideremos un dominio  $\Omega$ . Vamos a considerar una descomposición en dos subdominios  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  tal que  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$  y  $\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$ .

Inicialmente el método de Schwarz fue presentado sobre una forma dicha alternativa que más tarde se llamó multiplicativa:

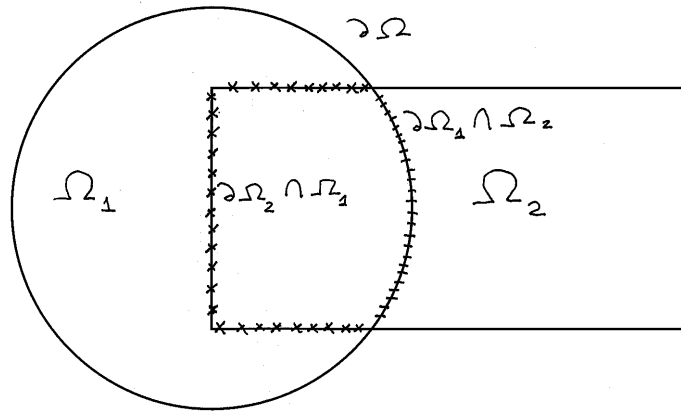


Figura 2.1: descomposición en dos subdominios.

Consideremos siempre el problema elemental de Poisson:

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x) & \text{si } x \in \Omega \\ u(x) = 0 & \text{si } x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (2.1)$$

Inicialmente el método de Schwarz fue presentado sobre una forma dicha alternada que más tarde se llamó multiplicativa: dado una primera estimación de la solución  $u^0$  vamos a construir dos secuencias  $\{u_1^k\}_k$  y  $\{u_2^k\}_k$  que resolverán los problemas siguientes: si  $u_1^0 = u^0|_{\Omega_1}$ , para  $k = 0, \dots$ , convergencia

$$\begin{cases} -\Delta u_1^{k+1}(x) = f(x) & \text{si } x \in \Omega_1 \\ u_1^{k+1}(x) = u_2^k & \text{si } x \in \partial\Omega_1 \cap \Omega_2 \\ u_1^{k+1}(x) = 0 & \text{si } x \in \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega \end{cases} \quad (2.2)$$

y

$$\begin{cases} -\Delta u_2^{k+1}(x) = f(x) & \text{si } x \in \Omega_2 \\ u_2^{k+1}(x) = u_1^{k+1} & \text{si } x \in \partial\Omega_2 \cap \Omega_1 \\ u_2^{k+1}(x) = 0 & \text{si } x \in \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega \end{cases} \quad (2.3)$$

Se demuestra que las secuencias  $\{u_1^k\}_k$  y  $\{u_2^k\}_k$  convergen a  $u_1 = u|_{\Omega_1}$  y  $u_2 = u|_{\Omega_2}$ . Este algoritmo presenta un inconveniente: es necesario resolver el problema (2.2) antes de resolver el problema (2.3) a cada iteración  $k$ , impidiendo así la paralelización de los dos problemas. Así el algoritmo general básico del método de Schwarz para la forma multiplicativa (alternada si las discretizaciones son diferentes en cada subdominio) se puede resumir

- Sea  $w_1 = 0$ .
- Para  $k = 1, \dots$  convergencia, calcular  $u_1^k$  solución de

$$\begin{aligned} \Delta u_1^k &= f_1, \text{ en } \Omega_1 \\ (u_1^k)_{\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega} &= g_1 \text{ en } \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega \\ (u_1^k)_{\Gamma_1} &= w_1^{k-1} \end{aligned}$$

$w_2^k = I_{1,2}u_1^k$  (la traza de  $u_1^k$  en  $\Gamma_2$ )  
calcular  $u_2^k$  solución de

$$\begin{aligned} \Delta u_2^k &= f_2, \text{ en } \Omega_2 \\ (u_2^k)_{\partial\Omega_2 \cap \partial\Omega} &= g_1 \text{ en } \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega \\ (u_2^k)_{\Gamma_1} &= w_2^k \end{aligned}$$

$w_1^k = I_{2,1}u_2^k$  (la traza de  $u_2^k$  en  $\Gamma_1$ )  
Si  $\|w_1^k - w_1^{k-1}\| \leq \text{tol}_\Gamma$  y  $\|w_2^k - w_2^{k-1}\| \leq \text{tol}_\Gamma$  Stop  
Si  $\|u_1^k - u_1^{k-1}\| \leq \text{tol}_{\Omega_1}$  y  $\|u_2^k - u_2^{k-1}\| \leq \text{tol}_{\Omega_2}$  Stop  
end Para

- $u = u_1^k$  en  $\Omega_1$ ,  $u = u_2^k$  en  $\Omega \setminus \Omega_1$ .

Más tarde fue entonces presentado un método de Schwarz que podemos llamar paralelo o aditivo. Dados  $u_1^0 = u^0|_{\Omega_1}$  y  $u_2^0 = u^0|_{\Omega_2}$ , para  $k = 0, \dots$ , convergencia vamos a construir dos secuencias  $\{u_1^k\}_k$  y  $\{u_2^k\}_k$  que resolverán los problemas siguientes:

$$\begin{cases} -\Delta u_1^{k+1}(x) = f(x) & \text{si } x \in \Omega_1 \\ u_1^{k+1}(x) = u_2^k & \text{si } x \in \partial\Omega_1 \cap \Omega_2 \\ u_1^{k+1}(x) = 0 & \text{si } x \in \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega \end{cases} \quad (2.4)$$

y

$$\begin{cases} -\Delta u_2^{k+1}(x) = f(x) & \text{si } x \in \Omega_2 \\ u_2^{k+1}(x) = u_1^k & \text{si } x \in \partial\Omega_2 \cap \Omega_1 \\ u_2^{k+1}(x) = 0 & \text{si } x \in \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega \end{cases} \quad (2.5)$$

en este algoritmo está claro que los dos problemas (2.4) y (2.5) son desacoplados y pueden ser resueltos de manera simultánea, es decir en paralelo. Veremos más tarde que el método multiplicativo se puede también paralelizar, pero de manera un poco menos eficiente.

El algoritmo general básico del método de Schwarz para la forma paralela (aditiva si las discretizaciones son diferentes en cada subdominio) toma la forma siguiente:

- Sea  $w_1^0 = 0$  y  $w_2^0 = 0$ .
- Para  $k = 1, \dots$  convergencia, calcular  $u_1^k$  solución de

$$\begin{aligned} \Delta u_1^k &= f_1, \text{ en } \Omega_1 \\ (u_1^k)_{\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega} &= g_1 \text{ en } \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega \\ (u_1^k)_{\Gamma_1} &= w_1^{k-1} \end{aligned}$$

calcular  $u_2^k$  solución de

$$\begin{aligned} \Delta u_2^k &= f_2, \text{ en } \Omega_2 \\ (u_2^k)_{\partial\Omega_2 \cap \partial\Omega} &= g_1 \text{ en } \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega \\ (u_2^k)_{\Gamma_1} &= w_2^{k-1} \end{aligned}$$

$w_2^k = I_{1,2}u_1^k$  (la traza de  $u_1^k$  en  $\Gamma_2$ )  
 $w_1^k = I_{2,1}u_2^k$  (la traza de  $u_2^k$  en  $\Gamma_1$ )  
 Si  $\|w_1^k - w_1^{k-1}\| \leq \text{tol}_\Gamma$  y  $\|w_2^k - w_2^{k-1}\| \leq \text{tol}_\Gamma$  Stop  
 Si  $\|u_1^k - u_1^{k-1}\| \leq \text{tol}_{\Omega_1}$  y  $\|u_2^k - u_2^{k-1}\| \leq \text{tol}_{\Omega_2}$  Stop  
 end Para

- $u = u_1^k$  en  $\Omega_1$ ,  $u = u_2^k$  en  $\Omega \setminus \Omega_1$ .

## 2.2. Formulación variacional

Consideremos las mismas definiciones del capítulo 1 salvo que definimos:

$$V_i^* = \{v \in V \mid v = 0 \text{ en } \Omega \setminus \bar{\Omega}_i\}. \quad (2.6)$$

La forma variacional del método multiplicativo puede entonces presentarse de la manera siguiente: supongamos conocer  $u^0 \in V$ , para cada  $k \geq 0$  se resuelven las ecuaciones variacionales siguientes:

calcular  $w_1^k \in V_1^0$  la solución de la ecuación:

$$a_1(w_1^k, v_1) = (f, v_1)_1 - a_1(u^k, v_1) \quad \forall v_1 \in V_1^0 \quad (2.7)$$

A continuación definimos la prolongación por zero de  $w_1^k$  a todo  $\Omega$ ,  $\tilde{w}_1^k$  y entonces notamos

$$u^{k+1/2} = u^k + \tilde{w}_1^k. \quad (2.8)$$

Luego calculamos  $w_2^k \in V_2^0$  tal que:

$$a_2(w_2^k, v_2) = (f, v_2)_2 - a_2(u^{k+1/2}, v_2) \quad \forall v_2 \in V_2^0 \quad (2.9)$$

Prolongando por zero  $w_2^k$  a todo  $\Omega$ , se obtiene  $\tilde{w}_2^k$  y entonces la iteración siguiente:

$$u^{k+1} = u^{k+1/2} + \tilde{w}_2^k. \quad (2.10)$$

Por supuesto se recupera la formulación (2.2)-(2.3) si definimos;

$$u^{k+1/2}(x) = \begin{cases} u_1^{k+1}(x) & \text{si } x \in \Omega_1 \\ u_2^k(x) & \text{si } x \in \Omega \setminus \Omega_1 \end{cases} \quad (2.11)$$

y

$$u^{k+1}(x) = \begin{cases} u_2^{k+1}(x) & \text{si } x \in \Omega_2 \\ u_1^{k+1}(x) & \text{si } x \in \Omega \setminus \Omega_2 \end{cases} \quad (2.12)$$

En el caso de la formulación aditiva tenemos una formulación similar: calcular  $w_1^k \in V_1^0$  la solución de la ecuación:

$$a_1(w_1^k, v_1) = (f, v_1)_1 - a_1(u^k, v_1) \quad \forall v_1 \in V_1^0 \quad (2.13)$$

y en paralelo podemos calcular  $w_2^k \in V_2^0$  tal que:

$$a_2(w_2^k, v_2) = (f, v_2)_2 - a_2(u^k, v_2) \quad \forall v_2 \in V_2^0 \quad (2.14)$$

la nueva iteración está definida por:

$$u^{k+1} = u^k + \tilde{w}_1^k + \tilde{w}_2^k \quad (2.15)$$

y entonces:

$$u^{k+1}(x) = \begin{cases} u_1^{k+1}(x) & \text{si } x \in \Omega \setminus \Omega_2 \\ u_1^{k+1}(x) + u_2^{k+1}(x) - u^k(x) & \text{si } x \in \Omega_1 \cap \Omega_2 \\ u_2^{k+1}(x) & \text{si } x \in \Omega \setminus \Omega_1 \end{cases} \quad (2.16)$$

estas dos formulaciones pueden conducir a la versión discretizada por elementos finitos.

### 2.3. Formulación como un método de proyección

El funcional  $a(u, v)$  definido en (1.4) es bilineal y coercivo, define así un producto interior en  $V = H_0^1(\Omega)$ . Es lo mismo para los funcionales  $a_i, i = 1, 2$  en  $V_i^0, V_i$  y  $V_i^*$ . Podemos así definir una proyección ortogonal con respecto a este producto interior inducido por la forma bilineal  $P_i : w \in V \rightarrow P_i w \in V_i^*$  que verifica:

$$a(P_i w - w, v) = 0 \quad \forall v \in V_i^* \quad (2.17)$$

o lo que es lo mismo:

$$a(P_i w, v) = a(w, v) \quad \forall v \in V_i^* \quad (2.18)$$

Este producto interior nos permite de reescribir el método de Schwarz como un método de proyección. La primera ecuación de la formulación variacional del algoritmo multiplicativo puede escribirse de la manera siguiente:  $\forall v \in V_1^*$

$$a(u_1^{k+1/2} - u^k, v) = a(\tilde{w}_1^k, v) = a_1(w_1^k, v|_{\Omega_1}) \quad (2.19)$$

$$= (f, v|_{\Omega_1})_1 - a_1(u^k, v|_{\Omega_1}) \quad (2.20)$$

$$= (f, v) - a(u^k, v) \quad (2.21)$$

$$= a(u - u^k, v) \quad (2.22)$$

Para la segunda ecuación de la formulación multiplicativa obtenemos:

$$a(u^{k+1} - u^{k+1/2}, v) = a(u - u^{k+1/2}, v) \quad \forall v \in V_2^* \quad (2.23)$$

entonces tenemos que las secuencias  $u^{k+1}$  y  $u^{k+1/2}$  verifican:

$$u^{k+1/2} - u^k = P_1(u - u^k) \quad (2.24)$$

$$u^{k+1} - u^{k+1/2} = P_2(u - u^{k+1/2}) \quad (2.25)$$

con  $P_i, i = 1, 2$  es la proyección ortogonal de  $V$  en  $V_i^*$  con respecto al producto escalar inducido por la forma bilinear  $a(\cdot, \cdot)$ . Es decir que para todo  $w \in V$ ,  $P_i w \in V_i^*$  verifica que:

$$a(P_i w - w, v) = 0 \quad \forall v \in V_i^* \quad (2.26)$$

Notamos  $I$  el operador identidad y  $\mathcal{J}_i, i = 1, 2$  el operador de inmersión de  $V_i^*$  en  $V$ , que verifica que  $\mathcal{J}_i v = v$  para todo  $v \in V_i^*$ , este último operador es no denso, es decir de imagen no densa. Notamos también  $\mathcal{J}_i^T$  el operador transpuesto, es decir una aplicación no inyectiva de  $V' \rightarrow (V_i^*)'$  definido por:

$$\langle \mathcal{J}_i^T F, v \rangle = \langle F, \mathcal{J}_i v \rangle \quad (2.27)$$

Podemos definir ahora el operador siguiente:

$$\mathcal{P}_i = \mathcal{J}_i P_i : V \rightarrow V \quad (2.28)$$

Se define también  $Gf$  como la solución del problema siguiente:

$$\begin{cases} Gf \in V \\ a(Gf, v) = f \quad \forall v \in V \end{cases} \quad (2.29)$$

entonces  $u = Gf$  y las igualdades (2.24) implican:

$$u^{k+1/2} = u^k + P_1(u - u^k) \quad (2.30)$$

$$= I(u^k) - \mathcal{P}_1(u^k) + \mathcal{P}_1 Gf \quad (2.31)$$

$$= (I - \mathcal{P}_1)(u^k) + \mathcal{P}_1 Gf \quad (2.32)$$

$$= u^k + \mathcal{P}_1 G(f - \Delta u^k) \quad (2.33)$$

y

$$u^{k+1} = u^{k+1/2} + P_2(u - u^{k+1/2}) \quad (2.34)$$

$$= I(u^{k+1/2}) - \mathcal{P}_2(u^{k+1/2}) + \mathcal{P}_2 Gf \quad (2.35)$$

$$= (I - \mathcal{P}_2)(u^{k+1/2}) + \mathcal{P}_2 Gf \quad (2.36)$$

$$= u^{k+1/2} + \mathcal{P}_2 G(f - \Delta u^{k+1/2}) \quad (2.37)$$

Definimos ahora el operador  $Q_m$ , m por multiplicativo,  $Q_m = \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_2 \mathcal{P}_1 : V \rightarrow V$ , entonces el método multiplicativo o alternado se puede reescribir:

$$u^{k+1} = [(I - \mathcal{P}_2)(I - \mathcal{P}_1)u^k + \mathcal{P}_1 Gf] + \mathcal{P}_2 Gf \quad (2.38)$$

$$= (I - \mathcal{P}_2)(I - \mathcal{P}_1)u^k + (I - \mathcal{P}_2)\mathcal{P}_1 Gf + \mathcal{P}_2 Gf \quad (2.39)$$

$$= u^k + Q_m(Gf - u^k) \quad (2.40)$$

$$= u^k + Q_m G(f - \Delta u^k) \quad (2.41)$$

De la misma manera el método paralelo o aditivo puede formularse como un método de proyección:

$$\tilde{w}_1^k = P_1(u - u^k) \text{ y } \tilde{w}_2^k = P_2(u - u^k) \quad (2.42)$$

Si ahora definimos  $Q_a = \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2$ , obtenemos:

$$u^{k+1} = (I - \mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2)u^k + (\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2)Gf \quad (2.43)$$

$$= u^k + Q_a(Gf - u^k) \quad (2.44)$$

$$= u^k + Q_a G(f - \Delta u^k). \quad (2.45)$$

También es posible escribir la ecuación que verifica el error:

$$u - u^{k+1/2} = (I - \mathcal{P}_1)(u - u^k) \quad (2.46)$$

$$u - u^{k+1} = (I - \mathcal{P}_2)(u - u^{k+1/2}) \quad (2.47)$$

Si ahora definimos el error  $e^k = u - u^k$  se obtiene en el caso multiplicativo:

$$e^{k+1} = (I - \mathcal{P}_2)(I - \mathcal{P}_1)e^k \quad (2.48)$$

y en el caso aditivo:

$$e^{k+1} = (I - \mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2)e^k. \quad (2.49)$$

## 2.4. Una generalización

Lo expuesto en las secciones precedentes se aplican a todo operador elíptico  $L$ , es decir podemos remplazar  $\Delta$  por  $L$  en todas las deducciones. Se puede considerar la ecuación :

$$\begin{cases} -L u(x) = f(x) & \text{si } x \in \Omega \\ u(x) = 0 & \text{si } x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (2.50)$$

Donde  $L$  es un operador elíptico y simétrico dado por:

$$Lu = - \sum_{l,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_l} (a_{l,j} \frac{\partial u}{\partial x_j}) + a_0 u \quad (2.51)$$

los coeficientes  $a_{l,j}$  y  $a_0$  son funciones de  $L^\infty(\Omega)$ . Por simetría entendemos que  $a_{l,j}(x) = a_{j,l}(x)$ ,  $\forall x \in \Omega$ ,  $i, j = 1, \dots, d$  y por elipticidad que existe  $\alpha_0 > 0$  tal que:

$$\sum_{l,j=1}^d a_{l,j}(x) \zeta_l \zeta_j \geq \alpha_0 |\zeta|^2, \forall \zeta \in \mathbb{R}^d, x \in \Omega \quad (2.52)$$

y  $a_0(x) \geq 0$ ,  $\forall x \in \Omega$ .

La forma bilineal asociada es:

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \left( \sum_{l,j=1}^d a_{l,j} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_l} \right) + a_0 u v dx \quad (2.53)$$

Esta forma es bilineal, simétrica, continua y elíptica sobre  $H_0^1(\Omega)$ .

En la formulación multidominios cambian un poco las condiciones de transmisión:

$$u_1 = u_2 \text{ en } \Gamma \quad (2.54)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial n_L} = \frac{\partial u_2}{\partial n_L} \quad (2.55)$$

donde la derivada normal  $\frac{\partial}{\partial n_L}$  es definida por:

$$\frac{\partial v}{\partial n_L} = \sum_{l,j=1}^d a_{l,j} \frac{\partial v}{\partial x_j} n_l \quad (2.56)$$

## 2.5. Discretización

Presentaremos en esta sección la discretización del método de Schwarz. Para ilustrar los temas expuestos vamos a considerar un problema en una dimensión, pero fundamentalmente los resultados y algoritmos presentados son los mismos en dos y tres dimensiones, por supuesto la dificultad de implementación informática no es la misma.

Consideremos el problema elemental siguiente:

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), & \text{con } x \in (0, 1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (2.57)$$

y una discretización en  $N$  puntos de paso  $h$ ,  $0 \leq x_i \leq 1$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $h = x_i - x_{i-1}$ ,  $x_1 = 0$ ,  $x_i = x_{i-1} + h$ .

La formulación variacional es la siguiente: encontrar  $u \in H_0^1((0, 1))$  tal que:

$$\int_0^1 \nabla u(x) \nabla v(x) dx = \int_0^1 f(x) v(x) dx \quad (2.58)$$

Su aproximación por un método de elementos finitos  $\mathbb{P}_1$  es: encontrar  $u_h \in V_h$  tal que:

$$\int_0^1 \nabla u_h(x) \nabla v_h(x) dx = \int_0^1 f(x) v_h(x) dx \quad (2.59)$$

donde  $V_h = \{v_h \in C^0(0, 1) | v_h|_{[x_i, x_{i+1}]} \in P_1([x_i, x_{i+1}])\} \cap H_0^1((0, 1))$ .  $V_h$  es un espacio de dimensión finita, generado por la base  $\phi_j$ ,  $j = 1, \dots, N$  donde:

$$\phi_j(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}, & x \in [x_{j-1}, x_j] \\ \frac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j}, & x \in [x_j, x_{j+1}] \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \quad (2.60)$$

Así todo elemento de  $V_h$  se puede expresar como una combinación lineal de la base:

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^N u_j \phi_j(x), \text{ con } u_h(x_j) = u_j \quad (2.61)$$

Ahora notamos  $U_h$  el vector de  $\mathbb{R}^{N-2}$  definido por  $U_h = (u_2, \dots, u_{N-1})$ , los valores de  $u_1 = u_N = 0$  son datos (las condiciones de Dirichlet). El vector  $U_h$  es la solución del sistema lineal:

$$AU_h = f_h \quad (2.62)$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & \\ & & \dots & & \mathbf{A}_{11} & & & & & | & & & & \\ & & & & - & - & - & - & - & | & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & -1 & | & 2 & -1 & 0 & & | & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & -1 & 2 & -1 & & | & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & -1 & 2 & & | & -1 & 0 & 0 & \\ - & - & - & - & | & - & - & - & - & | & - & - & - & - \\ & & \dots & & & & & & & | & \mathbf{A}_{22} & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & \dots & 0 & 0 & | & -1 & 2 & -1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & \dots & 0 & 0 & | & 0 & -1 & 2 & \end{pmatrix}. \quad (2.63)$$

y  $f_h = \{f_2, \dots, f_{N-1}\}^t$  con:

$$f_i = h \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)\phi_i(x)dx \tag{2.64}$$

Consideremos ahora una descomposición de  $\Omega = (0, 1)$  en dos subdominios  $\Omega_1 = (0, x_\gamma)$  y  $\Omega_2 = (x_\beta, 1)$

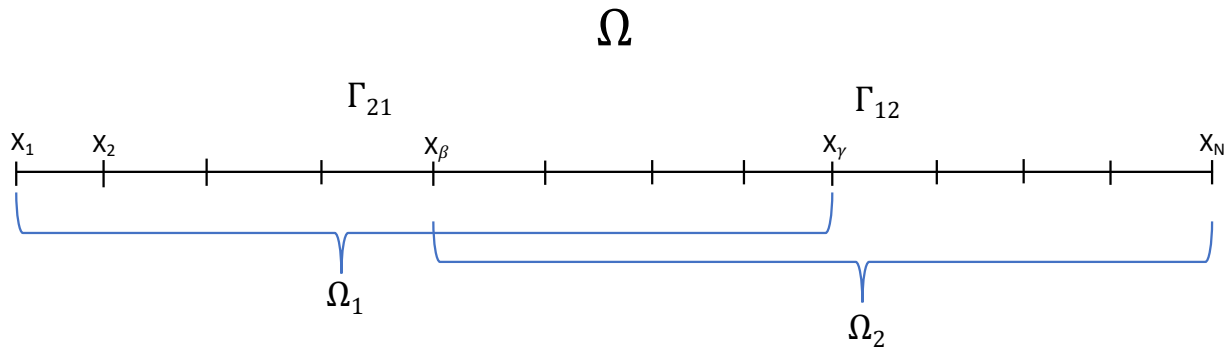


Figura 2.2: descomposición en dos subdominios.

El método multiplicativo de Schwarz se puede entonces formular de la manera siguiente: dado  $u_2^0 = (u_\beta^0, \dots, u_N^0)$  calcularemos la secuencia:

$$A_{11}u_1^{n+1} = f_1 - A_{12}u_2^n \tag{2.65}$$

$$A_{22}u_2^{n+1} = f_2 - A_{21}u_1^{n+1} \tag{2.66}$$

donde  $f_1 = (f(x_1), \dots, f(x_\gamma))$ ,  $f_2 = (f(x_\beta), \dots, f(x_N))$ . La matriz  $A_{12}$  es una matriz llena de ceros salvo para el coeficiente correspondiente al dato  $u_1(x_\gamma) = u_2(x_\gamma)$  y la matriz  $A_{21}$  es una matriz llena de ceros salvo para el coeficiente correspondiente al dato  $u_2(x_\beta) = u_1(x_\beta)$ .

En el caso de una descomposición en  $m$  subdominios:

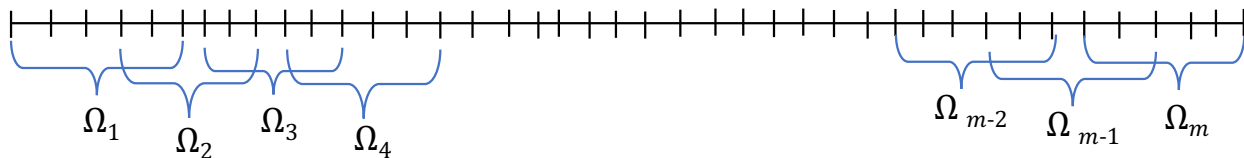


Figura 2.3: descomposición en m subdominios.

Por  $j = 1, \dots, m$  debemos resolver:

$$A_{jj}u_j^{n+1} = f_j - \sum_{k=1}^{j-1} A_{jk}u_k^{n+1} - \sum_{k=j+1}^m A_{jk}u_k^n. \tag{2.67}$$



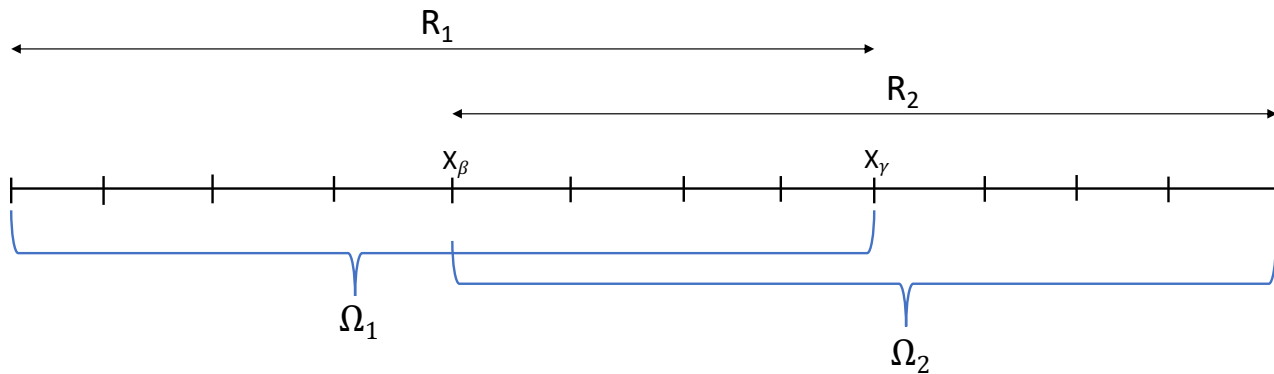


Figura 2.4: descomposición en dos subdominios.

donde  $A_{jk}$  corresponde a la matriz de interfaz en  $\Gamma_{j,k}$ .

Si ahora definimos las matrices de restricción  $R_1 : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{N_1}$ ,  $R_2 : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{N_2}$ :

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.68)$$

y

$$R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.69)$$

Verificamos inmediatamente que:

$$A_{jj} = R_j A R_j^T, j = 1, 2. \quad (2.70)$$

Así para el caso multiplicativo las ecuaciones (2.8) y (2.10) se escriben:

$$u^{n+1/2} = u^n + R_1^T A_1^{-1} R_1 (f - Au^n) \quad (2.71)$$

$$u^{n+1} = u^{n+1/2} + R_2^T A_2^{-1} R_2 (f - Au^n) \quad (2.72)$$

donde  $f - Au^n$  es el residuo a la iteración  $n$ .

Si ahora consideramos las restricciones sin solapamiento: es decir que  $R_1^T R_1 + R_2^T R_2 = I$ , la matriz identidad. Esto corresponde a una partición de la matriz  $A$ , de los vectores  $u$  y  $f$  diferente:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

En (2.71) obtenemos:

$$R_1(f - Au^n) = f_1 - A_{11}u_1^n - A_{12}u_2^n \quad (2.74)$$

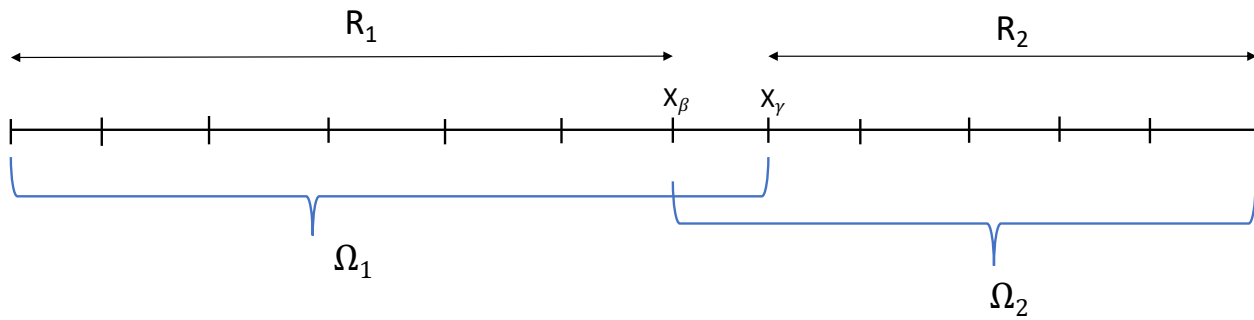


Figura 2.5: descomposición en dos subdominios,  $R_i$  sin solapamiento.

y resolvemos en dominio  $\Omega_1$ , teniendo en cuenta que  $R_1 u^n = u_1^n$ ,

$$A_{11}^{-1} R_1 (f - Au^n) = A_{11}^{-1} (f_1 - A_{12} u_2^n) - u_1^n. \quad (2.75)$$

entonces la primera ecuación de (2.71) se escribe:

$$\begin{bmatrix} u_1^{n+1/2} \\ u_2^{n+1/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} (f_1 - A_{12} u_2^n) - u_1^n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} (f_1 - A_{12} u_2^n) \\ u_2^n \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

Utilizando la segunda ecuación de (2.71) obtenemos:

$$\begin{bmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} (f_1 - A_{12} u_2^n) \\ A_{22}^{-1} (f_2 - A_{21} u_1^{n+1}) \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

que se pueden reescribir:

$$A_{11} u_1^{n+1} = f_1 - A_{12} u_2^n \quad (2.78)$$

$$A_{22} u_2^{n+1} = f_2 - A_{21} u_1^{n+1} \quad (2.79)$$

Obtenemos así las mismas ecuaciones de la discretización del método original de Schwarz.

Por otro lado esto permite de verificar que el algoritmo multiplicativo de Schwarz es el método de Gauss-Siedel:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -A_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad (2.80)$$

que escribimos:

$$MU^{n+1} = NU^n + b \quad (2.81)$$

con:

$$M = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 0 & -A_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad U^n = \begin{bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \end{bmatrix} \quad (2.82)$$

En el caso de una descomposición en multidominios el método multiplicativo puede enunciarse de la manera siguiente:

$$u^{n+i/m} = u^{n+(i-1)/m} + R_i^T A_{ii}^{-1} R_i (f - Au^{n+(i-1)/m}), \quad \text{para } i = 1, \dots, m. \quad (2.83)$$

Volviendo a las ecuaciones (2.71) un cálculo inmediato da:

$$u^{n+1} = u^n + (R_1^T A_{11}^{-1} R_1 + R_2^T A_{22}^{-1} R_2) (f - Au^n). \quad (2.84)$$

Se puede ver esta expresión como un método de Richardson preconditionado para resolver el problema  $Au = f$ .

### 2.5.1. Ejemplo de aplicación del método de Schwarz

En esta sección damos un ejemplo en una dimensión de la aplicación del método de descomposición de dominios aditivo y multiplicativo de Schwarz. La ecuación considerada es la siguiente:

$$-u''(x) + 2u(x) = 2 + 2 * x * (1 - x), \quad \text{con } x \in (0, 1) \quad (2.85)$$

$$u(0) = u(1) = 0. \quad (2.86)$$

La figura (2.6) representa la evolución de las iteraciones del método de Schwarz aditivo cuando consideramos 100 nodos de aproximación de la solución, dos subdominios y un solapamiento de 10 nodos. El resultado es obtenido al cabo de 38 iteraciones con una tolerancia de  $8,31e - 06$ .

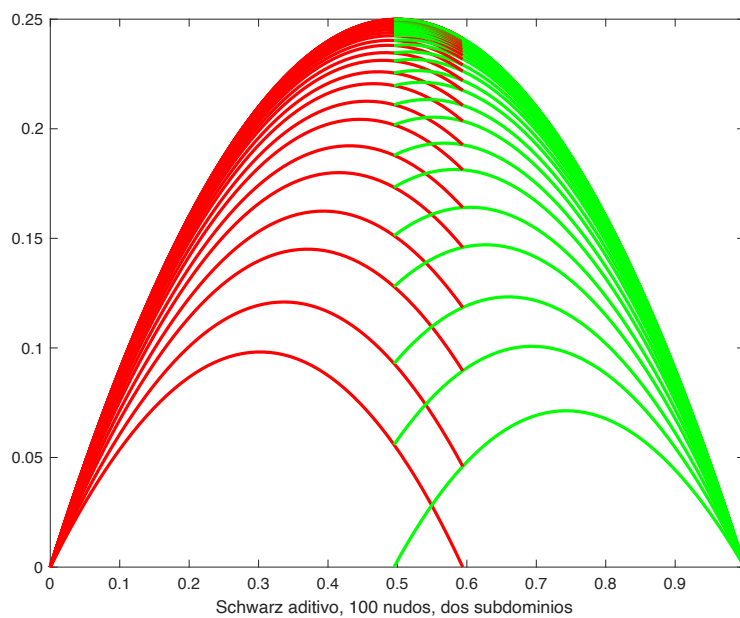


Figura 2.6: Evolución de las iteraciones del algoritmo Schwarz aditivo, solapamiento 10 nodos.

La figura (2.7) representa la evolución de las iteraciones del método de Schwarz aditivo cuando consideramos los mismos parámetros que en el ejemplo precedente pero con un solapamiento de 20 nodos de interpolación. El resultado es obtenido al cabo de 21 iteraciones con una tolerancia de  $7,41e - 06$ .

Verificamos inmediatamente que la velocidad de convergencia depende directamente de la superficie del solapamiento.

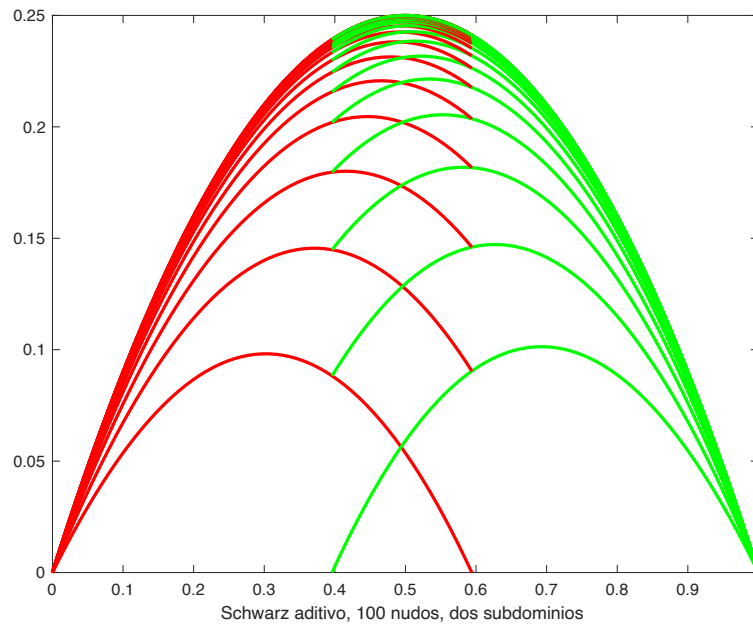


Figura 2.7: Evolución de las iteraciones del algoritmo Schwarz aditivo, solapamiento 20 nodos.

La figura (2.8) representa la evolución de las iteraciones del método de Schwarz multiplicativo cuando consideramos 100 nodos de aproximación de la solución, dos subdominios y un solapamiento de 10 nodos. El resultado es obtenido al cabo de 21 iteraciones con una tolerancia de  $7,45e - 06$ .

La figura (2.9) representa la evolución de las iteraciones del método de Schwarz multiplicativo cuando consideramos los mismos parámetros que el test precedente pero con un solapamiento de 20 nodos de interpolación. El resultado es obtenido al cabo de 12 iteraciones con un test de  $4,97e - 06$ .

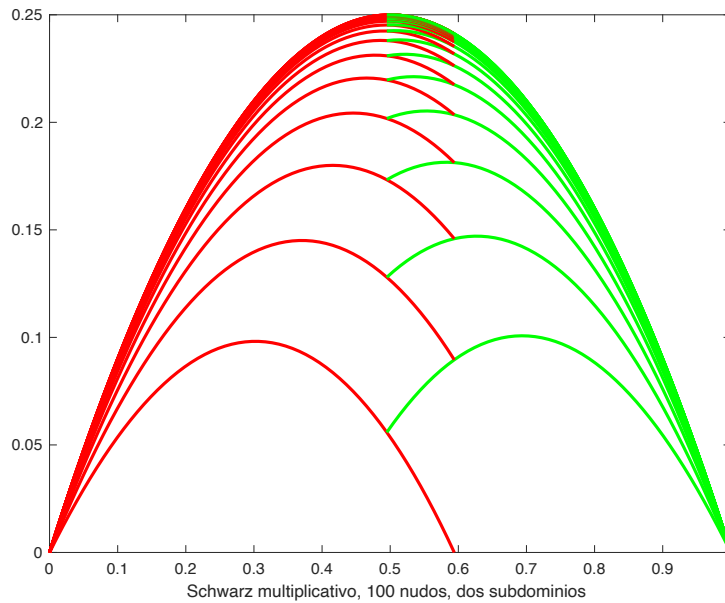


Figura 2.8: Evolución de las iteraciones del algoritmo de Schwarz multiplicativo, solapamiento 10 nodos.

### 2.5.2. Método de Schwarz discretización, Gauss Seidel

Es un método de punto fijo para resolver:

$$AU = F \text{ con } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

Definimos una descomposición  $A = M - N$  y:

$$MU^{n+1} = NU^n + F$$

Podemos elegir las matrices  $M$  y  $N$ ;

$$M = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ y } N = \begin{bmatrix} 0 & -A_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Obtenemos el método de Gauss Seidel por bloques.

Que se puede escribir:

$$\begin{aligned} U_1^{n+1} &= U_1^n + A_{11}^{-1}(F_1 - A_{11}U_1^n - A_{12}U_2^n) \\ U_2^{n+1} &= U_2^{n+1/2} + A_{22}^{-1}(F_2 - A_{22}U_1^{n+1} - A_{22}U_2^n) \end{aligned}$$

es decir:

$$\begin{aligned} U^{n+1/2} &= U^n + R_1^t A_{11}^{-1} R_1 (F - AU^n) \\ U^{n+1} &= U^{n+1/2} + R_2^t A_{22}^{-1} R_2 (F - AU^{n+1/2}) \end{aligned}$$

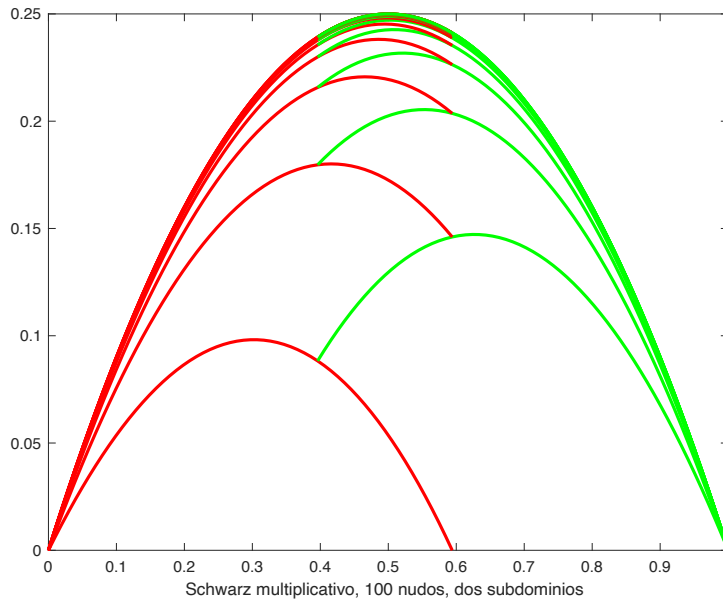


Figura 2.9: Evolución de las iteraciones del algoritmo de Schwarz multiplicativo, solapamiento 20 nodos.

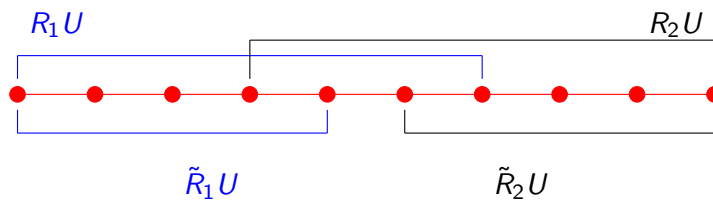


Figura 2.10: Operadores de restricción

### 2.5.3. Método de Schwarz discretización, RAS.

RAS = Restricted Additive Schwarz

Schwarz aditivo

$$U^{n+1} = U^n + (R_1^t A_{11}^{-1} R_1 + R_2^t A_{22}^{-1} R_2)(F - AU^n)$$

Restricted Additive Schwarz(RAS)

$$U^{n+1} = U^n + (\tilde{R}_1^t A_{11}^{-1} R_1 + \tilde{R}_2^t A_{22}^{-1} R_2)(F - AU^n)$$

### 2.5.4. Algoritmo multicolor

Consideremos una descomposición de un dominio  $\Omega$  en  $m$  subdominios con solapamiento,  $\Omega_1, \dots, \Omega_m$ . Consideremos ahora una partición del conjunto de índices  $\{1, \dots, m\}$ ,  $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_s$  tal que:

$$i, j \in \mathcal{C}_k, \text{ con } i \neq j \rightarrow \Omega_i \cap \Omega_j = \phi \tag{2.87}$$

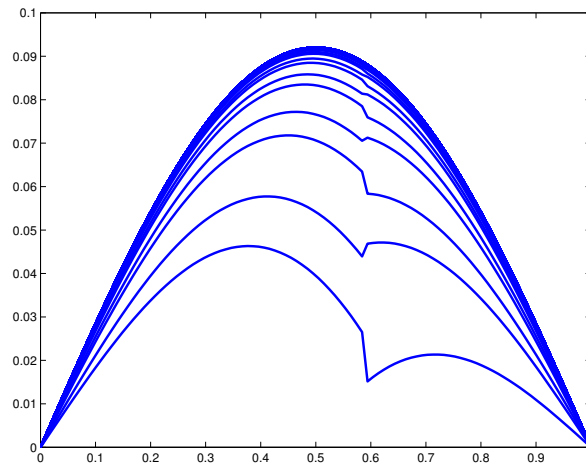


Figura 2.11: Método RAS

llamamos los conjuntos  $\mathcal{C}_k$  los colores.

**Algoritmo 2.5.1.** (*Algoritmo multicolor de Schwarz*)

*Dato inicial  $w$*

- 1) *Para  $k = 0, \dots$ , hasta la convergencia*
- 2) *Para  $l = 1, \dots, s$*
- 3) *Resolver para cada  $i \in \mathcal{C}_l$*

$$\begin{cases} -\Delta u^{k+i/m} = f \text{ en } \Omega_i \\ u^{k+i/m} = w \text{ en } \partial\Omega_i \cap \Omega \\ u^{k+i/m} = 0, \text{ en } \partial\Omega_i \cap \partial\Omega \end{cases} \quad (2.88)$$

*$w = u^{k+i/m}$   
 fin loop en  $i$   
 fin loop en  $l$   
 $u^{k+1} = w$   
 fin loop en  $k$*

La idea es de elegir la menor cantidad de colores posible.

### 2.5.5. Método de Richardson.

¿Que es el método de Richardson para resolver  $Au = f$ ?

Consiste en obtener la solución  $u$  como el límite de un proceso iterativo, donde a cada iteración se calcula:

$$u^{n+1} = u^n + \alpha(f - Au^n) \quad (2.89)$$

Si estudiamos la convergencia vemos que  $e^{k+1} = u^{k+1} - u$  verifica que:

$$e^{n+1} = (I - \alpha A)e^n = (I - \alpha A)^n(u^1 - u). \quad (2.90)$$

la convergencia se obtiene si y solamente si  $\rho(I - \alpha A) < 1$ .

## 2.6. Convergencia en una dimensión

Par ilustrar las demostraciones de convergencia consideramos primero un problema a una dimensión, es decir  $\Omega = ]0, 1[$ :

$$\begin{cases} -v''(x) = f(x) & \text{si } x \in ]0, 1[ \\ v(0) = v(1) = 0 \end{cases} \quad (2.91)$$

Se supone aquí que la función  $f$  es suficientemente regular para que la solución pertenezca a  $\mathcal{C}^2(\Omega)$ .

Definimos  $\Omega_1 = ]0, \alpha[$  y  $\Omega_2 = ]\beta, 1[$  con  $\beta < \alpha$ . Evidentemente  $]0, 1[ = ]0, \alpha[ \cup ]\beta, 1[$ . La intersección  $\Omega_1 \cap \Omega_2 = ]\beta, \alpha[$ .

Sea  $v_1$  la función definida sobre  $]0, \alpha[$  y  $v_2$  la función definida sobre  $]\beta, 1[$  tal que:

$$\begin{cases} -v_1''(x) = f(x) & \text{si } x \in ]0, \alpha[ \\ v_1(0) = 0; v_1(\alpha) = v_2(\alpha) \end{cases} \quad (2.92)$$

y

$$\begin{cases} -v_2''(x) = f(x) & \text{si } x \in ]\beta, 1[ \\ v_2(\beta) = v_1(\beta); v_2(1) = 0 \end{cases} \quad (2.93)$$

Si definimos :

$$v(x) = \begin{cases} v_1(x) & \text{si } x \in ]0, \alpha[ \\ v_2(x) & \text{si } x \in ]\beta, 1[ \end{cases} \quad (2.94)$$

entonces  $v_1(x) = v_2(x)$  en  $]\beta, \alpha[$  y  $v$  es la solución de (2.91).

**Proposición 2.6.1.** *Sea  $v^0$  una función tal que  $v^0(0) = v^0(1) = 0$ . Sean  $\{v_1^k\}_{k \geq 0}$  y  $\{v_2^k\}_{k \geq 0}$  dos secuencias que verifican:*

*Para  $k = 0, \dots$  convergencia*

$$\begin{cases} -(v_1^{k+1})''(x) = f(x) & \text{si } x \in ]0, \alpha[ \\ v_1^{k+1}(0) = 0; v_1^{k+1}(\alpha) = v_2^k(\alpha) \end{cases} \quad (2.95)$$

$$\begin{cases} -(v_2^{k+1})''(x) = f(x) & \text{si } x \in ]\beta, 1[ \\ v_2^{k+1}(\beta) = v_1^k(\beta); v_2^{k+1}(1) = 0 \end{cases} \quad (2.96)$$

*Entonces si  $\beta < \alpha$ ,  $\{v_1^k\} \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} v_1$  y  $\{v_2^k\} \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} v_2$  cuando  $k \rightarrow \infty$ .*

**Demostración 2.6.1.** *Definimos las funciones error siguientes:*

$$\begin{aligned} d^k(x) &= v_1^k(x) - v_1(x) & \text{si } x \in ]0, \alpha[ \\ e^k(x) &= v_2^k(x) - v_2(x) & \text{si } x \in ]\beta, 1[ \end{aligned} \quad (2.97)$$

*que verifican las ecuaciones:*

$$\begin{cases} -(d^{k+1})''(x) = 0 & \text{si } x \in ]0, \alpha[ \\ d^{k+1}(0) = 0; d^{k+1}(\alpha) = v_1^{k+1}(\alpha) - v_1(\alpha) = v_2^k(\alpha) - v_2(\alpha) = e^k(\alpha) \end{cases} \quad (2.98)$$

$$\begin{cases} -(e^{k+1})''(x) = 0 & \text{si } x \in ]\beta, 1[ \\ e^{k+1}(\beta) = v_2^{k+1}(\beta) - v_2(\beta) = v_1^k(\beta) - v_1(\beta) = d^k(\beta); e^{k+1}(1) = 0 \end{cases} \quad (2.99)$$

*Sea  $\Phi$  la solución de*

$$\begin{cases} -\Phi''(x) = 0 & \text{si } x \in ]0, \alpha[ \\ \Phi(0) = 0; \Phi(\alpha) = |e^k(\alpha)| \end{cases} \quad (2.100)$$

*entonces  $\Phi(x) = |e^k(\alpha)| \frac{x}{\alpha}$  si  $x \in ]0, \alpha[$  y  $\Phi(x) \geq 0$ ,  $\in [0, \alpha]$ .*



Para comparar definimos la función  $z(x) = \Phi(x) - d^{k+1}(x)$  en  $[0, \alpha]$ , esta función verifica:

$$\begin{cases} -z''(x) &= -\Phi''(x) + (d^{k+1})''(x) = 0 & \text{si } x \in ]0, \alpha[ \\ z(0) &= \Phi(0) - d^{k+1}(0) = 0 \\ z(\alpha) &= \Phi(\alpha) - d^{k+1}(\alpha) = |e^k(\alpha)| - e^k(\alpha) \geq 0 \end{cases} \quad (2.101)$$

entonces por el principio del máximo tenemos que  $z(x) \geq 0$  en  $]0, \alpha[$  y por consecuencia  $\Phi(x) \geq d^{k+1}(x)$  en  $]0, \alpha[$ .

Siguiendo con las comparaciones definimos ahora  $z(x) = \Phi(x) + d^{k+1}(x)$  en  $[0, \alpha]$

$$\begin{cases} -z''(x) &= -\Phi''(x) + (d^{k+1})''(x) = 0 & \text{si } x \in ]0, \alpha[ \\ z(0) &= \Phi(0) + d^{k+1}(0) = 0 \\ z(\alpha) &= \Phi(\alpha) + d^{k+1}(\alpha) = |e^k(\alpha)| + e^k(\alpha) \geq 0 \end{cases} \quad (2.102)$$

entonces por el principio del máximo tenemos que  $z(x) \geq 0$  en  $]0, \alpha[$  y por consecuencia  $d^{k+1}(x) \geq -\Phi(x)$  en  $]0, \alpha[$ . Entonces tenemos que:

$$-\Phi(x) \leq d^{k+1}(x) \leq \Phi(x) \quad \text{si } x \in ]0, \alpha[ \quad (2.103)$$

eso implica que  $|d^{k+1}(x)| \leq \Phi(x)$  si  $x \in ]0, \alpha[$ , más aún:

$$\|d^{k+1}\|_{\infty, [0, \alpha]} \leq \|\Phi\|_{\infty, [0, \alpha]} \leq |e^k(\alpha)| \leq \|e^k\|_{\infty, [\beta, 1]} \quad (2.104)$$

Si ahora consideramos  $\Phi(x)$  en  $[\beta, 1]$  tal que:

$$\begin{cases} -(\Phi''(x)) &= 0 & \text{si } x \in ]\beta, 1[ \\ \Phi(\beta) &= |d^{k-1}(\beta)|; \quad \Phi(1) = 0 \end{cases} \quad (2.105)$$

entonces  $\Phi(x) = |d^{k-1}(\beta)| \frac{(x-1)}{(\beta-1)} \geq 0$ .

Sea ahora  $z(x) = \Phi(x) + e^k(x)$  en  $[\beta, 1]$ ,  $z(x)$  verifica:

$$\begin{cases} -z''(x) &= -\Phi''(x) - (e^k)''(x) = 0 & \text{si } x \in ]\beta, 1[ \\ z(1) &= \Phi(1) + e^k(1) = 0 \\ z(\beta) &= |d^{k-1}(\beta)| + e^k(\beta) = |e^k(\beta)| + e^k(\beta) \geq 0 \end{cases} \quad (2.106)$$

entonces  $z(x) \geq 0$  en  $[\beta, 1]$  (Principio del Máximo) y por consecuencia:

$$\Phi(x) + e^k(x) \geq 0 \quad \text{y} \quad e^k(x) \geq -\Phi(x) \quad \text{en } [\beta, 1] \quad (2.107)$$

Sea  $z(x) = \Phi(x) - e^k(x)$  en  $[\beta, 1]$ ,  $z(x)$  verifica:

$$\begin{cases} -z''(x) &= -\Phi''(x) + (e^k)''(x) = 0 & \text{si } x \in ]\beta, 1[ \\ z(1) &= \Phi(1) - e^k(1) = 0 \\ z(\beta) &= |d^{k-1}(\beta)| - e^k(\beta) = |e^k(\beta)| - e^k(\beta) \geq 0 \end{cases} \quad (2.108)$$

entonces  $z(x) \geq 0$  en  $[\beta, 1]$  (Principio del Máximo) y por consecuencia:

$$\Phi(x) - e^k(x) \geq 0 \quad \text{y} \quad \Phi(x) \geq e^k(x) \quad \text{en } [\beta, 1] \quad (2.109)$$

entonces :

$$\|d^{k+1}\|_{\infty, [0, \alpha]} \leq |e^k(\alpha)| \leq \Phi(\alpha) = |d^{k-1}(\beta)| \frac{(\alpha-1)}{(\beta-1)} \quad (2.110)$$

$$\leq \gamma_1 \|d^{k-1}\|_{\infty, [0, \alpha]} \quad (2.111)$$

con

$$\gamma_1 \leq \frac{(\alpha - 1)}{(\beta - 1)} < 1 \tag{2.112}$$

entonces:

$$\|d^{k+1}\|_{\infty,[0,\alpha]} \leq \gamma_1 \|d^{k-1}\|_{\infty,[0,\alpha]} \text{ con } \gamma_1 \leq 1 \tag{2.113}$$

y en consecuencia  $\|d^k\|_{\infty,[0,\alpha]} \rightarrow 0$  cuando  $k \rightarrow \infty$ .

Utilizando la misma técnica podemos demostrar que  $\|e^{k+1}\|_{\infty,[\beta,1]} \leq \gamma_2 \|e^{k-1}\|_{\infty,[\beta,1]}$  con  $\gamma_2 \leq \frac{\beta}{\alpha} < 1$  y entonces  $\|e^k\|_{\infty,[\beta,1]} \rightarrow 0$  cuando  $k \rightarrow \infty$ .

Tenemos como consecuencia que:

$$\|d^k\|_{\infty,[0,\alpha]} \leq \gamma_1^{\frac{k}{2}} \|d^0\|_{\infty,[0,\alpha]} \tag{2.114}$$

$$\|e^k\|_{\infty,[\beta,1]} \leq \gamma_2^{\frac{k}{2}} \|e^0\|_{\infty,[\beta,1]} \tag{2.115}$$

donde  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  dependen directamente del solapamiento, es decir de  $\alpha - \beta$  y  $\frac{\beta}{\alpha}$ , cuanto más grande es el solapamiento más rápida es la convergencia, pero menos interesante es el método.

Esta constatación es ilustrada en el pequeño ejemplo siguiente:

$$\begin{cases} -v''(x) = 0 & \text{si } x \in ]0, 1[ \\ v(0) = v(1) = 0 \end{cases} \tag{2.116}$$

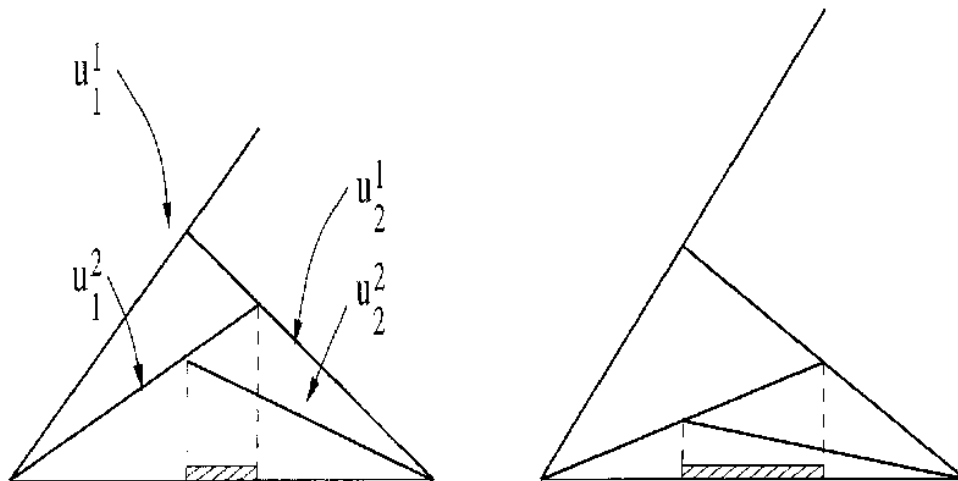


Figura 2.12: Evolución de las iteración.

La solución es  $v(x) = 0$ , en la imagen (2.12) observamos que justamente la convergencia a la solución se obtiene con un número menor de iteraciones cuando el solapamiento es de mayor superficie.

Dado un dominio  $\Omega$  vamos a considerar una descomposición geométrica con solapamiento  $\{\Omega_i\}_{i=1,m}$  tal que  $\Omega = \cup_{i=1}^m \Omega_i$ .

**Ejemplo numérico**

Consideramos ahora un nuevo ejemplo donde la función fuente  $f$  es la adición de funciones de Dirac.

$$\begin{cases} \alpha u(\bar{x}) - \Delta u(\bar{x}) + \|\nabla u(\bar{x})\|_0^3 = \mu(\bar{x}) |u(\bar{x})|^2 + \sum_{j=1}^3 K_j \delta_{\bar{x}_j} & \forall \bar{x} \in \Omega \\ u(\bar{x}) = 0 & \forall \bar{x} \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.117)$$

donde  $\bar{x} = (x, y)$ ,  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ ,  $\mu(\bar{x}) = 6$ ,  $\alpha = 1$ ,  $K_1 = 5 = K_2$ ,  $K_3 = 10$ ,  $\bar{x}_1 = (0,1,0,2)$ ,  $\bar{x}_2 = (0,5,0,6)$  y  $\bar{x}_3 = (0,9,0,9)$ .

En la Figura 2.13, hemos representado la super-solución calculada después de cinco iteraciones de

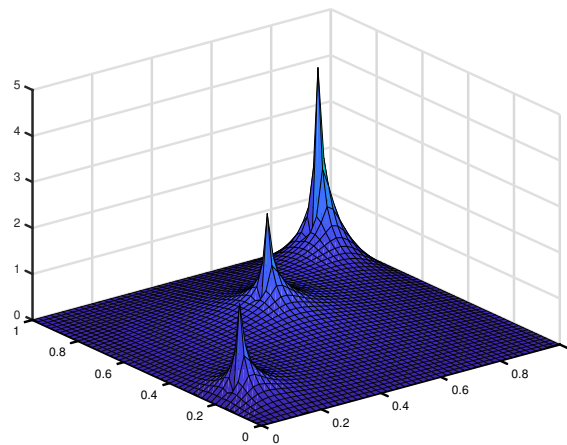


Figura 2.13: Aproximación de la solución (2.117)

Newton cuando la  $L^2$ -norma de la actualización es de orden  $10^{-4}$ .

El tamaño del paso espacial es  $dx = dy = 0,02$  y el número de subdominios va de 9 a 16. En la segunda iteración del método de Newton tenemos 9 subdominios y a partir de la tercera iteración el número de subdominios necesarios es de 16. La figura 2.14 nos da la última configuración de los subdominios.

Iteración de Newton	1	2	3	4
Norma del update de Newton	4,21	0,17	0,026	$6,4 \cdot 10^{-4}$
# Iteración Schwarz	-	20	14	6
Norma del update de Schwarz	-	$8,6 \cdot 10^{-4}$	$9,1 \cdot 10^{-4}$	$8,8 \cdot 10^{-4}$
#subdominios	1	9	16	16

Cuadro 2.1: Comportamiento del algoritmo

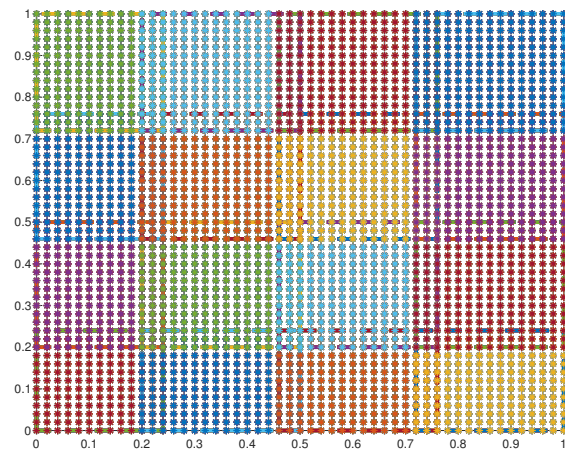


Figura 2.14: Descomposición en subdominios

# Capítulo 3

## Métodos de Subestructuración

### 3.1. Método del complemento de Schur

El método de descomposición de dominios del complemento de Schur es la versión discreta del operador de Steklov-Poincaré.

Consideremos una descomposición del dominio  $\Omega$  en dos subdominios  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  tales que  $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \varphi$  y  $\bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2 = \bar{\Omega}$ . Definimos  $\Gamma = \partial\bar{\Omega}_1 \cup \partial\bar{\Omega}_2$  la interfaz entre los dos subdominios.

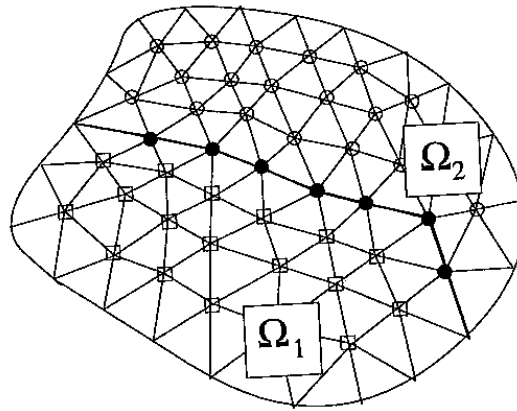


Figura 3.1: descomposición en dos subdominios sin solapado.

Supongamos que la numeración de los nodos de interpolación de la solución numérica de una ecuación de derivadas parciales elíptica por un método de elementos finitos o diferencias finitas puedan ordenarse de manera a agrupar el vector de incógnitas  $u$  en tres vectores de numeración contigua,  $u_1$  con las incógnitas en nodos interiores a  $\Omega_1$ ,  $u_2$  con las incógnitas en nodos interiores a  $\Omega_2$ , y para terminar  $u_\Gamma$  correspondiente a las incógnitas situadas en  $\Gamma \setminus \partial\Omega$ . Las dimensiones de estos vectores son respectivamente  $N_1$ ,  $N_2$  y  $N_\Gamma$ . Así  $N_h$  la dimensión del vector de incógnitas  $u$  es igual a  $N_1 + N_2 + N_\Gamma$ .

La matriz de rigidez  $A$  de dimensiones  $N_h \times N_h$  podrá así representarse por bloques, de la manera siguiente:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & 0 & A_{1\Gamma} \\ 0 & A_{22} & A_{2\Gamma} \\ A_{\Gamma 1} & A_{\Gamma 2} & A_{\Gamma\Gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_\Gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_\Gamma \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Los coeficientes de los diferentes bloques son los siguientes:

$$(A_{ii})_{lj} = a_i(\phi_j^{(i)}, \phi_l^{(i)}), l, j = 1, \dots, N_i \quad (3.2)$$

donde  $a_i(.,.)$  es la forma bilineal asociada al operador de derivadas parciales definidas sobre  $\Omega_i$ , considerando únicamente los elementos de la base correspondiente a nodos en el interior del dominio  $\Omega_i$ .

Sobre la interfaz consideramos los elementos de la base de interpolación correspondientes a los nodos situados en la interfaz,  $\phi_r^\Gamma$ ,  $r = 1, \dots, N_\Gamma$ .

$$(A_{\Gamma\Gamma})_{rs} = a_1(\phi_r^\Gamma, \phi_s^\Gamma) + a_2(\phi_r^\Gamma, \phi_s^\Gamma), \quad s, r = 1, \dots, N_\Gamma. \quad (3.3)$$

El aporte del producto entre los elementos de la base correspondientes a los nodos al interior de los dominios  $\Omega_i$  y los elementos de la base correspondiente a los nodos situados en la interfaz se encuentra en los coeficientes de la submatrices  $A_{i\Gamma}$ .

$$(A_{i\Gamma})_{lr} = a_i(\phi_r^\Gamma, \phi_l^{(i)}), \quad l = 1, \dots, N_i, \quad r = 1, \dots, N_\Gamma. \quad (3.4)$$

Una sustitución de Gauss por bloques nos da:

$$u_1 = A_{11}^{-1}(f_1 - A_{1\Gamma}u_\Gamma), \quad \text{y} \quad u_2 = A_{22}^{-1}(f_2 - A_{2\Gamma}u_\Gamma). \quad (3.5)$$

reemplazando en la última ecuación obtenemos:

$$(A_{\Gamma\Gamma} - A_{\Gamma 1}A_{11}^{-1}A_{1\Gamma} - A_{\Gamma 2}A_{22}^{-1}A_{2\Gamma})u_\Gamma = f_\Gamma + A_{\Gamma 1}A_{11}^{-1}f_1 + A_{\Gamma 2}A_{22}^{-1}f_2. \quad (3.6)$$

Podemos ahora notar  $\Sigma_h = (A_{\Gamma\Gamma} - A_{\Gamma 1}A_{11}^{-1}A_{1\Gamma} - A_{\Gamma 2}A_{22}^{-1}A_{2\Gamma})$  la matriz complemento de Schur y  $\chi_\Gamma = f_\Gamma + A_{\Gamma 1}A_{11}^{-1}f_1 + A_{\Gamma 2}A_{22}^{-1}f_2$ .

Obtenemos así el sistema lineal complemento de Schur siguiente:

$$\Sigma_h u_\Gamma = \chi_\Gamma \quad (3.7)$$

que es la versión algebraica del sistema de Stelov-Poincaré (1.36).

Si descomponemos  $A_{\Gamma\Gamma} = A_{\Gamma\Gamma}^{(1)} + A_{\Gamma\Gamma}^{(2)}$ , reflejo de la descomposición (3.3), podemos decir que:

$$\Sigma_h = \Sigma_{1,h} + \Sigma_{2,h}. \quad (3.8)$$

donde:

$$\Sigma_{i,h} = A_{\Gamma\Gamma}^{(i)} - A_{\Gamma i}A_{ii}^{-1}A_{i\Gamma}, \quad i = 1, 2. \quad (3.9)$$

Estas matrices son densas, simétricas y definidas positivas (versión discreta de la elasticidad). Cuando el número de incógnitas es pequeño y podemos calcular el complemento de Schur el método es llamado de condensación estática. Sino, en general, para resolver el sistema lineal se utiliza el método del Gradiente Conjugado.

Si se nota  $r^k = \chi_\Gamma - \Sigma_h u_\Gamma^k$  el residuo a la iteración  $k$ .

- Etapa 0 :  $u^0 \in \mathbb{R}^n$  et  $tol > 0$ ;  $k = 1$ ;  $p^0 = r^0$
- Etapa k : verificación de la condición de corte. Si  $\|r^k\| \leq tol$  STOP
- Si no
  - Calcular :
 
$$\rho^k = -\frac{\|r^k\|^2}{(\Sigma_h p^k, p^k)}$$
  - $$u^{k+1} = u^k + \rho^k p^k$$
  - $$r^{k+1} = r^k - \rho^k \Sigma_h p^k$$
  - $$\beta^{k+1} = \frac{\|r^{k+1}\|^2}{\|r^k\|^2}$$
  - $$p^{k+1} = r^{k+1} + \beta^{k+1} p^k$$
  - $k = k + 1$

Dos dificultades aparecen en este algoritmo, la primera de orden operativo, el cálculo de  $\Sigma_h p^k$ , y la segunda la convergencia.

Para calcular  $\Sigma_h v$ ,  $v$  un vector de dimensión  $N_\Gamma$  efectuamos:

$$\Sigma_{1,h} v = (A_{\Gamma\Gamma}^{(1)} - A_{\Gamma 1} A_{11}^{-1} A_{1\Gamma}) v \quad (3.10)$$

$$\Sigma_{2,h} v = (A_{\Gamma\Gamma}^{(2)} - A_{\Gamma 2} A_{22}^{-1} A_{2\Gamma}) v \quad (3.11)$$

La evaluación de  $w = A_{ii}^{-1} A_{i\Gamma} v$ ,  $i = 1, 2$  se hace de la manera siguiente, se calcula la solución del sistema lineal:

$$A_{ii} w = A_{i\Gamma} v \quad (3.12)$$

Esto equivale a resolver el problema discreto sobre cada sub dominio, y se puede hacer en paralelo.

El segundo problema, la convergencia del algoritmo del Gradiente Conjugado depende del condicionamiento de la matriz  $\Sigma_h$  que se nota  $cond_2(\Sigma_h)$ . Una estimación del número  $cond_2(\Sigma_h)$  (ver Quarteroni) nos dice que:

$$cond_2(\Sigma_h) \leq C_0 h^{-1} \quad (3.13)$$

donde  $h$  es el paso de discretización y la constante  $C_0$  es independiente de  $h$ .

Una primera posibilidad de preconditionamiento, para que el condicionamiento sea independiente de  $h$  es considerar el sistema:

$$\Sigma_{i,h}^{-1} \Sigma_h u_\Gamma = \Sigma_{i,h}^{-1} \chi_\Gamma, \quad i = 1, 2 \quad (3.14)$$

El nuevo sistema, preconditionado por  $\Sigma_{1,h}^{-1}$  o  $\Sigma_{2,h}^{-1}$  tiene un número de condicionamiento independiente de  $h$ .

$$cond_2(\Sigma_{i,h}^{-1} \Sigma_h) \leq C_i, \quad i = 1, 2. \quad (3.15)$$

Con  $C_i$  independiente de  $h$ .

### 3.1.1. Caso multidominios

Consideramos el caso donde la descomposición de la geometría  $\Omega$  es en  $m$  subdominios  $\Omega_i$  sin solapamiento, es decir que  $\Omega_i \cap \Omega_j = \Phi$  si  $i \neq j$ .

Notamos  $H_i$  el diámetro de cada sub-dominio  $\Omega_i$ .

Las interfaces de descomposición del dominio  $\Omega$  la notaremos  $\Gamma$  y es igual a  $\Gamma = \{\cup_{i=1}^m \partial\Omega_i\} \cap \Omega$ . Notaremos también  $\Gamma_i = \partial\Omega_i \setminus \partial\Omega$  y entonces  $\Gamma = \cup_{i=1}^m \Gamma_i$ . Así  $\Omega = \{\cup_{i=1}^m \Omega_i\} \cup \Gamma$ . Notaremos también  $I_i$  el conjunto de índices de los nodos de interpolación situados al interior del dominio  $\Omega_i$ , y  $I = \cup_{i=1}^m I_i$  el conjunto de índices de los nodos al interior de  $\cup_{i=1}^m \Omega_i$ . Sea  $N_i = \#(I_i)$ .  $\Gamma$  será también el conjunto de índices de los nodos situados en las interfaces,  $\Gamma_i$  será también el conjunto de nodos en  $\Gamma_i$ , sea  $J_i = \#(\Gamma_i)$

Haciendo una permutación de índices adaptada podremos particionar el vector de incógnitas  $u = [u_I, u_\Gamma]$  y el vector del segundo miembro en  $[f_I, f_\Gamma]$ . Así la ecuación:

$$Au = f \quad (3.16)$$

donde  $A$  es la matriz de rigidez, se puede reescribir por bloques:

$$\begin{bmatrix} A_{II} & A_{I\Gamma} \\ A_{\Gamma I} & A_{\Gamma\Gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_I \\ u_\Gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_I \\ f_\Gamma \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

donde la matriz  $A_{II}$  es una matriz por bloques:

$$A_{II} = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & A_{mm} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

donde  $A_{ii}$  es la submatriz de la matriz de rigidez local asociada a un problema sea de Dirichlet o Neumann en  $\Omega_i$ .

La matriz de rigidez asociada a un problema local es dada por:

$$A_i = \begin{bmatrix} A_{ii} & A_{i\Gamma} \\ A_{\Gamma i} & A_{\Gamma\Gamma}^{(i)} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Los coeficientes de los bloques de la matriz  $A_i$  estan dados por;

$$(A_{ii})_{l,j} = a_i(\phi_j, \phi_l), \quad 1 \leq j, l \leq N_i \quad (3.20)$$

$$(A_{i\Gamma})_{l,r} = A_i(\psi_r, \phi_l), \quad 1 \leq r \leq J_i, \quad 1 \leq l \leq N_i \quad (3.21)$$

$$(A_{\Gamma\Gamma}^{(i)})_{s,r} = a_i(\psi_r, \psi_s), \quad 1 \leq r, s \leq J_i \quad (3.22)$$

donde  $\phi_j, j = 1, \dots, N_i$  son los elementos de la base de elementos finitos correspondientes a los nodos en el interior de  $\Omega_i$  y  $\psi_r, r = 1, \dots, J_i$  son los elementos de la base correspondientes a los nodos en la interfaz  $\Gamma_i$ .

Un proceso de sustitución de tipo Gauss por bloques similar al caso de una descomposición en dos subdominios nos permite de calcular la matriz complemento de Schur en el caso multidominios.

$$\Sigma_h = \sum_{i=1}^m R_{i,\Gamma}^t A_{\Gamma\Gamma}^{(i)} - A_{i\Gamma}^t A_{ii}^{-1} A_{i\Gamma} R_{i,\Gamma} \quad (3.23)$$

$$F_\Gamma = \chi_\Gamma = \sum_{i=1}^m R_{i,\Gamma}^t f_{i,\Gamma} - A_{i\Gamma}^t A_{ii}^{-1} f_i \quad (3.24)$$



y el sistema lineal asociado es:

$$\Sigma_h u_\gamma = \chi_\Gamma \quad (3.25)$$

Cabe agregar que el número de condicionamiento de  $\Sigma_h$  depende ahora del paso de discretización y del diámetro de los subdominios.

$$\text{cond}_2(\Sigma_h) \leq C \frac{H}{hH_{min}^2}. \quad (3.26)$$

donde  $H$  es el diámetro maximal de los subdominios y  $H_{min}$  el diámetro más pequeño de los subdominios. En el caso donde la descomposición en subdominios es cuasi uniforme, es decir que  $H_{min} \geq \tau H$  para un  $\tau$  fijo, entonces es claro que el número de condicionamiento es de la forma:

$$\text{cond}_2(\Sigma_h) = O(h^{-1}H^{-1}) \quad (3.27)$$

En esta etapa el desarrollo siguiente es concebir un preconditionador eficaz para el sistema lineal (3.25).

Un algoritmo directo para el caso multidominios es el siguiente:

**Algoritmo 3.1.1.** (*Algoritmo de Schur multidominios*)

1) para  $i = 1, \dots, m$  (*Número de subdominios*)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ensamblar las matrices } A_{ii}, A_{i\Gamma}, A_{\Gamma\Gamma}^{(i)}, f_i, f_{i\Gamma}, \\ \text{Calcular los factores de Cholesky: } A_{ii} = L_i L_i^t \\ \text{Ensamblar las matrices } \Sigma_i = A_{\Gamma\Gamma}^{(i)} - A_{i\Gamma}^t L_i^t L_i^{-1} A_{i\Gamma} \\ \text{Ensamblar } F_{i\Gamma} = f_{i,\Gamma} - A_{i\Gamma}^t L_i^t L_i^{-1} f_i. \end{array} \right. \quad (3.28)$$

*Fin de la iteración sobre los subdominios.*

2) *Ensamblar:*

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma_h = \sum_{i=1}^m R_{i,\Gamma}^t \Sigma_i R_{i,\Gamma} \\ F_\Gamma = \sum_{i=1}^m R_{i,\Gamma}^t F_{i\Gamma} \end{array} \right. \quad (3.29)$$

3) *Factorización de Cholesky de  $\Sigma_h$ :  $\Sigma_h = L_\Sigma L_\Sigma^t$  y resolver:*

$$\left\{ \begin{array}{l} L_\Sigma w_\Gamma = F_\Gamma \\ L_\Sigma^t u_\Gamma = w_\Gamma \end{array} \right. \quad (3.30)$$

4) *Para  $i = 1, \dots, m$  resolver (eventualmente en paralelo):  $A_{ii} u_i = (f_i - A_{i\Gamma} R_{i,\Gamma} u_\Gamma)$*

*Fin de la iteración sobre los subdominios.*

Obtenemos  $u = (u_1^t, \dots, u_m^t, u_\Gamma^t)$  la solución numérica de nuestro problema.

**Observación 1.**  $R_{i,\Gamma}$  es un operador de restricción similar al empleado en el capítulo precedente.

## 3.2. Métodos de subestructuración en formulación continua

### 3.2.1. Método Dirichlet-Neumann

El objetivo de este tipo de métodos es de calcular de manera iterativa una solución del problema multidominios:

$$\begin{cases} -\Delta u_1(x) = f(x) & \text{si } x \in \Omega_1 \\ u_1(x) = 0 & \text{si } x \in \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega \\ u_1(x) = u_2(x) & \text{si } x \in \Gamma \\ \frac{\partial u_2}{\partial n} = \frac{\partial u_1}{\partial n} & \text{si } x \in \Gamma \\ u_2(x) = 0 & \text{si } x \in \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega \\ -\Delta u_2(x) = f(x) & \text{si } x \in \Omega_2 \end{cases} \quad (3.31)$$

Vamos iterar en una de las condiciones de frontera, en este primer caso la condición de Dirichlet:

Dado una primera estimación  $\lambda_0$ , por cada  $k \geq 0$  calcularemos las secuencias  $u_1^k$  y  $u_2^k$  solución de:

$$\begin{cases} -\Delta u_1^{k+1} = f, \text{ en } \Omega_1 \\ u_1^{k+1} = 0, \text{ en } \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega \\ u_1^{k+1} = \lambda^k \text{ en } \Gamma \end{cases} \text{ y } \begin{cases} -\Delta u_2^{k+1} = f, \text{ en } \Omega_2 \\ u_2^{k+1} = 0, \text{ en } \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega \\ \frac{\partial u_2^{k+1}}{\partial n} = \frac{\partial u_1^{k+1}}{\partial n} \text{ en } \Gamma \end{cases}$$

y la evolución de  $\lambda$ :

$$\lambda^{k+1} = \theta u_2^{k+1} + (1 - \theta)\lambda^k, \quad 1 > \theta > 0. \quad (3.32)$$

Si  $\theta = 1$ , el método puede no converger sin hipótesis sobre los subdominios  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$ . Consideremos el caso elemental siguiente:

$$\begin{cases} -u''(x) = 0, \text{ en } (0, 1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Si la descomposición es de la forma  $\Omega_1 = ]0, \alpha[$  y  $\Omega_2 = ]\beta, 1[$  el método converge si y solamente si  $\alpha > (1 - \beta)$ , si no tendremos divergencia, ver la figura (3.2).

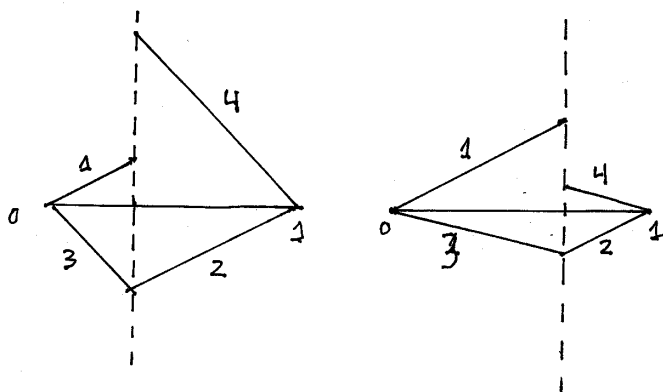


Figura 3.2: Convergencia si  $\theta = 1$ .

Se puede obtener un método similar relajando la condición de frontera de tipo Neumann, definiendo las secuencias  $\tilde{u}_1^{k+1}$  y  $\tilde{u}_2^{k+1}$  siguientes :

$$\begin{cases} -\Delta \tilde{u}_2^{k+1} = f, \text{ en } \Omega_2 \\ \tilde{u}_2^{k+1} = 0, \text{ en } \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega \\ \frac{\partial \tilde{u}_2^{k+1}}{\partial n} = \mu^k \text{ en } \Gamma \end{cases} \text{ y } \begin{cases} -\Delta \tilde{u}_1^{k+1} = f, \text{ en } \Omega_1 \\ \tilde{u}_1^{k+1} = 0, \text{ en } \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega \\ \tilde{u}_1^{k+1} = \tilde{u}_2^{k+1} \text{ en } \Gamma \end{cases}$$

el parámetro  $\mu^k$  calculado a cada iteración:

$$\mu^{k+1} = \theta \frac{\partial \tilde{u}_1^{k+1}}{\partial n} + (1 - \theta)\mu^k, \quad 1 > \theta > 0. \quad (3.33)$$

La forma variacional del método de Dirichlet-Neumann se obtiene utilizando la misma técnica que la usada en la demostración de la equivalencia entre la formulación multidominios y la monodominio.

Sea  $\lambda^0 \in \Lambda$ ;

$$\begin{cases} a_1(u_1^{k+1}, v_1) = (f, v_1)_1, \text{ para todo } v_1 \in V_1^0 \\ u_1^{k+1} = \lambda^k \text{ en } \Gamma \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} a_2(u_2^{k+1}, v_2) = (f, v_2)_2, \text{ para todo } v_2 \in V_2^0 \\ a_2(u_2^{k+1}, \mathcal{R}_2\mu) = (f, \mathcal{R}_2\mu)_2 + (f, \mathcal{R}_1\mu)_1 - a_1(u_1^{k+1}, \mathcal{R}_1\mu) \text{ para todo } \mu \in \Lambda \end{cases}$$

con la evolución de  $\lambda$  definida por:

$$\lambda^{k+1} = \theta u_2^{k+1} + (1 - \theta)\lambda^k, \quad 1 > \theta > 0. \quad (3.34)$$

Este método puede ser interpretado como una iteración de Richardson preconditionada por el operador de Steklov-Poincaré  $S_2$ ; la primera ecuación puede reescribirse de la manera siguiente:

$$u_1^{k+1} = H_1\lambda^k + G_1f \quad (3.35)$$

con  $H_1\lambda^k$  la solución de: determinar  $H_1\lambda^k \in V_1$  tal que

$$\begin{cases} a_1(H_1\lambda^k, v_1) = 0, \text{ para todo } v_1 \in V_1^0 \\ H_1\lambda^k = \lambda^k \text{ en } \Gamma \end{cases}$$

y  $G_1f$  es la solución de; determinar  $G_1f \in V_1^0$  tal que

$$a_1(G_1f, v_1) = (f, v_1)_1, \text{ para todo } v_1 \in V_1^0$$

Por otro lado, si escribimos  $u_2^{k+1} = u_2^{k+1} - G_2f + G_2f$  se verifica que:

$$\begin{cases} \Delta(u_2^{k+1} - G_2f) = 0, \text{ en } \Omega_2 \\ u_2^{k+1} - G_2f = 0 \text{ en } \partial\Omega \cap \Omega_2 \\ \frac{\partial(u_2^{k+1} - G_2f)}{\partial n_2} = -\frac{\partial(u_1^{k+1})}{\partial n} + \frac{\partial(G_2f)}{\partial n} \end{cases}$$

pues  $n_2 = -n_1 = n$ . Entonces:

$$\begin{aligned} u_2^{k+1}|_{\Gamma} &= (u_2^{k+1} - G_2f)|_{\Gamma} \\ &= S_2^{-1} \left( -\frac{\partial(H_1\lambda^k)}{\partial n} - \frac{\partial(G_1f)}{\partial n} + \frac{\partial(G_2f)}{\partial n} \right) \\ &= S_2^{-1} (-S_1\lambda^k + \chi) \text{ con } \chi = \frac{\partial(G_2f)}{\partial n} - \frac{\partial(G_1f)}{\partial n} \end{aligned} \quad (3.36)$$

podemos ahora reescribir la evolución de  $\lambda$  como una iteración de Richardson:

$$\begin{aligned} \lambda^{k+1} &= \theta u_2^{k+1}|_{\Gamma} + (1 - \theta)\lambda^k = \lambda^k + \theta(u_2^{k+1}|_{\Gamma} - \lambda^k) \\ &= \lambda^k + \theta(S_2^{-1}(-S_1\lambda^k + \chi) - (S_2^{-1}S_2)\lambda^k) \\ &= \lambda^k + \theta S_2^{-1}(-S_1\lambda^k + \chi) \end{aligned} \quad (3.37)$$

es decir una iteración de Richardson preconditionada por  $S_2$ .

### 3.2.2. Método Neumann-Neumann

Este método fue propuesto en 1985 por Agoshkov y Lebedev [54]. Mismo si el volumen de cálculo (la complejidad algorítmica) es superior al método Dirichlet Neumann, el método Neumann-Neumann es directamente paralelizable.

Dado  $\lambda^0$  definido sobre  $\Gamma$ , para  $k \geq 0$  se construyen las secuencias  $u_i^{k+1}, i = 1, 2$  y  $\psi_i^{k+1}, i = 1, 2$  que son solución de:

$$\begin{cases} -\Delta u_i^{k+1} = f, \text{ en } \Omega_i \\ u_i^{k+1} = 0, \text{ en } \partial\Omega_i \cap \partial\Omega \\ u_i^{k+1} = \lambda^k \text{ en } \Gamma \end{cases}$$

para  $i = 1, 2$ . A continuación resolvemos la ecuación sobre la condición en las derivadas normales.

$$\begin{cases} -\Delta \psi_i^{k+1} = f, \text{ en } \Omega_i \\ \psi_i^{k+1} = 0, \text{ en } \partial\Omega_i \cap \partial\Omega \\ \frac{\partial \psi_i^{k+1}}{\partial n} = \frac{\partial u_1^{k+1}}{\partial n} - \frac{\partial u_2^{k+1}}{\partial n}, \text{ en } \Gamma \end{cases}$$

para  $i = 1, 2$ . La evolución de  $\lambda^k$  es dada por:

$$\lambda^{k+1} = \lambda^k + \theta(\sigma_1 \psi_1^{k+1}|_{\Gamma} - \sigma_2 \psi_2^{k+1}|_{\Gamma}) \quad (3.38)$$

Los parámetros verifican  $0 < \theta, \sigma_1, \sigma_2 < 1$ .

La formulación débil es la siguiente: determinar  $u_i^{k+1} \in V_i, i = 1, 2$  solución de

$$\begin{cases} a_i(u_i^{k+1}, v_i) = (f, v_i)_i, \text{ para todo } v_i \in V_i^0 \\ u_i^{k+1} = \lambda^k \text{ en } \Gamma \end{cases}$$

y  $\psi_i^{k+1} \in V_i, i = 1, 2$  solución de:

$$\begin{cases} a_1(\psi_1^{k+1}, v_1) = 0, \text{ para todo } v_1 \in V_1^0 \\ a_1(\psi_1^{k+1}, \mathcal{R}_1 \mu) = -(f, \mathcal{R}_1 \mu)_1 - (f, \mathcal{R}_2 \mu)_2 + a_1(u_1^{k+1}, \mathcal{R}_1 \mu) + a_2(u_2^{k+1}, \mathcal{R}_2 \mu) \text{ para todo } \mu \in \Lambda \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} a_2(\psi_2^{k+1}, v_2) = 0, \text{ para todo } v_2 \in V_2^0 \\ a_2(\psi_2^{k+1}, \mathcal{R}_2 \mu) = (f, \mathcal{R}_1 \mu)_1 + (f, \mathcal{R}_2 \mu)_2 - a_1(u_1^{k+1}, \mathcal{R}_1 \mu) - a_2(u_2^{k+1}, \mathcal{R}_2 \mu) \text{ para todo } \mu \in \Lambda \end{cases}$$

El algoritmo Neumann-Neumann puede también interpretarse como un método de Richardson preconditionado. Si:

$$u_i^{k+1} = H_i \lambda^k + G_i f \quad (3.39)$$

entonces:

$$\begin{aligned} \psi_1^{k+1}|_{\Gamma} &= S_1^{-1} \left( \frac{\partial(H_1 \lambda^k)}{\partial n} - \frac{\partial(G_1 f)}{\partial n} - \frac{\partial(H_2 \lambda^k)}{\partial n} - \frac{\partial(G_2 f)}{\partial n} \right) \\ &= S_1^{-1} (-S \lambda^k + \psi). \end{aligned} \quad (3.40)$$

Si  $n = n_1 = -n_2$  obtenemos:

$$\psi_2^{k+1}|_{\Gamma} = S_2^{-1} (-S \lambda^k + \psi). \quad (3.41)$$

entonces la evolución de la condición de frontera  $\lambda^k$

$$\lambda^{k+1} = \lambda^k + \theta(\sigma_1 S_1^{-1} + \sigma_2 S_2^{-1})(\psi - S \lambda^k). \quad (3.42)$$

obtenemos un método de Richardson preconditionado por la matriz  $\sigma_1 S_1^{-1} + \sigma_2 S_2^{-1}$ .

### 3.2.3. Método de Dirichlet- Neumann para la ecuación de elasticidad lineal

Dado  $\lambda^0 \in (\Lambda)^d$  para cada  $k \geq 0$  resolver:

$$\begin{cases} \text{encontrar } \mathbf{u}_1^{k+1} \in (V^1)^d \\ e_1(\mathbf{u}_1^{k+1}, \mathbf{v}_1) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_1) \quad \forall \mathbf{v}_1 \in (V_1^0)^d \\ \mathbf{u}_1^{k+1} = \lambda^k \text{ en } \Gamma \end{cases}$$

seguido de:

$$\begin{cases} \text{encontrar } \mathbf{u}_2^{k+1} \in (V^2)^d \\ e_2(\mathbf{u}_2^{k+1}, \mathbf{v}_2) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_2) \quad \forall \mathbf{v}_2 \in (V_2^0)^d \\ e_2(\mathbf{u}_2^{k+1}, R_2\mu) = (\mathbf{f}, R_2\mu) + (\mathbf{f}, R_1\mu) - e_1(\mathbf{u}_1^{k+1}, R_1\mu) \quad \forall \mu \in (\Lambda)^d \end{cases}$$

la evolución de  $\lambda^k$  en  $\lambda^{k+1}$  se obtiene de la manera siguiente:

$$\lambda^{k+1} = \theta \mathbf{u}_2^{k+1} + (1 - \theta) \lambda^k \text{ sobre } \Gamma, \quad (3.43)$$

con  $0 < \theta < 1$ .

### 3.2.4. Método de Schwarz sin solapado, condiciones de Robin

Consideremos en esta sección un problema un poco más interesante, una ecuación de reacción difusión:

$$-\Delta u + \eta u = f, \text{ en } \Omega \quad (3.44)$$

$$u = 0, \text{ en } \partial\Omega \quad (3.45)$$

con  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d = 2, 3$ ,  $\eta > 0$  y  $f \in L^2(\Omega)$ . Para obtener un método sin solapamiento vamos

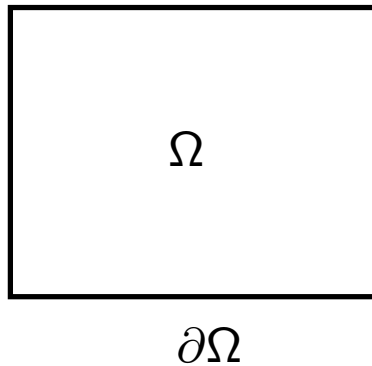


Figura 3.3: Dominio  $\Omega$ .

a considerar una formulación multidominios equivalente a la formulación (1.2), en el caso de dos subdominios,  $k = 1, 2$ :

$$-\Delta u_k + \eta u_k = f, \text{ en } \Omega_k \quad (3.46)$$

$$u_k = 0 \text{ en } \partial\Omega_k \cap \partial\Omega \quad (3.47)$$

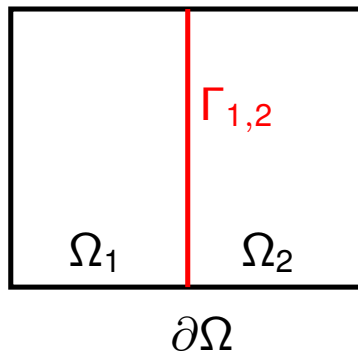


Figura 3.4: Descomposición de dominios.

con condiciones de transmisión de Robin:

$$\frac{\partial u_1}{\partial \mathbf{n}_1} + \alpha_1 u_1 = \frac{\partial u_2}{\partial \mathbf{n}_1} + \alpha_1 u_2, \text{ en } \Gamma_{1,2} \quad (3.48)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial \mathbf{n}_2} + \alpha_2 u_2 = \frac{\partial u_1}{\partial \mathbf{n}_2} + \alpha_2 u_1, \text{ en } \Gamma_{1,2} \quad (3.49)$$

En 1990, P.L. Lions propuso el algoritmo siguiente; para  $n \geq 1$  a cada paso  $n$  se resuelve en paralelo los problemas de Robin siguientes:

$$-\Delta u_1^n + \eta u_1^n = f, \text{ en } \Omega_1 \quad (3.50)$$

$$u_1^n = 0 \text{ en } \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega \quad (3.51)$$

$$\frac{\partial u_1^n}{\partial \mathbf{n}_1} + \alpha_1 u_1^n = \frac{\partial u_2^{n-1}}{\partial \mathbf{n}_1} + \alpha_1 u_2^{n-1}, \text{ en } \Gamma_{1,2} \quad (3.52)$$

y

$$-\Delta u_2^n + \eta u_2^n = f, \text{ en } \Omega_2 \quad (3.53)$$

$$u_2^n = 0 \text{ en } \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega \quad (3.54)$$

$$\frac{\partial u_2^n}{\partial \mathbf{n}_2} + \alpha_2 u_2^n = \frac{\partial u_1^{n-1}}{\partial \mathbf{n}_2} + \alpha_2 u_1^{n-1}, \text{ en } \Gamma_{1,2} \quad (3.55)$$

el dato necesario para comenzar las iteraciones es  $\frac{\partial u_k^0}{\partial \mathbf{n}_k} + \alpha_k u_k^0 = \zeta_k^0$ .

### 3.2.5. Convergencia del método de Schwarz sin solapamiento

Si notamos  $e_k^n = u_k^n - u$  el error cometido en el dominio  $k$ , para  $k = 1, 2$ , verifica las ecuaciones siguientes:

$$-\Delta e_1^n + \eta e_1^n = 0, \text{ en } \Omega_1 \quad (3.56)$$

$$e_1^n = 0 \text{ en } \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega \quad (3.57)$$

$$\frac{\partial e_1^n}{\partial \mathbf{n}_1} + \alpha_1 e_1^n = \frac{\partial e_2^{n-1}}{\partial \mathbf{n}_1} + \alpha_1 e_2^{n-1}, \text{ en } \Gamma_{1,2} \quad (3.58)$$

y

$$-\Delta e_2^n + \eta e_2^n = 0, \text{ en } \Omega_2 \quad (3.59)$$

$$e_2^n = 0 \text{ en } \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega \quad (3.60)$$

$$\frac{\partial e_2^n}{\partial \mathbf{n}_2} + \alpha_2 e_2^n = \frac{\partial e_1^{n-1}}{\partial \mathbf{n}_2} + \alpha_2 e_1^{n-1}, \text{ en } \Gamma_{1,2} \quad (3.61)$$

Ahora vamos a suponer que  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$  y establecer estimaciones en  $L^2(\Omega_k)$  que demostrarán que  $\|e_k^n\|_1 \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Aplicando el teorema de Green se obtiene:

$$\int_{\Omega_k} (|\nabla e_k^n|^2 + \eta |e_k^n|^2) dx = \int_{\Gamma_{1,2}} \frac{\partial e_k^n}{\partial \mathbf{n}_k} e_k^n d\gamma \quad (3.62)$$

pero utilizando la igualdad:

$$AB = \frac{1}{4\alpha} [(A + \alpha B)^2 - (A - \alpha B)^2]$$

$$\int_{\Omega_k} (|\nabla e_k^n|^2 + \eta |e_k^n|^2) dx = \frac{1}{4\alpha} \int_{\Gamma_{1,2}} \left( \left( \frac{\partial e_k^n}{\partial \mathbf{n}_k} + \alpha e_k^n \right)^2 - \left( \frac{\partial e_k^n}{\partial \mathbf{n}_k} - \alpha e_k^n \right)^2 \right) d\gamma \quad (3.63)$$

Usando las condiciones de interfaz se obtiene:

$$\int_{\Omega_k} (|\nabla e_k^n|^2 + \eta |e_k^n|^2) dx + \frac{1}{4\alpha} \int_{\Gamma_{1,2}} \left( \frac{\partial e_k^n}{\partial \mathbf{n}_k} - \alpha e_k^n \right)^2 d\gamma = \frac{1}{4\alpha} \int_{\Gamma_{1,2}} \left( \frac{\partial e_l^{n-1}}{\partial \mathbf{n}_1} - \alpha e_l^{n-1} \right)^2 d\gamma \quad (3.64)$$

para  $k = 1, 2$  y  $l \neq k$ . Sumando en  $k$ :

$$\underbrace{\sum_{k=1}^2 \int_{\Omega_k} (|\nabla e_k^n|^2 + \eta |e_k^n|^2) dx}_{E^n} + \underbrace{\frac{1}{4\alpha} \sum_{k=1}^2 \int_{\Gamma_{1,2}} \left( \frac{\partial e_k^n}{\partial \mathbf{n}_k} - \alpha e_k^n \right)^2 d\gamma}_{B^n} = \underbrace{\sum_{k=1}^2 \frac{1}{4\alpha} \int_{\Gamma_{1,2}} \left( \frac{\partial e_k^{n-1}}{\partial \mathbf{n}_k} - \alpha e_k^{n-1} \right)^2 d\gamma}_{B^{n-1}}$$

Entonces sumamos en  $n$  y el carácter telescópico, la serie de términos positivos  $\sum_{n=1}^{\infty} E^n \leq B^0$ , está acotada, podemos concluir que  $\lim_{n \rightarrow \infty} E^n = 0$ .

En el caso de más de dos subdominios se puede hacer el mismo razonamiento: si  $k = 1, \dots, m$

$$\int_{\Omega_k} (|\nabla e_k^n|^2 + \eta |e_k^n|^2) dx = \sum_l \int_{\Gamma_{k,l}} \frac{\partial e_k^n}{\partial \mathbf{n}_k} e_k^n d\gamma \quad (3.65)$$

$$= \frac{1}{4\alpha} \sum_l \int_{\Gamma_{k,l}} \left( \left( \frac{\partial e_k^n}{\partial \mathbf{n}_k} + \alpha e_k^n \right)^2 - \left( \frac{\partial e_k^n}{\partial \mathbf{n}_k} - \alpha e_k^n \right)^2 \right) d\gamma \quad (3.66)$$

entonces usando las condiciones de interfaz para todas la fronteras  $\Gamma_{k,l} \neq \Phi$  se obtiene:

$$\int_{\Omega_k} (|\nabla e_k^n|^2 + \eta |e_k^n|^2) dx + \frac{1}{4\alpha} \sum_l \int_{\Gamma_{k,l}} \left( \frac{\partial e_k^n}{\partial \mathbf{n}_k} - \alpha e_k^n \right)^2 d\gamma = \frac{1}{4\alpha} \sum_l \int_{\Gamma_{k,l}} \left( \frac{\partial e_l^{n-1}}{\partial \mathbf{n}_1} - \alpha e_l^{n-1} \right)^2 d\gamma \quad (3.67)$$

Sumando en  $k = 1, \dots, m$ :

$$\underbrace{\sum_{k=1}^m \int_{\Omega_k} (|\nabla e_k^n|^2 + \eta |e_k^n|^2) dx}_{E^n} + \underbrace{\frac{1}{4\alpha} \sum_{k=1}^m \sum_{l \neq k} \int_{\Gamma_{k,l}} \left( \frac{\partial e_k^n}{\partial \mathbf{n}_k} - \alpha e_k^n \right)^2 d\gamma}_{B^n} = \underbrace{\frac{1}{4\alpha} \sum_{k=1}^m \sum_{l \neq k} \int_{\Gamma_{k,l}} \left( \frac{\partial e_l^{n-1}}{\partial \mathbf{n}_1} - \alpha e_l^{n-1} \right)^2 d\gamma}_{B^{n-1}}$$

Entonces sumamos en  $n$  y utilizando el carácter telescópico, obtenemos que la serie de términos positivos  $\sum_{n=1}^{\infty} E^n \leq B^0$  es acotada, podemos concluir que  $\lim_{n \rightarrow \infty} E^n = 0$ .

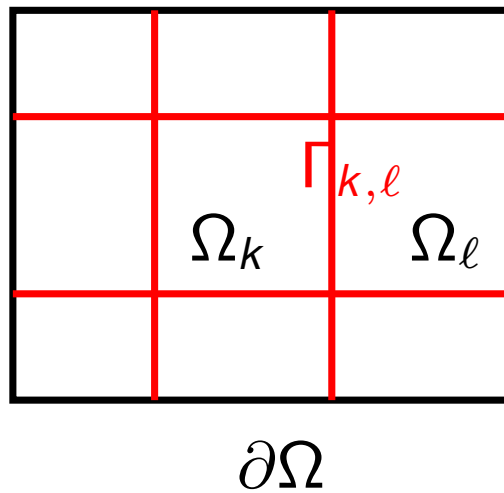


Figura 3.5: Descomposición de dominios en  $K$  subdominios.

### 3.2.6. Elección del parámetro $\alpha$ .

Consideremos el caso donde  $\eta = 0$  en una dimensión:

$$\begin{cases} -u'' = f \text{ en } (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{3.68}$$

La descomposición del dominio  $(0, 1)$  es de la forma  $\Omega_1 = (0, \gamma)$  y  $\Omega_2 = (\gamma, 1)$ .

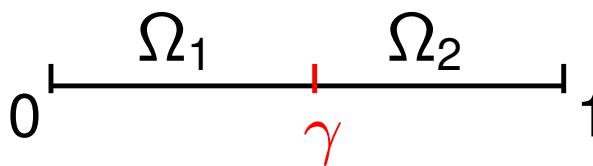


Figura 3.6: Descomposición de dominios en 1D.

El error  $e_k^n = u_k^n - u$ ,  $k = 1, 2$  verifica la ecuación siguiente:

$$-e_k^{n''} = 0 \text{ en } \Omega_k \tag{3.69}$$

$$e_1^n(0) = 0, e_2^n(1) = 0 \tag{3.70}$$

La solución está dada por  $e_1^n = C_1^k x$  y  $e_2^n = C_2^n(1 - x)$  y las condiciones de interfaz (o de transmisión):

$$C_1^n(1 + \alpha_1 \gamma) = C_2^{n-1}(1 - \alpha_1(1 - \gamma)), \tag{3.71}$$

$$C_2^n(1 + \alpha_2(1 - \gamma)) = C_1^{n-1}(1 - \alpha_2 \gamma) \tag{3.72}$$



Así el factor de convergencia  $\rho_1 = \frac{e_1^n}{e_1^{n-2}}$  es dado por  $\frac{C_1^n}{C_1^{n-2}}$  y entonces:

$$\rho = \left( \frac{1 - \alpha_1(1 - \gamma)}{1 + \alpha_1\gamma} \right) \left( \frac{1 - \alpha_2\gamma}{1 + \alpha_2(1 - \gamma)} \right) \quad (3.73)$$

y el algoritmo converge en dos iteraciones ( $\rho = 0$ ) si elegimos :

$$\alpha_1 = \frac{1}{1 - \gamma}, \text{ y } \alpha_2 = \frac{1}{\gamma} \quad (3.74)$$

se obtiene el mismo resultado si se considera  $\rho_2 = \frac{e_2^n}{e_2^{n-2}} = \frac{C_2^n}{C_2^{n-2}}$ .

En el caso de dos dimensiones es posible analizar el problema utilizando la transformada de Fourier en la variable  $y$  a lo largo de  $\Gamma_{1,2}$  con parámetro  $\omega$ .

$$\hat{u}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} u(x) dx \quad (3.75)$$

en dos semi-espacios  $\Omega_1 = (-\infty, 0) \times \mathbb{R}$  y  $\Omega_2 = (0, \infty) \times \mathbb{R}$ . Para un dominio  $\Omega_k$ ,  $k = 1, 2$  en el paso  $n$

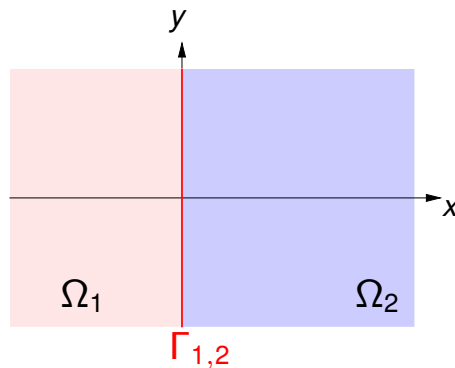


Figura 3.7: Dominios en 2D.

la transformada de Fourier del error  $e_k^n = u_k^n - u$  verifica la ecuación siguiente:

$$-\frac{\partial \hat{e}_k^n}{\partial x^2} + (\omega^2 + \eta) \hat{e}_k^n = 0. \quad (3.76)$$

Dos soluciones de esta ecuación son:

$$\hat{e}_1^n(x, w) = C_1^n e^{r^+(\eta, \omega)}, \quad \hat{e}_2^n(x, w) = C_2^n e^{r^-(\eta, \omega)}, \quad (3.77)$$

donde  $r^\pm = \pm \sqrt{\omega^2 + \eta}$ .

Calculando la transformada de Fourier de las condiciones de transmisión y considerando que  $\mathbf{n}_1 = (1, 0)$  se obtiene que el factor de convergencia:

$$\rho(\omega, \eta, \alpha_1, \alpha_2) = \frac{\hat{e}_1^n}{\hat{e}_1^{n-2}} = \frac{C_1^n}{C_1^{n-2}} = \left( \frac{\sqrt{\omega^2 + \eta} - \alpha_1}{\sqrt{\omega^2 + \eta} + \alpha_1} \right) \left( \frac{\sqrt{\omega^2 + \eta} - \alpha_2}{\sqrt{\omega^2 + \eta} + \alpha_2} \right) \quad (3.78)$$

El algoritmo converge en dos iteraciones si  $\rho = 0$ , es decir si  $\alpha_1(\omega) = \alpha_2(\omega) = \sqrt{\omega^2 + \eta}$ . Si volvemos al problema inicial las condiciones de transmisión en la interfaz  $\Gamma_{1,2}$  se escriben

$$\frac{\partial u_1^n}{\partial \mathbf{n}_1} + S_1(u_1^n) = \frac{\partial u_2^{n-1}}{\partial \mathbf{n}_1} + S_1(u_2^{n-1}), \text{ en } \Gamma_{1,2} \quad (3.79)$$

$$\frac{\partial u_2^n}{\partial \mathbf{n}_2} + S_2(u_2^n) = \frac{\partial u_1^{n-1}}{\partial \mathbf{n}_2} + S_2(u_1^{n-1}), \text{ en } \Gamma_{1,2} \quad (3.80)$$

donde  $S_k(u) = \mathcal{F}^{-1}(\alpha_k(\omega)\hat{u})$ ,  $k = 1, 2$ . Esto es prácticamente inutilizable.

En la práctica se busca calcular  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  tales que minimicen  $\rho$  en un cierta gama de pulsaciones (frecuencias):

$$|\rho(\omega^*, \eta, \alpha_1^*, \alpha_2^*)| = \min_{\alpha_1, \alpha_2 \geq 0} \left( \max_{\omega^- \leq \omega \leq \omega^+} |\rho(\omega, \eta, \alpha_1, \alpha_2)| \right) \quad (3.81)$$

Si  $h$  es el paso de discretización de  $\Gamma_{1,2}$ , consideraremos la gama de pulsaciones  $[\omega^-, \omega^+]$  siguiente:

$$- \omega^- = \frac{\pi}{|\Gamma_{1,2}|}$$

$$- \omega^+ = \frac{\pi}{h}$$

esta última cantidad  $\omega^+$  es la mayor pulsación soportada por la discretización.

Es decir si  $\Gamma_{1,2} = (0, L)$  las funciones propias del laplaciano con condiciones de borde de Dirichlet son  $u_m(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{m\pi x}{L}$ , el operador de Laplace discreto en una grilla uniforme tiene un valor de mínima y máxima de frecuencias que pueden ser representadas (que se llama límite de Nyquist).

Por ejemplo si elegimos  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$  la solución  $\alpha^*$  verifica:

$$|\rho(\omega, \eta, \alpha^*)| = \min_{\alpha \geq 0} \left( \max_{\omega^- \leq \omega \leq \omega^+} |\rho(\omega, \eta, \alpha)| \right) \quad (3.82)$$

y

$$\alpha^* = (((\omega^-)^2 + \eta)((\omega^+)^2 + \eta))^{1/4}. \quad (3.83)$$

La determinación de los parámetros optimales  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  es un tema que depende de la ecuación, del paso de discretización, y se debe determinar para cada caso. Sin embargo el método converge en general para un  $\alpha > 0$ , pero no de manera optimal.

### 3.2.7. Método de Agoshkov-Lebedev

Dados  $u_1^0$  y  $u_2^0$  para  $k \geq 0$  construimos las secuencias:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u_1^{k+1/2} = f, \text{ en } \Omega_1 \\ u_1^{k+1/2} = 0, \text{ en } \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega \\ \frac{\partial u_1^{k+1/2}}{\partial n} + p_k u_1^{k+1/2} = \frac{\partial u_2^k}{\partial n} + p_k u_2^k \text{ en } \Gamma \end{array} \right.$$

entonces  $u_1^{k+1} = u_1^k + \alpha_{k+1}(u_1^{k+1/2} - u_1^k)$  en  $\Omega_1$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u_2^{k+1/2} = f, \text{ en } \Omega_2 \\ u_2^{k+1/2} = 0, \text{ en } \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega \\ -q_k \frac{\partial u_2^{k+1/2}}{\partial n} + u_2^{k+1/2} = -q_k \frac{\partial u_1^{k+1}}{\partial n} + u_1^{k+1} \text{ en } \Gamma \end{array} \right.$$

y entonces  $u_2^{k+1} = u_2^k + \beta_{k+1}(u_2^{k+1/2} - u_2^k)$  en  $\Omega_2$ .

Los parámetros verifican  $p_k \geq 0$ ,  $q_k \geq 0$ ;  $\alpha_k \in \mathbb{R}$  y  $\beta_k \in \mathbb{R}$ .

Se observa que si  $p_k = q_k = 0$  y  $\alpha_{k+1} = 1$  obtenemos el método de Dirichlet-Neumann.

### 3.2.8. Método FETI (Finite Element Tearing and Interconnecting method)

#### Introducción al caso continuo

Consideramos el caso adjunto y elíptico siguiente:

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (a(x)\nabla u(x)) + c(x)u(x) = f(x) & x \in \Omega \\ u(x) = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

La formulación débil consiste en encontrar  $u \in H_0^1(\Omega)$  tal que:

$$A(u, v) = F(u)$$

con

$$\begin{cases} A(u, v) = \int_{\Omega} (a\nabla u \nabla v + cuv) dx \\ F(v) = \int_{\Omega} f v dx \end{cases}$$

Como el problema es auto adjunto y elíptico, por el teorema de Lax-Milgram es equivalente a un problema de minimización: calcular  $u \in H_0^1(\Omega)$  argumento mínimo de una energía:

$$J(u) = \min_{v \in H_0^1(\Omega)} J(v) \quad (3.84)$$

con

$$J(v) = \frac{1}{2}A(v, v) - F(v)$$

Si consideramos una descomposición geométrica del dominio  $\Omega$ , en  $m$  subdominios  $\Omega_1, \dots, \Omega_m$ , definiremos las fronteras e interfaces:  $\Gamma^l = \partial\Omega_l \cap \Omega$  y  $\Gamma_l = \partial\Omega_l \cap \partial\Omega$ . Podemos definir un problema en cada

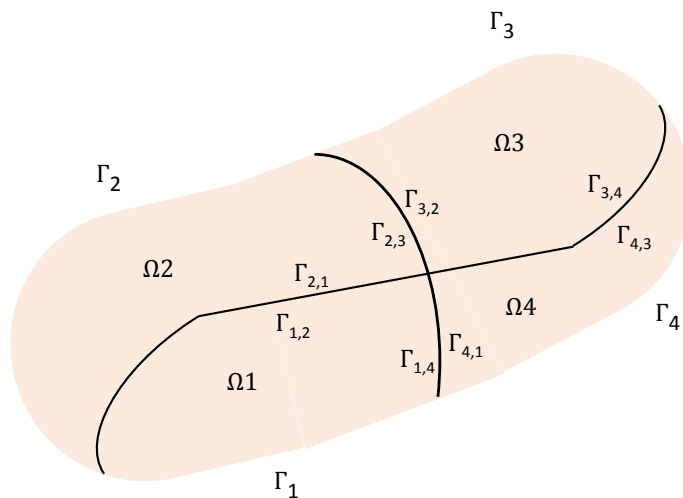


Figura 3.8: descomposición en subdominios, sin solapamiento, notación

subdominio  $l$ :

$$\begin{cases} A_l(u, v) = \int_{\Omega_l} (a\nabla u_l \nabla v_l + cu_l v_l) dx, \quad \forall u_l, v_l \in H_{\Gamma_l}^1(\Omega_l) \\ F_l(v_l) = \int_{\Omega_l} f v_l dx \\ H_{\Gamma_l}^1(\Omega_l) = \{v \in H^1(\Omega_l) \text{ tal que } v = 0 \text{ en } \Gamma_l\} \end{cases}$$

Dado un conjunto de funciones  $v_\epsilon = (v_1, \dots, v_m)$  con  $v_l \in H_{\Gamma_l}^1(\Omega_l)$  podemos definir una energía:

$$J_\epsilon(v_\epsilon) = \sum_{l=1}^m \left( \frac{1}{2} A_l(v_l, v_l) - F_l(v_l) \right) \quad (3.85)$$

Si  $v \in H_0^1(\Omega)$  es tal que  $v = v_l$  en  $\Omega_l$  para  $1 \leq l \leq m$  entonces:

$$J(v) = J_\epsilon(v_\epsilon) \quad (3.86)$$

En general  $v_i \neq v_j$  en  $\Gamma_{ij} = \partial\Omega_i \cap \Omega_j$ . Definimos para uso técnico los conjuntos siguientes:

Notemos  $I^*(l) = \{j : \Gamma_{lj} \neq \emptyset\}$ , está claro que si  $j \in I^*(l) \leftrightarrow l \in I^*(j)$ .

- $I(l) \subset I^*(l) = \{j : \Gamma_{lj} \text{ tal que si } \Gamma_{lj} \neq \emptyset \text{ entonces } j \in I(l) \text{ o } l \in I(j) \text{ pero no los dos al mismo tiempo.}$
- $I_* \subset I(l)$  las interfaces de dimensión  $d - 1$  cuando  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ .
- $\mathcal{V}_0 = \{v_\epsilon : v_l = v_j \text{ en } \Gamma_{lj}, \text{ si } j \in I(l); 1 \leq l \leq m\}$ .

Es decir que  $\mathcal{V}_0$  es el conjunto de funciones definidas en los subdominios continuas a través de las interfaces.

Para obtener soluciones continuas a través las interfaces introducimos el problema siguiente: minimizar  $J_\epsilon(v_\epsilon)$  en  $\mathcal{V}_0$ . Es decir calcular  $u_\epsilon$  tal que:

$$J_\epsilon(u_\epsilon) = \min_{v_\epsilon \in \mathcal{V}_0} J_\epsilon(v_\epsilon) \quad (3.87)$$

El método FETI consiste en resolver el problema de optimización (3.87) utilizando multiplicadores de Lagrange. A continuación se resuelve el problema de punto silla resultante utilizando el gradiente proyectado, pre condicionado.

### Caso discreto

Consideremos  $\mathcal{T}_h(\Omega)$  una triangulación de  $\Omega$  casi-uniforme (Si  $d_1$  y  $d_2$  son respectivamente el diámetro interior y exterior de los triángulos,  $\frac{d_2}{d_1} \leq \sigma$ ). Sea  $V_h$  el espacio de elementos finitos asociado a la triangulación  $\mathcal{T}_h(\Omega)$ .

El problema discreto se enuncia: encontrar  $u_h \in V_h \cap H_0^1(\Omega)$  tal que:

$$A(u_h, v_h) = F(v_h) \quad \forall v_h \in V_h \cap H_0^1(\Omega) \quad (3.88)$$

Si  $u_h(x) = \sum_{i=1}^{N_h} U_i \varphi_i(x)$  con  $\varphi_i, i = 1, \dots, N_h$  una base de  $X_h = V_h \cap H_0^1(\Omega)$  obtenemos un sistema lineal.

$$AU = F \quad (3.89)$$

con

$$(A)_{i,j} = A(\varphi_j, \varphi_i) = A(\varphi_i, \varphi_j) \quad (3.90)$$

$$(F)_j = \int_{\Omega} f \varphi_j dx \quad (3.91)$$

$$U = (U_1, \dots, U_{N_h})^t \quad (3.92)$$

Si ahora consideramos una descomposición de dominios de  $\Omega$  sin solapamiento  $\{\Omega_1, \dots, \Omega_m\}$ . Anotamos  $\Omega(l)$  los nodos interiores de  $\Omega_l$  y  $\Gamma^{(l)}$  los nodos en el borde  $\Omega_l$ . El conjunto de todos los nodos en las interfaces son:

$$\Gamma = \cup_{l=1}^m \Gamma^{(l)}$$

El número de nodos en  $\Omega_l$  lo llamamos  $N_I^{(l)}$  y el número de nodos en  $\Gamma^{(l)}$  es  $N_\Gamma^{(l)}$ .

Llamamos  $N_l = N_I^{(l)} + N_\Gamma^{(l)}$ .

$\Omega_4$	$\Omega_5$	$\Omega_9$	$\Omega_{13}$
$\Omega_3$	$\Omega_6$	$\Omega_{10}$	$\Omega_{14}$
$\Omega_2$	$\Omega_7$	$\Omega_{11}$	$\Omega_{15}$
$\Omega_1$	$\Omega_8$	$\Omega_{12}$	$\Omega_{16}$

Figura 3.9: descomposición en 16 subdominios.

Sea  $U_I^{(l)} \in \mathbb{R}^{N_I^{(l)}}$  y  $U_\Gamma^{(l)} \in \mathbb{R}^{N_\Gamma^{(l)}}$  los valores de  $U$  correspondientes a los nodos de  $\Omega_l$  y  $\Gamma^{(l)}$  respectivamente.

Los desplazamientos locales, la matriz de rigidez y las cargas locales son llamadas:

$$U_l = \begin{pmatrix} U_I^{(l)} \\ U_\Gamma^{(l)} \end{pmatrix}, \quad A^{(l)} = \begin{pmatrix} A_{II}^{(l)} & A_{I\Gamma}^{(l)} \\ A_{\Gamma I}^{(l)t} & A_{\Gamma\Gamma}^{(l)} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad F_l = \begin{pmatrix} F_I^{(l)} \\ F_\Gamma^{(l)} \end{pmatrix} \quad (3.93)$$

para  $1 \leq l \leq m$ .

Si  $R_l$  es la restricción de  $\mathbb{R}^{N_h} \rightarrow \mathbb{R}^{N_l}$ ,  $U_l = R_l U$ . La transpuesta  $R_l^t$  expande  $U_l$  a un  $U$  completado con zeros. Entonces tenemos que:

$$A = \sum_{l=1}^m R_l^t A^{(l)} R_l \quad (3.94)$$

$$F = \sum_{l=1}^m R_l^t F_l \quad (3.95)$$

que es la relación entre las cantidades locales y globales.

**Observación 2.** Si  $c(x) = 0$  y  $\bar{\Omega}_l \subset \Omega$  (el caso de los subdominios  $\Omega_6, \Omega_{10}, \Omega_7, \Omega_{11}$  en la figura (3.9)) la matriz  $A^{(l)}$  puede ser singular. En el caso de la elasticidad el  $\text{Kernel}(A^{(l)})$  puede ser de dimensión  $d_l \leq 6$ , (si  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ). En este caso  $Z^{(l)}$  es la matriz de dimensión  $N_l \times d_l$  donde las columnas son la base del  $\text{Kernel}(A^{(l)})$ :

$$\text{Imagen}(Z^{(l)}) = \text{Kernel}(A^{(l)}) \quad (3.96)$$

Si  $A^{(l)}$  es regular  $Z^{(l)} = \{0\}$  y  $d_l = 0$ .

El equivalente del teorema de Lax-Milgram en el caso discreto nos dice que si  $A = A^t$  es estrictamente definida positiva y  $AU = F$  entonces:

$$J(U) = \min_{V \in \mathbb{R}^{N_h}} J(V) \quad (3.97)$$

con  $J(V) = \frac{1}{2} V^t A V - V^t F \quad \forall V \in \mathbb{R}^{N_h}$ .

En el método FETI el funcional de energía no impone la continuidad de las incógnitas a través de las interfaces. Esta continuidad es impuesta por medio de restricciones.

Si ahora introducimos una notación más próxima con la elasticidad lineal el vector de desplazamiento global  $v_\epsilon = (v_1^t, \dots, v_m^t)^t$  es de dimensión  $N_\epsilon = N_1 + \dots + N_l$  y los vectores  $v_l = (v_l^t, v_\Gamma^t)^t$  son los desplazamientos locales.

La carga global es definida como  $f_\epsilon = (f_1^t, \dots, f_l^t)^t$  donde  $f_l^t = (f_l^{(l)t}, f_\Gamma^{(l)t})$  son las cargas locales. La matrix de rigidez global es block diagonal:

$$A_\epsilon = \begin{pmatrix} A^{(1)} & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & A^{(m)} \end{pmatrix} \quad (3.98)$$

Definimos también la matriz global  $Z$  de dimensión  $N_\epsilon \times d$  tal que:

$$Z = \begin{pmatrix} Z^{(1)} & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & Z^{(m)} \end{pmatrix} \quad (3.99)$$

donde  $Z^{(l)}$  son las matrices de dimensión  $N_l \times \min\{1, d_l\}$  donde las columnas son una base del  $Kernel(A^{(l)})$ , entonces  $d = \sum_{l=1}^m d_l$ . La construcción de la matriz  $Z^{(l)}$  puede realizarse utilizando el método de triangulación de Gauss.

Ahora podemos introducir la versión discreta de la energía  $J_\epsilon(w_\epsilon)$  como:

$$J_\epsilon(w_\epsilon) = \frac{1}{2} w_\epsilon^t A_\epsilon w_\epsilon - w_\epsilon^t f_\epsilon \quad (3.100)$$

Cuando  $w_l = R_l v$  podemos demostrar una igualdad entre  $J(v)$  y  $J_\epsilon(w_\epsilon)$ . Éxplicitamente si  $v \in \mathbb{R}^{N_h}$ :

- Definimos  $w_\epsilon = (w_1^t, \dots, w_m^t)$  con  $w_l = R_l v$ .
- Definimos  $f = \sum_{l=1}^m f_l$  y  $f_\epsilon = (f_1^t, \dots, f_m^t)$ .
- Definimos la energía extendida:

$$J_\epsilon(w_\epsilon) = \frac{1}{2} w_\epsilon^t A_\epsilon w_\epsilon - w_\epsilon^t f_\epsilon \quad (3.101)$$

entonces:  $J(v) = J_\epsilon(w_\epsilon)$ .

Para obtener un problema de minimización tal que  $w_l = R_l v$  se introduce una restricción lineal de la forma  $Mw_\epsilon = 0$  donde  $M$  es una matriz de dimensión  $m \times N_\epsilon$  que verifica:  $w_l = R_l v, l = 1, \dots, m$  si y solamente si  $Mw_\epsilon = 0$  y  $w_\epsilon = (w_1^t, \dots, w_m^t)$ . Así el problema de minimización toma la forma: calcular  $w_\epsilon \in \mathbb{R}^{N_\epsilon}$  tal que:

$$J_\epsilon(w_\epsilon) = \min_{w_\epsilon \in \mathbb{R}^{N_\epsilon}} J_\epsilon(v_\epsilon) \quad (3.102)$$

$$Mw_\epsilon = 0 \quad (3.103)$$

es decir que el conjunto definido por las restricciones  $\mathcal{V}_0 = \{v_\epsilon : v_l = v_j \text{ en } \Gamma_{lj}, \text{ si } j \in I(l); 1 \leq l \leq m\}$  en el caso discreto se escribe:  $\mathcal{V}_0 = \{v_\epsilon \in \mathbb{R}^{N_\epsilon} : Mw_\epsilon = 0\}$ .

Se puede demostrar [14], [1] que si  $u$  es solución del problema original monodominio (3.84) y  $w_\epsilon$  es solución de (3.102), entonces  $w_l = R_l u, l = 1, \dots, m$ .

**Construcción de la matriz  $M$**

La matriz  $M$  es tal que  $\mathcal{V}_0 = Kernel(M)$ , y tal que obligue a los desplazamientos  $w_\Gamma^{(i)}$  y  $w_\Gamma^{(j)}$  a ser continuos a través de las interfaces entre subdominios  $\Gamma_{ij}$ .

Sea  $\{x_1, \dots, x_{N_\Gamma}\}$  el conjunto de los nodos de interpolación en la interfaz  $\Gamma$ . Comenzamos por definir los conjuntos y cantidades siguientes:

- $W(i) = \{j : x_i \in \partial\Omega_j\}$ , el conjunto de los índices de interfaces a las cuales  $x_i$  pertenece.
- $grado(x_i) = \#(W(i))$ , el número de elementos de  $W(i)$ , es decir el número de interfaces a las cuales  $x_i$  pertenece.
- $\text{índice}(x_l, \Gamma^{(j)}) =$  al índice local de  $x_l$  en  $\Gamma^{(j)}$

La idea inmediata es obligar a que  $v_l(x_i) - v_j(x_i) = 0$  para todo par  $l, j \in W(x_i)$ . Puede ocurrir que algunos nodos de la interfaz pertenezcan a más de dos subdominios,  $grado(x_i) \geq 3$ , ver la figura (3.10) y entonces aparecen ecuaciones redundantes. Será necesario seleccionar un pequeño número de

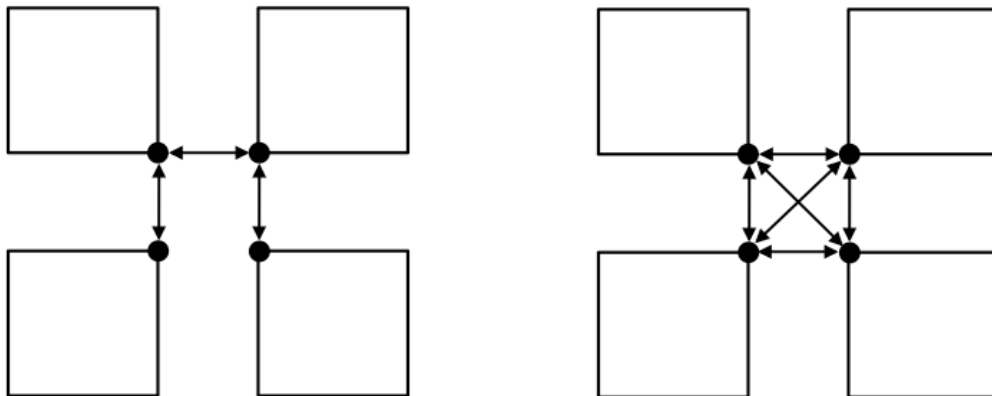


Figura 3.10: Caso con el  $grado(x_i) \geq 3$

restricciones de manera a que todas las condiciones de continuidad sean verificadas sin redundancia.

La matriz  $M$  será de la forma:

$$M = [M^{(1)}, \dots, M^{(m)}] \tag{3.104}$$

tal que  $Mv_\epsilon = M^{(1)}v_1 + \dots + M^{(m)}v_m$  donde  $M^{(i)}$  es de dimensión  $r \times N_i$ . Si descomponemos  $v_i = (v_I^{(i)t}, v_\Gamma^{(i)t})^t$  separando los nodos internos a  $\Omega_i$  de los nodos de la interfaz  $\Gamma$ .

La matriz  $M^{(i)} = [M_I^{(i)}, M_\Gamma^{(i)}] = [0, M_\Gamma^{(i)}]$  pues los nodos internos no participan a las restricciones, la continuidad está garantizada por el espacio de interpolación.

Si  $\forall l, j \in W(x_i)$  con  $l < j$  anotamos  $\tilde{l}_i = \text{índice}(x_i, \Gamma^{(l)})$  y  $\tilde{j}_i = \text{índice}(x_i, \Gamma^{(j)})$ , las restricciones toman la forma:

$$(v_\Gamma^{(l)})_{\tilde{l}_i} - (v_\Gamma^{(j)})_{\tilde{j}_i} = 0 \tag{3.105}$$

en consecuencia los coeficientes de  $M$  son de la forma  $\{-1, 0, 1\}$ .

Una manera de construir  $M$  es la siguiente: para cada  $W(x_i)$  se organizan los índices en orden creciente. A continuación para cada par de índices consecutivos imponemos una sola restricción, es decir en total  $\text{grado}(x_i) - 1$  restricciones. El número total de restricciones es entonces:

$$r = \sum_{i=1}^{N_\Gamma} (\text{grado}(x_i) - 1) \quad (3.106)$$

Por construcción la matriz  $M$  es de rango maximal, no hay restricciones redundantes,  $r = \text{rango}(M)$ , y la dimensión de  $M$  es  $r \times N_\epsilon$ .

Si  $l < j$  son dos índices consecutivos en  $W_{(i)}$ , sea  $k(i, l, j)$  un índice entre 1 y  $r$  asignado a la restricción involucrando  $v_l$  y  $v_j$ . Podemos ahora definir los coeficientes de  $M$ :

$$(M_\Gamma^{(l)})_{k,s} = 1, \text{ sis } = \tilde{l}_i \quad (3.107)$$

$$(M_\Gamma^{(l)})_{k,s} = 0, \text{ sis } \neq \tilde{l}_i \quad (3.108)$$

$$(M_\Gamma^{(j)})_{k,s} = 1, \text{ sis } = \tilde{j}_i \quad (3.109)$$

$$(M_\Gamma^{(j)})_{k,s} = 0, \text{ sis } \neq \tilde{j}_i \quad (3.110)$$

todos los otros coeficientes son nulos.

Una segunda posibilidad es la redundancia, imponemos una restricción para todo  $l < j$ ,  $l, j \in W(x_i)$ . Obtenemos así  $\frac{1}{2}(\text{grado}(x_i)(\text{grado}(x_i) - 1))$  restricciones y

$$r = \sum_{i=1}^{N_\Gamma} \frac{1}{2} (\text{grado}(x_i)(\text{grado}(x_i) - 1))$$

En los dos casos  $\mathcal{V}_0 = \text{Kernel}(M) = \{(R_1 v)^t, \dots, (R_m v)^t : v \in \mathbb{R}^{N_h}\}$ .

### 3.2.9. Formulación utilizando multiplicadores de Lagrange

En esta section vamos a proponer un método de resolución del problema de minimización siguiente: Calcular  $u_\epsilon = (u_1^y, \dots, u_m^t) \in \mathbb{R}^{N_\epsilon}$  solución de

$$J_\epsilon(u_\epsilon) = \min_{w_\epsilon \in \mathcal{V}_0} J_\epsilon(w_\epsilon) \quad (3.111)$$

donde:

$$J_\epsilon(w_\epsilon) = \frac{1}{2} w_\epsilon^t A_\epsilon w_\epsilon - w_\epsilon^t f_\epsilon \quad (3.112)$$

y  $\mathcal{V}_0 = \text{Kernel}(M) = \{w_\epsilon \in \mathbb{R}^{N_\epsilon} : M w_\epsilon = 0\}$ .

El objetivo de la formulación utilizando los multiplicadores de Lagrange es de buscar una solución de (3.111) como el cálculo de un punto silla del Lagrangiano asociado.

Dado  $\mu \in \mathbb{R}^r$  el Lagrangiano asociado al problema de optimización (3.111) anotado

$$\mathcal{L}(w_\epsilon, \mu) = J_\epsilon(w_\epsilon) + \mu^t M w_\epsilon = \frac{1}{2} w_\epsilon^t A_\epsilon w_\epsilon - w_\epsilon^t f_\epsilon + \mu^t M w_\epsilon \quad (3.113)$$

Las variables  $w_\epsilon$ , los desplazamientos, son llamadas variables primales; la variables  $\mu$ , los multiplicadores de Lagrange son llamadas variables duales, y representan el flujo entre dominios.

Podemos definir una función dual, para todo  $\mu \in \mathbb{R}^r$  definimos  $D(\mu)$ :

$$D(\mu) = \inf_{v_\epsilon} \mathcal{L}(v_\epsilon, \mu) \quad (3.114)$$



**Observación 3.** Visto que  $A_\epsilon$  puede ser singular este infimo puede ser  $-\infty$  si  $(f_\epsilon - M^t \mu) \notin \text{Image}(A_\epsilon)$ . Como la matriz  $Z$  es de rango  $= d$ , se verifica que:

$$\text{Imagen}(Z) = \text{Kernel}(A_\epsilon) \quad (3.115)$$

Podemos definir un conjunto de multiplicadores de Lagrange admisibles :

$$\mathcal{G} = \{\mu : Z^t(f_\epsilon - M^t \mu) = 0\} \quad (3.116)$$

en consecuencia si  $\mu \in \mathcal{G}$  entonces  $D(\mu) > -\infty$ .

Para  $v_\epsilon \in \mathbb{R}^{N_\epsilon}$  definimos la función  $E(v_\epsilon)$  :

$$E(v_\epsilon) = \sup_{\mu} \mathcal{L}(v_\epsilon, \mu) \quad (3.117)$$

**Observación 4.** Como  $\mathcal{L}$  es lineal en función de  $\mu$ , verificamos que:

$$E(v_\epsilon) = \begin{cases} +\infty, & \text{si } Mv_\epsilon \neq 0 \\ J_\epsilon(v_\epsilon), & \text{si } Mv_\epsilon = 0 \end{cases} \quad (3.118)$$

Para los desplazamientos admisibles, es decir aquellos que verifican  $Mv_\epsilon = 0$ , tenemos que  $E(v_\epsilon) = J_\epsilon(v_\epsilon) < \infty$ .

**Definición 3.2.1.** Un punto  $(u_\epsilon, \lambda)$  es un punto silla del Lagrangiano  $\mathcal{L}$  si verifica la condición siguiente:

$$\mathcal{L}(u_\epsilon, \mu) \leq E(u_\epsilon) = \mathcal{L}(u_\epsilon, \lambda) = D(\lambda) \leq \mathcal{L}(v_\epsilon, \lambda) \quad \forall v_\epsilon, \mu \quad (3.119)$$

Derivando con respecto a las variables primales y duales se obtiene que un punto crítico  $(u_\epsilon, \lambda)^t$  de  $\mathcal{L}(v_\epsilon, \mu)$  verifica la condición de primer orden siguiente:

$$\begin{cases} A_\epsilon u_\epsilon + M^t \lambda = f_\epsilon \\ M u_\epsilon = 0 \end{cases} \quad (3.120)$$

**Observación 5.** En el caso donde la matriz  $A_\epsilon$  es regular (invertible) y en consecuencia, por construcción estrictamente definida positiva, podemos resolver el problema de optimización (3.111) utilizando un método clásico para la minimización de un problema cuadrático, convexo con restricciones de igualdad.

En lo que sigue consideramos que si  $A_\epsilon$  es singular, entonces la matriz  $Z$  es de rango  $d = \sum_{l=1}^m d^{(l)}$ . Definimos la matriz  $G = MZ$  de dimensión  $r \times d$ . La matriz  $G$  es de la forma:

$$G = MZ = [M^{(1)}Z^{(1)} \dots M^{(m)}Z^{(m)}]. \quad (3.121)$$

Se demuestra, ver [49], que el multiplicador  $\lambda$  solución de (3.120) es solución del sistema reducido siguiente:

$$\begin{cases} P_0 K \lambda = P_0 e \\ G^t \lambda = g \end{cases} \quad (3.122)$$

donde:

- $P_0 = I - G(G^t G)^\dagger G^t$ ,
- $K = M A_\epsilon^\dagger M^t$ ,

- $e = MA_\epsilon^\dagger f_\epsilon$ ,
- $g = Z^t f_\epsilon$ ,
- $A_\epsilon$  y  $(G^t G)^\dagger$  son las pseudo inversas de Moore Penrose (ver apéndice).

A continuación dado  $\lambda$  los desplazamientos  $u_\epsilon$  son calculados de la manera siguiente:

$$\begin{cases} u_\epsilon = A_\epsilon^\dagger (f_\epsilon - M^t \lambda) + Z \alpha \\ \alpha = (G^t G)^\dagger G^t (K \lambda - MA_\epsilon^\dagger f_\epsilon). \end{cases} \quad (3.123)$$

El algoritmo consistirá fundamentalmente en resolver el sistema (3.122)

**Observación 6.** Cuando la matriz  $A_\epsilon$  es regular, la matriz  $Z$  es de rango nulo y entonces podemos prescindir del vector  $\alpha$ . En este caso:

- $K = MA_\epsilon^{-1} M^t$ ,
- $e = MA_\epsilon^{-1} f_\epsilon$ ,
- $G = 0$ ,  $P_0 = I_d$  y  $g = 0$ .

El sistema (3.122), es la condición necesaria para que  $\lambda$  sea un máximo de la función dual  $D(\mu)$ .

En conclusión el algoritmo FETI para resolver los problemas (3.122) y (3.127) es el siguiente, ver [14]:

**Algoritmo 3.2.1.** Dato inicial:  $\lambda_0$ , (por ejemplo  $\lambda_0 = 0$ )

1) Calcular  $e$  y  $g$  :

$$\begin{cases} e = MA_\epsilon^\dagger f_\epsilon \\ g = Z^t f_\epsilon \end{cases} \quad (3.124)$$

2) Resolver los sistemas lineales siguientes usando la pseudo inversa (ver apéndice)

$$\begin{cases} G^t K (G \beta_* + C \gamma_*) + G^t G \delta_* = G^t P_0 (e - K \lambda_0) \\ C^t K (G \beta_* + C \gamma_*) + C^t G \delta_* = C^t P_0 (e - K \lambda_0) \\ G^t (G \beta_* + C \gamma_*) = G^t g \end{cases} \quad (3.125)$$

3) Definimos  $\lambda_* = \lambda_0 + G \beta_* + C \gamma_*$ .

4) Calcular el residuo:  $r_0 = P_0 (K \lambda_* - e)$ .

5) Para  $k = 1, 2, \dots$  hasta la convergencia efectuamos la iteración siguiente:

$$\begin{cases} z_{k-1} = N r_{k-1} \\ y_{k-1} = Q z_{k-1} \\ \xi_k = r_{k-1}^t y_{k-1} \\ p_k = y_{k-1} + \frac{\xi_k}{\xi_{k-1}} p_{k-1}, \text{ si } k > 1, p_1 = y_0 \text{ si } k = 1 \\ \nu_k = \frac{\xi_k}{P_k^t P_0 K p_k} \\ \lambda_k = \lambda_{k-1} + \nu_k p_k \\ r_k = r_{k-1} - \nu_k P_0 K p_k \end{cases} \quad (3.126)$$

6) fin de la iteración en  $k$ .

7) Calcular:

$$\begin{cases} \alpha = (G^t G)^\dagger G^t (K\lambda - MA_\epsilon^\dagger f_\epsilon) \\ u_\epsilon = A_\epsilon^\dagger (f_\epsilon - M^t \lambda) + Z\alpha. \end{cases} \quad (3.127)$$

Para finalizar esta section vamos a especificar la definición de las matrices  $C$ ,  $Q$  y  $N$  que aparecen en el algoritmo (3.2.1).

Para la definición de las matrices  $Q$  y  $C$  dos casos son posibles.

- Si en la ecuación (3.84)  $c(x) = 0$  puede pasar que la matriz de rigidez local  $A^{(i)}$  sea singular. En este caso se introduce la matriz  $Z$  ya definida, entonces  $G = MZ$  y  $C = 0$ , en este caso  $Q = I - G(G^t G)^{-1} G^t$ .
- Si  $c(x) \geq c_0 > 0$  las matrices  $A^{(i)}$  son regulares entonces  $G = 0$  y la proyección  $P_0 = I_d$ . En este caso para acelerar la convergencia se considera la matriz  $C = M\tilde{Z}$  donde  $\tilde{Z}$  es una matriz de dimensión  $N_\epsilon \times r$ . Las columnas de la matriz  $\tilde{Z}$  son una base del  $Kernel(\tilde{A}_\epsilon)$ , donde  $\tilde{A}_\epsilon$  es la matriz de rigidez cuando hacemos  $c(x) = 0$ . Entonces la matriz  $Q = I - C(C^t K C)^{-1} C^t K$ .

En la literatura se propone la matriz de preconditionamiento  $N$  siguiente, ver [14]:

$$N = \sum_{i=1}^m M_\Gamma^{(i)} (A_{\Gamma\Gamma}^{(i)} - A_{\Gamma I}^{(i)t} A_{II}^{(i)-1} A_{I\Gamma}^{(i)}) M_\Gamma^{(i)t}$$

El algoritmo FETI descrito aquí es el algoritmo básico. Existen incontables evoluciones en la literatura, en particular al algoritmo  $FETI - DP$  por dual-primal.

# Capítulo 4

## Ecuaciones Parabólicas (Problemas de evolución)

Vamos a ilustrar los diferentes métodos de resolución de ecuaciones parabólicas utilizando la descomposición de dominios a través de la ecuación de la temperatura siguiente:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \mathcal{L}u = f & \text{en } Q_T = \Omega \times (0, T) \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \times (0, T) \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{en } \Omega \end{cases} \quad (4.1)$$

donde  $\Omega$  es un conjunto convexo, abierto de  $\mathbb{R}^d$  de frontera regular y  $T > 0$  es un dato. El operador  $\mathcal{L}$  está definido por:

$$\mathcal{L}u := \operatorname{div}(A\nabla u) - a_0u = \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{i,j} \frac{\partial u}{\partial x_j}) - a_0u. \quad (4.2)$$

La matriz de funciones  $A = A(x, t) = a_{i,j}(x, t)_{i,j} \in M_n(\mathbb{R})$  verifica la condición de elipticidad uniforme:  $\exists \alpha > 0$  tal que

$$(A(x, t)\xi, \xi) = \sum_{i,j=1}^d a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha|\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d, y (x, t) \in Q_T. \quad (4.3)$$

Los coeficientes  $a_{i,j}(x, t) \in C(\bar{\Omega} \times [0, T])$ . Las funciones  $a_0(x, t) > 0$  y  $f(x, t)$  también pertenecen a  $C(\bar{\Omega} \times [0, T])$ .

### 4.0.1. Existencia y unicidad de la solución

Comenzamos por definir algunos espacios de funciones.

$$L^2((0, T); L^2(\Omega)) = \{v : (0, T) \rightarrow L^2(\Omega) / v \text{ integrable y } \int_0^T \|v\|_0^2 dx < \infty\}, \quad (4.4)$$

$$L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) = \{v : (0, T) \rightarrow H_0^1(\Omega) / v \text{ integrable y } \int_0^T \|v\|_1^2 dx < \infty\}, \quad (4.5)$$

$$L^2(0, T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) = \{v : (0, T) \rightarrow H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) / v \text{ integrable y } \int_0^T \|v\|_1^2 dx < \infty \quad (4.6)$$

$$\text{y } \int_0^T \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2} \right\|_1^2 dx < \infty \forall j\}, \quad (4.7)$$

$$C^0([0, T]; L^2(\Omega)) = \{v : [0, T] \rightarrow L^2(\Omega)/v \text{ es continua en } [0, T] \text{ y } \forall t \in [0, T], v(\cdot, t) \in L^2(\Omega)\}. \quad (4.8)$$

$$C^0([0, T]; H_0^1(\Omega)) = \{v : [0, T] \rightarrow L^2(\Omega)/v \text{ es continua en } [0, T] \text{ y } \forall t \in [0, T], v(\cdot, t) \in H_0^1(\Omega)\}. \quad (4.9)$$

Podemos también definir las siguientes formas bilineales:

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \left( \sum_{i,j=1}^d a_{i,j} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) + a_0 uv dx. \quad (4.10)$$

Si  $\mathcal{L}$  es el Laplaciano entonces podemos afirmar que:

- 1) si  $f \in L^2(Q_T)$  y  $u_0 \in L^2(\Omega)$  entonces existe una única función  $u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega))$  tal que

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(u(t), v) + (\nabla u, \nabla v) = (f(t), v), \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ u(0) = u_0, \text{ en } \Omega \end{cases} \quad (4.11)$$

- 2) si  $f \in L^2(Q_T)$  y  $u_0 \in H_0^1(\Omega)$  entonces existe una única solución en:

$$L^2(0, T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap C([0, T]; H_0^1(\Omega)) \text{ y } \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2((0, T); L^2(\Omega))$$

- 3) si  $f \in C^\infty(\bar{Q}_T)$  et  $u_0 \in L^2(\Omega)$  entonces existe una solución única en  $C^\infty(\bar{\Omega} \times [\epsilon, T])$ ,  $\epsilon > 0$ .

- 4) si  $a_{i,j}$  y  $a_0$  pertenecen a  $C^\infty(\bar{\Omega} \times [0, T])$  entonces los resultados enunciados en las condiciones 1), 2) y 3) son válidos para el operador  $\mathcal{L}$  definido en (4.2).

- 5) En el caso del operador (4.2) podemos definir la forma bilineal siguiente:

$$a(u, v) = \sum_{i,j=1}^d a_{i,j}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j}. \quad (4.12)$$

La condición suficiente para la existencia de una solución es la elipticidad débil (coercividad débil), es decir la existencia de  $\alpha > 0$  y  $\lambda > 0$  tales que:

$$a(v, v) + \lambda \|v\|_0^2 \geq \alpha \|v\|_1^2. \quad (4.13)$$

El comportamiento de la solución en función de los datos,  $f$  y  $u_0$ , puede estudiarse utilizando el principio del máximo si suponemos que  $u \in C^2(Q_T) \cap C^0(\bar{\Omega} \times [0, T])$ .

- Supongamos que  $a_0 = 0$ . Si  $f \leq 0$  entonces  $u$  alcanza su máximo en la frontera de  $Q_T$  y si  $f \geq 0$  entonces  $u$  alcanza su mínimo en la frontera de  $Q_T$ . En particular si  $a_0, f \geq 0$  y  $u_0 \geq 0$  entonces  $u \geq 0$  en  $\bar{\Omega} \times [0, T]$ .
- (Principio de Hoft) Supongamos  $f = 0$  y que existen  $x_0 \in \partial\Omega$ ,  $t_0 \in (0, T)$  tales que  $u(x, t_0) < u(x_0, t_0)$  para todo  $x \in \Omega$ .

Si  $u$  es derivable en  $x_0$  y  $a_0 = 0$ , o si  $u(x_0, t_0) = 0$  tenemos que  $\frac{\partial u}{\partial n}(x_0, t_0) > 0$ .

- Para la ecuación de la temperatura con  $f = 0$  y  $a_0 = 0$  si  $u_0 \geq 0$  y  $u_0 \neq 0$  entonces la solución verifica que  $u(x, t) > 0, \forall x \in \Omega, \forall t > 0$ . Es decir que una pequeña perturbación inicial se distribuye inmediatamente en todo el dominio, propagación de la temperatura a velocidad infinita.

### 4.0.2. Descomposición de dominios

Si definimos  $u_i = u|_{\Omega_i}$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\forall t > 0$ , una formulación de los dominios del problema (4.1) es la siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_i}{\partial t} - \mathcal{L}u_i = f \quad \text{en } Q_{T,i} = \Omega_i \times (0, T), \quad i = 1, 2 \\ u = 0 \quad \text{en } \partial\Omega_i \cap \partial\Omega \times (0, T), \quad i = 1, 2 \\ u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{en } \Omega \\ u_1 = u_2 \quad \text{en } \Gamma = \bar{\Omega}_1 \cap \bar{\Omega}_2 \\ \frac{\partial u_1}{\partial n_L} = \frac{\partial u_2}{\partial n_L} \quad \text{en } \Gamma \end{array} \right. \quad (4.14)$$

con

$$\frac{\partial v}{\partial n_L} = \sum_{i,j=1}^d a_{i,j} \frac{\partial v}{\partial x_j} n_i, \quad n_i \text{ componente } i \text{ de la normal } n_L. \quad (4.15)$$

La forma débil de esta formulación es la siguiente:  
encontrar  $u_i \in L^2(0, T; H_{\partial\Omega \cap \partial\Omega_i}^1(\Omega_i) \cap C^2([0, T]; L^2(\Omega_i)))$ ,  $i = 1, 2$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t}(u_1, v_1)_1 + a_1(u_1, v_1) = (f, v_1)_1 \quad \forall v_1 \in H_0^1(\Omega_1) \\ u_1 = u_2 \quad \text{en } \Gamma \\ \frac{\partial}{\partial t}(u_2, v_2)_2 + a_2(u_2, v_2) = (f, v_2)_2 \quad \forall v_2 \in H_0^1(\Omega_2) \\ \frac{\partial}{\partial t}(u_2, \mathcal{R}_2\mu)_2 + a_2(u_2, \mathcal{R}_2\mu) = (f, \mathcal{R}_2\mu)_2 + (f, \mathcal{R}_1\mu)_1 - \frac{\partial}{\partial t}(u_1, \mathcal{R}_1\mu)_1 - a_1(u_1, \mathcal{R}_1\mu) \quad \forall \mu \in \Lambda. \end{array} \right. \quad (4.16)$$

Consideremos ahora una semidiscretización en el espacio, continua en la variable tiempo, usando el método de Galerkin, más precisamente en elementos finitos.

Sea  $\mathcal{T}_h$  una triangulación de  $\Omega$  tal que  $\cup_{T \in \mathcal{T}_h} T = \Omega_h \subset \Omega$  (Si  $\Omega$  es un dominio poligonal, para  $h$  suficientemente chico se puede obtener  $\Omega_h = \Omega$ ).

Sean:

$$V_h(\Omega_h) = \{p \in C^0(\Omega_h) : p|_T \in \mathbb{P}_1(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\} \quad \text{y} \quad V_h^0(\Omega_h) = V_h(\Omega_h) \cap H_0^1(\Omega_h).$$

El problema semidiscreto se escribe: dados  $f \in L^2(Q_T)$  y  $u_{h,0} \in V_h^0$  (aproximación de  $u_0$ ) encontrar  $u_h(t) \in V_h^0$ ,  $\forall t \in (0, T)$  tal que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}(u_h(t), v_h) + a(u_h, v_h) = (f(t), v_h), \quad \forall v_h \in V_h^0 \\ u_h(0) = u_{h,0}, \quad \text{en } \Omega \end{array} \right. \quad (4.17)$$

Considerando una base de  $V_h^0$ ,  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_{N_h}\}$ , obtenemos un sistema de ecuaciones diferenciales.

Si:

$$u_h(t) = \sum_{j=1}^{N_h} \xi_j(t) \varphi_j \quad \text{y} \quad u_{0,h} = \sum_{j=1}^{N_h} \xi_{0,j} \varphi_j \quad (4.18)$$

el problema (4.17) se presenta de la manera siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} M \frac{d}{dt} \xi(t) + A \xi(t) = f(t) \\ \xi(0) = \xi_0 \end{array} \right. \quad (4.19)$$

donde  $\xi(t) = \{\xi_1(t), \dots, \xi_{N_h}(t)\}$ ,  $\xi_0 = \{\xi_{0,1}, \dots, \xi_{0,N_h}\}$  y  $f(t) = \{f_1(t), \dots, f_{N_h}(t)\}$  con  $f_i(t) = (f(t), \xi_i)$ . Los coeficientes de las matrices  $M$  y  $A$  están definidos de la manera siguiente:

- $M_{i,j} = (\xi_i, \xi_j)$
- $A_{i,j} = a(\xi_j, \xi_i)$

Recordamos las definiciones de los espacios de aproximación en los subdominios:

- $V_{i,h}(\Omega_{i,h}) = \{p \in C^0(\Omega_{i,h}) : p|_T \in \mathbb{P}_1(T) \ \forall T \in \mathcal{T}_{i,h}\}$ ,
- $V_{i,h}^0(\Omega_{i,h}) = V_{i,h}(\Omega_{i,h}) \cap H_0^1(\Omega_{i,h})$ ,
- $V_{i,h}^*(\Omega_{i,h}) = \{p \in V_{i,h}(\Omega_{i,h}) : p = 0 \text{ en } \partial\Omega_h \cap \partial\Omega_{i,h}\}$ ,

por otra parte, en la práctica consideramos una aproximación  $\mu_h \in \mathbb{P}_1$  de  $\mu \in \Lambda$ . Obtenemos el espacio de aproximación  $V_{\Gamma,h}^0$ . Si  $\{\gamma_1, \dots, \gamma_{N_\Gamma}\}$  es una base en la cual representamos los elementos de  $V_{\Gamma,h}^0$  podemos escribir:

$$\mu_h(x) = \sum_{j=1}^{N_\Gamma} \mu_{h,j} \gamma_j(x) \quad (4.20)$$

La formulación multidominios del problema semidiscreto (4.19) es la siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } u_{1,h}(t) \in V_{1,h}^* \cap L^2(0, T, V_{1,h}^*) \text{ y } u_{2,h}(t) \in V_{2,h}^* \cap L^2(0, T, V_{2,h}^*) \text{ tal que:} \\ \frac{d}{dt}(u_{1,h}, v_{1,h})_1 + a_1(u_{1,h}, v_{1,h}) = (f, v_{1,h})_1 \quad \forall v_{1,h} \in V_{1,h}^0(\Omega_{1,h}) \\ u_{1,h} = u_{2,h} \quad \text{en } \Gamma_h \\ \frac{d}{dt}(u_{2,h}, v_{2,h})_2 + a_2(u_{2,h}, v_{2,h}) = (f, v_{2,h})_2 \quad \forall v_{2,h} \in V_{1,h}^0(\Omega_{1,h}) \\ \frac{d}{dt}(u_{2,h}, \mathcal{R}_{2,h}\mu_h)_2 + a_2(u_{2,h}, \mathcal{R}_{2,h}\mu_h) = (f, \mathcal{R}_{2,h}\mu_h)_2 + (f, \mathcal{R}_{1,h}\mu_h)_1 \\ - \frac{d}{dt}(u_{1,h}, \mathcal{R}_{1,h}\mu_h)_1 - a_1(u_{1,h}, \mathcal{R}_{1,h}\mu_h) \quad \forall \mu_h \in V_{\Gamma,h}^0 \end{array} \right. \quad (4.21)$$

Donde  $\mathcal{R}_{1,h} : V_{\Gamma,h}^0 \rightarrow V_{1,h}^*(\Omega_{1,h})$  y  $\mathcal{R}_{2,h} : V_{\Gamma,h}^0 \rightarrow V_{2,h}^*(\Omega_{2,h})$  son operadores de prolongación o extensión del valor de la función definida en el borde (frontera)  $\Gamma_h$  a todo el dominio.

Podemos elegir dos maneras de calcular las prolongaciones  $\mu_{1,h} = \mathcal{R}_{1,h}\mu_h$  y  $\mu_{2,h} = \mathcal{R}_{2,h}\mu_h$ : la primera es considerar un relevamiento armónico en  $V_{1,h}^*(\Omega_{1,h})$  y  $V_{2,h}^*(\Omega_{1,h})$  respectivamente, es decir la solución de:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta\mu_{i,h} = 0, \text{ en } \Omega_{i,h} \\ \mu_{i,h} = 0, \text{ en } \partial\Omega_h \cap \partial\Omega_{i,h} \\ \mu_{i,h}(x) = \mu_h(x) \text{ en } \Gamma_h \end{array} \right. \quad (4.22)$$

La segunda es simplemente definir:

$$\mathcal{R}_{1,h}\mu_h \text{ en } V_{1,h}^*(\Omega_{1,h}) \text{ tal que } \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{R}_{1,h}\mu_h(x_{j,h}) = \mu(x_{j,h}) \text{ si } x_{j,h} \text{ es un nudo de discretización de } \Gamma_h, \\ \mathcal{R}_{1,h}\mu_h(x_{j,h}) = 0 \text{ si } x_{j,h} \text{ es un nudo de discretización de } \Omega_{i,h}. \end{array} \right. \quad (4.23)$$

La resolución del sistema diferencial (4.21) nos conduce a una discretización en la variable tiempo. Dos opciones bien diferentes son exploradas en la literatura, una clásica que consiste a efectuar la descomposición geométrica de dominios y avanzar con un paso de tiempo similar en cada sub-dominio. La segunda llamada waveform, consiste a considerar un paso de tiempo diferente en cada subdominio e implementar una transmisión de datos en la frontera por interpolación, un poco a la manera de los métodos multigrillas.

### 4.0.3. Método clásico

Como anunciamos en la sección precedente el método clásico consiste en discretizar en la variable tiempo el sistema: dados  $f \in L^2(Q_T)$  y  $u_{h,0} \in V_h^0$  (aproximación de  $u_0$ ) encontrar  $u_h(t) \in V_h^0$ ,  $\forall t \in (0, T)$  tal que:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(u_h(t), \varphi_j) + a(u_h, \varphi_j) = (f(t), \varphi_j), \forall \varphi_j, j = 1, \dots, N_h \\ u_h(0) = u_{h,0}, \text{ en } \Omega \end{cases} \quad (4.24)$$

Si aplicamos un esquema de discretización en la variable tiempo implícito se obtiene una secuencia de funciones  $u_h^n \in V_h^0$ , aproximación de  $u(t^n, x)$ , que es la solución en el tiempo  $t^n$ .

$$\begin{cases} \frac{1}{\Delta t^n}((u_h^n, \varphi_j) - (u_h^{n-1}, \varphi_j)) + a(u_h^n, \varphi_j) = (f(t^n), \varphi_j), \forall \varphi_j, j = 1, \dots, N_h \\ u_h^0 = u_{h,0}, \text{ en } \Omega_h \end{cases} \quad (4.25)$$

donde  $\Delta t^n$  es el paso de discretización de la variable tiempo y  $t^n = t^{n-1} + \Delta t^n$ . Si  $u_h^n \in V_h^0$  el esquema implícito es de orden uno en la variable tiempo y dos en la variable espacio. Más aún este esquema es estable sin condiciones sobre la magnitud del paso de tiempo  $\Delta t$ .

El esquema de discretización en la variable tiempo implícito es incondicionalmente estable en norma  $L^2$  y estable en norma  $L^\infty$  si  $\frac{\delta t}{h^2} \leq 1$ . Por otro lado verifica el principio del máximo discreto, es decir que si  $u_h^0 \geq 0$  y  $f \geq 0$  entonces  $u_h^n \geq 0, \forall n$ .

Ahora definimos la forma bilineal  $a^t(u, v)$  de la manera siguiente:

$$a^t(u, v) = (u, v) + \Delta t a(u, v), \quad (4.26)$$

y el segundo miembro:

$$g(t, u, v) = (u, v) + \Delta t f(t, v). \quad (4.27)$$

El sistema (4.25) podemos reescribirlo de la forma:

$$\begin{cases} a^t(u_h^n, \varphi_j) = g(t^n, u_h^{n-1}, \varphi_j) \forall \varphi_j, j = 1, \dots, N_h, \\ u_h^0 = u_{h,0}, \text{ en } \Omega_h \end{cases} \quad (4.28)$$

Para resolver el sistema (4.25) a cada paso de tiempo introducimos un método de descomposición de dominios de Schwarz. Para comenzar consideramos a cada paso de tiempo una descomposición geométrica de dominios con solapamiento del dominio  $\Omega_h$ . Podemos considerar una descomposición que será la misma a cada paso de tiempo como representado en la figura (4.1) o una descomposición adaptada a cada paso de tiempo como la representada en la figura (4.3).

Consideramos una discretización del tiempo  $\{t^n\}_n$  y una secuencia  $\Delta t^n$  tal que  $t^0 = 0$ ,  $t^n = t^{n-1} + \Delta t^n$  y  $T = \sum_{n=1}^{T_h} \Delta t^n$ . Si  $\Omega_{i,h}^n, i = 1, \dots, m_n$  es una descomposición de dominios con solapamiento en el paso de tiempo  $n$ , es decir que  $\Omega_h = \cup_{i=1}^{m_n} \Omega_{i,h}^n$  y se obtiene el algoritmo siguiente:

1 Sea  $u_h^0 \in V_h^0$  una aproximación de  $u_0$



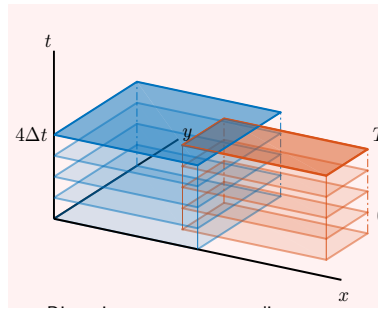


Figura 4.1: descomposición de dominios uniforme en tiempo

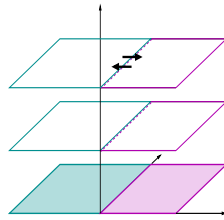


Figura 4.2: descomposición de dominios uniforme en tiempo, transmisión

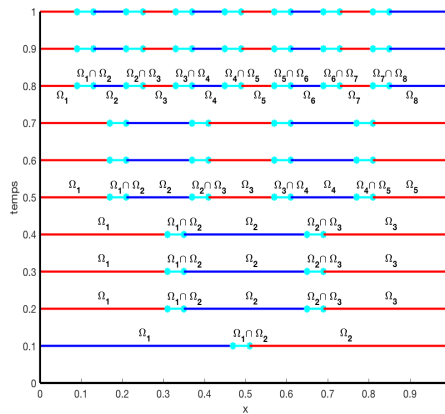


Figura 4.3: descomposición de dominios no-uniforme en tiempo

2 Para  $n = 1, \dots, T_h$  resolvemos (4.25), es decir:

Sea  $u_h^{0,n} = u_h^{n-1}$ .

Para  $l = 1, \dots$ , hasta la convergencia del método de descomposición de dominios:

a) Para  $i = 1, \dots, m_n$  resolvemos el problema:

Calcular  $w_i^l \in V_{i,h}^0$  solución del sistema:

$$a^t(w_i^l, \varphi_{i,j}) = g(t^n, u_h^{n-1}, \varphi_{i,j}) - a^t(u_h^{l-1}, \varphi_{i,j}) \quad \forall \varphi_{i,j}, j = 1, \dots, N_{i,h}, \quad (4.29)$$

b)  $u_h^{l+1,n} = u_h^{l,n} + \sum_{i=1}^{m_n} \tilde{w}_i^l$

Si  $l^*$  es el índice para el cual la iteración del método de descomposición de dominios para:  $u_h^n = u_h^{l^*,n}$ .

Las funciones  $\varphi_{i,j}$ ,  $j = 1, \dots, N_{i,h}$  son la base de  $V_{i,h}^0$ , que es de dimensión  $N_{i,h}$ . Las funciones  $\tilde{w}_i^l$  son la extensión por cero de  $w_i^l \in V_{i,h}^0$ .

La convergencia de este algoritmo reposa fundamentalmente en la convergencia del algoritmo de Schwarz, que es una conclusión del carácter elíptico de  $a^t(u, v)$ .

#### 4.0.4. Ejemplo numérico

Consideremos el caso siguiente:

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) = u''(x, t) + \mu |u(x, t)|^p + f(x, t) & \text{en } ]0, 1[ \times ]0, T], \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0 & \text{en } ]0, 1[ \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 & \text{en } ]0, T], \end{cases}$$

donde  $f(x, t) = 100t(\delta_{0,5} + \delta_{0,8} + \delta_{0,2})$ , es una función fuente con soporte puntual. La potencia  $p = 4$  y  $\mu = 1200$ . La condición inicial está dada por la función  $u_0(x) = 0,01x(1 - x)$ .

Aplicando una discretización en elementos finitos de tipo  $\mathbb{P}_1$  y una discretización implícita en la variable temporal obtenemos:

$$\frac{1}{\tau_n} M (U_h^{n+1} - U_h^n) + A_h(U_h^{n+1}) = \tilde{F}(U_h^{n+1}) + \tilde{f}^{n+1}. \quad (4.30)$$

- $\tau_n$  es el paso de tiempo.
- $M = \left( \int_{\Omega} \psi_i \psi_j dx \right)_{i,j=1:N_h}$ ,
- $A_h = \left( \int_{\Omega} \nabla \psi_i \nabla \psi_j dx \right)_{i,j=1:N_h}$ .
- $U_h^n = (U_1^n, U_2^n, \dots, U_{N_h}^n)^T = (u_h^n(x_1), u_h^n(x_2), \dots, u_h^n(x_{N_h}))^T \simeq U_h(t^n)$ .
- $\tilde{F}(U_h^n) = \left( \int_{\Omega} |u_h^n|^p \psi_j dx \right)_{j=1:N_h}$ .
- $\tilde{f}^n = \tilde{f}(t^n) = \left( \int_{\Omega} f(t^n) \psi_j dx \right)^T$ .
- $\{\psi_i\}$ , ( $i = 1, \dots, N_h$ ), es la base de Lagrange de los elementos  $\mathbb{P}_1$ .

A cada paso de tiempo tenemos que resolver el problema en dimensión finita siguiente:

$$\frac{1}{\tau_n} M U_h^{n+1} + A_h U_h^{n+1} - \tilde{F}(U_h^{n+1}) = \frac{1}{\tau_n} M U_h^n + \tilde{f}^{n+1}.$$

Este sistema es no lineal: aplicamos un método de Newton para resolverlo. A cada iteración del método de Newton aplicamos el método de descomposición de dominios que nos garantiza la existencia y unicidad de la iteración de Newton. Calculamos hasta el tiempo final  $T = 4$ . El número de puntos de discretización es  $N = 300$ , el paso de tiempo fijado es  $\tau = 0,2$ .

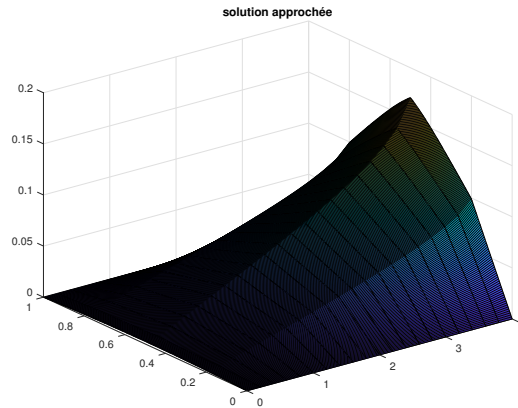


Figura 4.4: 20 pasos de tiempo

$n$	1	2	...	19	20
# Iter-Newton	2	2	...	3	4
$\ \delta_h\ _\infty$	$7,9e^{-10}$	$2,7e^{-7}$	...	$9,53e^{-5}$	$9,8e^{-5}$
# sd	1	1	...	2	3

Cuadro 4.1: Comportamiento del algoritmo de cálculo de la solución numérica.

### 4.0.5. Método Waveform

El algoritmo waveform fue introducido por primera vez por Picard [15] y Lindelöf [11] en el siglo 19. Se trata de una paralelización en el tiempo para la simulación de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias o de ecuaciones con derivadas parciales dependientes del tiempo. A diferencia de la estrategia utilizada en los métodos clásicos de descomposición de dominio que consisten en discretizar la variable tiempo, para luego aplicar, un método de descomposición de dominio al problema estático que aparece en cada iteración temporal, el algoritmo waveform consiste en descomponer el dominio en  $\Omega_i$  subdominios y luego, en cada iteración, resolver el problema parabólico en cada  $\Omega_i \times ]0, T]$  independientemente con un paso de tiempo adaptado al subdominio. Entre cada iteración, una comunicación regular de datos en la interfaz entre dos subdominios permite obtener la convergencia del método. Este método está totalmente adaptado a los problemas en los cuales la evolución de la solución no es uniforme en todo el subdominio, por ejemplo en el caso de una explosión puntual de la solución. Este algoritmo se ha aplicado con éxito a una variedad de problemas, tales como los problemas parabólicos en 2007 estudiados por Gander e al. [40], en 2010 por Caetano e al. [23], en 2016 por Ruprecht e al. Para explicar la estrategia del algoritmo waveform, proponemos, como primer paso, aplicar el método de descomposición de dominios al problema inicial unidimensional:

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) - u''(x, t) = f(x, t) & \text{en } Q_T = (0, L) \times (0, T], \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{en } [0, L] \\ u(0, t) = g_1(t) \text{ y } u(L, t) = g_2(t) & \text{en } (0, T], \end{cases} \quad (4.31)$$

La función  $f$  es supuesta acotada en  $Q_T$  y Hölder continua, (existe  $C > 0$  y  $\alpha > 0$  tal que  $|f(x_1, t_1) - f(x_2, t_2)| \leq C\|(x_1, t_1) - (x_2, t_2)\|^\alpha$ ), las condiciones frontera  $g_1(t)$  y  $g_2(t)$  son supuestas continuas por trozos. Con estas hipótesis hay existencia y unicidad de la solución, si  $f = 0$  y  $u_0 = 0$  la solución verifica la estimación siguiente:

$$\|u(x, \cdot)\|_\infty \leq \frac{L-x}{L} \|g_1(t)\|_\infty + \frac{x}{L} \|g_2(t)\|_\infty \quad (4.32)$$

Para introducir el método de descomposición de dominios de Schwarz waveform consideramos la descomposición geométrica con solapamiento ya definida en la sección precedente en una dimensión. Consideramos una descomposición del dominio  $Q_T = (0, L) \times (0, T]$  en dos subdominios  $Q_{T_1} = (0, \beta L) \times (0, T]$  y  $Q_{T_2} = (\alpha L, L) \times (0, T]$  con  $0 < \alpha < \beta < 1$ .

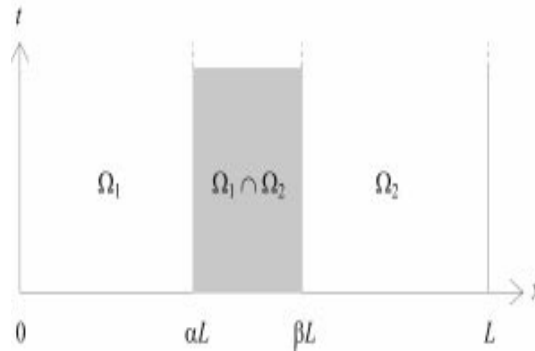


Figura 4.5: descomposición de dominios en dos subdominios, dimensión uno

La solución  $u(x, t)$  de la ecuación (4.31) puede ser obtenida a partir de  $u_1(x, t)$  y  $u_2(x, t)$  solución de las ecuaciones:

$$\begin{cases} \partial_t u_1(x, t) - u_1''(x, t) = f(x, t) & \text{en } Q_T = (0, \beta L) \times (0, T], \\ u_1(x, 0) = u_0(x) & \text{en } [0, \beta L] \\ u_1(0, t) = g_1(t) \text{ y } u_1(\beta L, t) = u_2(\beta L, t) & \text{en } (0, T], \end{cases} \quad (4.33)$$

y

$$\begin{cases} \partial_t u_2(x, t) - u_2''(x, t) = f(x, t) & \text{en } Q_T = (\alpha L, L) \times (0, T], \\ u_2(x, 0) = u_0(x) & \text{en } [\alpha L, L] \\ u_2(\alpha L, t) = u_1(\alpha L, t) \text{ y } u_2(L, t) = g_2(t) & \text{en } (0, T], \end{cases} \quad (4.34)$$

La solución del problema original  $u(x, t)$  (monodominio) es igual a  $u_1(x, t)$  sobre  $Q_{T_1}$  y a  $u_2(x, t)$  sobre  $Q_{T_2}$ .

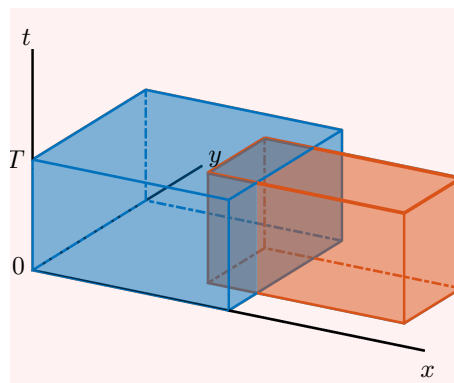


Figura 4.6: descomposición de dominios waveform

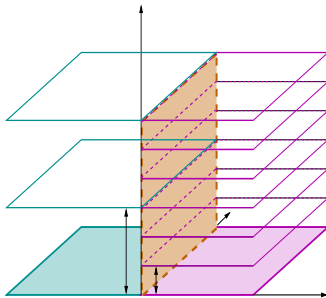


Figura 4.7: Descripción del algoritmo waveform

Deducimos un algoritmo iterativo, dada la condición inicial  $u_0$ , para  $l = 1, \dots$  hasta la convergencia del método de Schwarz, vamos a resolver de manera independiente, es decir con pasos de tiempo eventualmente diferentes, los problemas siguientes:

$$\begin{cases} \partial_t u_1^{l+1}(x, t) - u_1^{l+1}{}''(x, t) = f(x, t) & \text{en } Q_T = (0, \beta L) \times (0, T], \\ u_1^{l+1}(x, 0) = u_0(x) & \text{en } [0, \beta L] \\ u_1^{l+1}(0, t) = g_1(t) \text{ y } u_1^{l+1}(\beta L, t) = u_2^l(\beta L, t) & \text{en } (0, T], \end{cases} \quad (4.35)$$

y

$$\begin{cases} \partial_t u_2^{l+1}(x, t) - u_2^{l+1}{}''(x, t) = f(x, t) & \text{en } Q_T = (\alpha L, L) \times (0, T], \\ u_2^{l+1}(x, 0) = u_0(x) & \text{en } [\alpha L, L] \\ u_2^{l+1}(\alpha L, t) = u_1^l(\alpha L, t) \text{ y } u_2^{l+1}(L, t) = g_2(t) & \text{en } (0, T], \end{cases} \quad (4.36)$$

**Observación 7.** La dificultad de este algoritmo es conectar las soluciones  $u_i^l$  en las fronteras de los subdominios. Hassan y al [43, 42] presentaron un método que implica una corrección a partir de una malla fina, calculando los valores medios de los datos en las interfaces. Es posible también calcular una interpolación lineal de la solución para obtener valores aproximados de la solución en la malla más fina en la variable temporal a partir de datos en una malla más grosera en la misma variable o viceversa.

**Observación 8.** Basándonos en el trabajo de Gander y al [23], la solución iterativa  $u_i^{l+1}$ , solución del problema (4.35) y (4.36), converge a la solución del problema (4.31).

Los errores  $d^l(x, t) = u_1^l(x, t) - u_1(x, t)$  y  $e^l(x, t) = u_2^l(x, t) - u_2(x, t)$  verifican las estimaciones siguientes en la interfaces  $x = \alpha L$  y  $x = \beta L$ :

$$\begin{aligned} \|d^{l+2}(\alpha L, \cdot)\|_\infty &\leq \frac{\alpha(1-\beta)}{\beta(1-\alpha)} \|d^l(\alpha L, \cdot)\|_\infty \\ \|e^{l+2}(\beta L, \cdot)\|_\infty &\leq \frac{\alpha(1-\beta)}{\beta(1-\alpha)} \|e^l(\beta L, \cdot)\|_\infty \end{aligned} \quad (4.37)$$

Si definimos la norma siguiente:

$$\|g(\cdot, \cdot)\|_\infty = \sup_{[0, L]} \|g(x, \cdot)\|_\infty \quad (4.38)$$

obtenemos que:

$$\begin{aligned} \|d^{l+2}(\cdot, \cdot)\|_\infty &\leq \left(\frac{\alpha(1-\beta)}{\beta(1-\alpha)}\right)^l \|e^0(\beta L, \cdot)\|_\infty \\ \|e^{l+2}(\cdot, \cdot)\|_\infty &\leq \left(\frac{\alpha(1-\beta)}{\beta(1-\alpha)}\right)^l \|d^0(\alpha L, \cdot)\|_\infty \end{aligned} \quad (4.39)$$

**Caso semidiscreto**

Si efectuamos una discretización en diferencias finitas en la variable  $x$  clásica de orden dos, considerando  $N$  puntos de aproximación con un paso  $\delta x = \frac{L}{N+1}$  obtenemos un sistema diferencial ordinario:

$$\frac{dU}{dt}(t) = A_N U(t) + F(t), \quad 0 < t \leq T \quad (4.40)$$

$$U(0) = U_0 \quad (4.41)$$

donde

$$A_N = \frac{1}{\delta_x^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & \cdots \\ - & - & - & - & - \\ 0 & \cdots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad (4.42)$$

$$F(t) = \begin{pmatrix} f(\delta_x, t) + \frac{1}{\delta_x^2} g_1(t) \\ f(2\delta_x, t) \\ \cdots \\ \cdots \\ f((N-1)\delta_x, t) \\ f(N\delta_x, t) + \frac{1}{\delta_x^2} g_2(t) \end{pmatrix} \quad (4.43)$$

$$U_0 = \begin{pmatrix} u_0(\delta_x) \\ u_0(2\delta_x) \\ \cdots \\ \cdots \\ u_0((N-1)\delta_x) \\ u_0(N\delta_x) \end{pmatrix} \quad (4.44)$$

y

$$U(t) \cong \begin{pmatrix} u(\delta_x, t) \\ u(2\delta_x, t) \\ \cdots \\ \cdots \\ u((N-1)\delta_x, t) \\ u(N\delta_x, t) \end{pmatrix} \quad (4.45)$$

A continuación resolvemos esta ecuación diferencial en cada subdominio con un paso de tiempo  $\delta_{y,i}$  adaptado al comportamiento de la ecuación en el subdominio.

El sistema semi-discreto verifica un principio del máximo discreto. Si  $f \equiv 0$ ,  $g_1(t), g_2(t) \geq 0$ ,  $\forall t > 0$  y  $u_0(x) \geq 0$  entonces  $U(t) \geq 0$ .

La solución discreta verifica la estimación siguiente:

$$\|U(\cdot)_j\|_\infty \leq \frac{N+1-j}{N+1} \|g_1(\cdot)\|_\infty + \frac{j}{N+1} \|g_2(\cdot)\|_\infty, \quad 1 \leq j \leq N \quad (4.46)$$

Con respecto al error obtenemos la misma estimación que en (4.39).

Vamos ahora a considerar la versión multidominios del algoritmo waveform Schwarz. La descomposición geométrica en  $m$  subdominios es de la forma  $Q_{T,i} = (\alpha_i L, \beta_i L) \times (0, T]$  para  $i = 1, \dots, m$  con  $\alpha_1 = 0$ ,  $\beta_m = 1$  y  $\alpha_{i+1} \leq \beta_i$ ,  $i = 1, \dots, m-1$ .

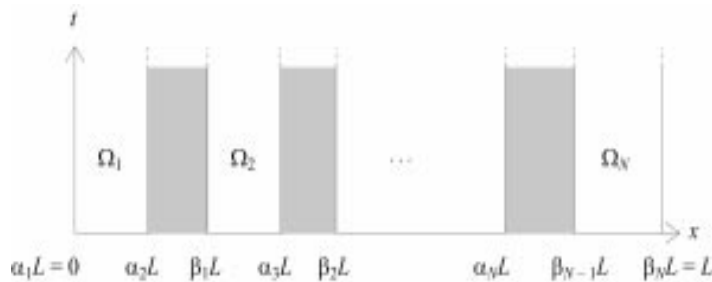


Figura 4.8: Descomposición multidominio con solapamiento

La solución  $u(x, t)$  en  $Q_T$  sobre cada subdominio  $Q_{T,i}$  es igual a la solución  $u_i(x, t)$  de la ecuación:

$$\begin{cases} \partial_t u_i(x, t) - u_i''(x, t) = f(x, t) & \text{en } Q_{T,i} \\ u_i(x, 0) = u_0(x) & \text{en } [\alpha_i L, \beta_i L] \\ u_i(\alpha_i L, t) = u_{i-1}(\alpha_i L, t) \text{ y } u_i(\beta_i L, t) = u_{i+1}(\beta_i L, t) & \text{en } (0, T], \end{cases} \quad (4.47)$$

con  $u_0(0, t) = g_1(t)$  y  $u_{N+1}(L, t) = g_2(t)$  para  $t \in (0, T]$ .

En consecuencia la iteración de Schwarz waveform puede enunciarse de la manera siguiente:

**Algoritmo 4.0.1.** (*Algoritmo Waveform*)

1) para  $l = 1, \dots, m$  (número de subdominios)

a) para  $t = \Delta t, \dots, T$

inicializar  $u_i^0(x, t)$ ,  $x \in \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j$

fin de la iteración a).

fin de la iteración 1)

2) Para  $k = 1, \dots$ , convergencia de la iteración Schwarz waveform

a) para  $l = 1, \dots, m$  (número de subdominios)

para  $t = \Delta t, \dots, T$

$$\begin{cases} \partial_t u_l^{k+1}(x, t) - u_l^{k+1}{}''(x, t) = f(x, t) & \text{en } Q_{T,l} \\ u_l^{k+1}(x, 0) = u_0(x) & \text{en } [\alpha_l L, \beta_l L] \\ u_l^{k+1}(\alpha_l L, t) = u_{l-1}^l(\alpha_l L, t) \text{ y } u_l^{k+1}(\beta_l L, t) = u_{l+1}^l(\beta_l L, t) & \text{en } (0, T], \end{cases} \quad (4.48)$$

fin de la iteración en  $t$

para  $t = \Delta t, \dots, T$

Transmisión de datos frontera de cada  $u_l^{k+1}(x, t)$

fin de la iteración en  $t$

fin de la iteración en  $l$

fin de la iteración en  $k$

Cada problema  $i = 1, \dots, m$  es resuelto con una discretización en tiempo adaptada, y eventualmente diferente al subdominio vecino.

El cálculo del error no es similar al caso de dos subdominios, pero un poco más complicado, ver al artículo de Gander y Stuart [8]

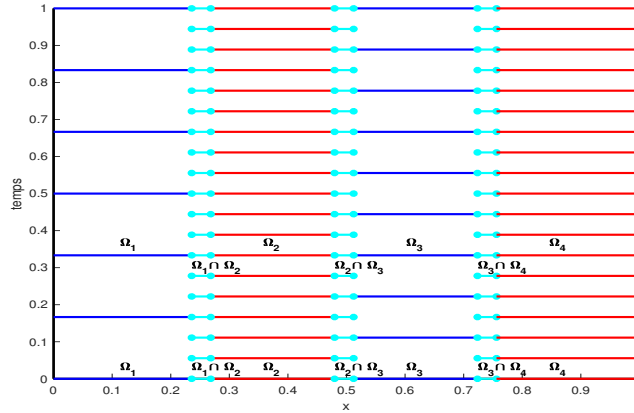


Figura 4.9: Descripción del algoritmo waveform multidominio

**Ejemplo numérico**

Consideramos en este párrafo la ecuación de Chipot-Weissler

$$\begin{cases} u_t(x, t) - \Delta u(x, t) + |\nabla u(x, t)|^q = |u(x, t)|^p & \text{in } Q_T, \\ u(x, t) = 0 & \text{on } \Sigma_T, \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0 & \text{on } \Omega \end{cases}$$

Suponemos que  $p = 2, q = 1, 3$ . En este caso Chipot-Weissler [2] demostraron que la solución explota en tiempo finito, es decir existe únicamente en un intervalo de tiempo  $(0, T_{max})$  donde  $T_{max} < \infty$ , y  $\lim_{t \rightarrow T_{max}} \|u\|_{\infty} = \infty$ . Consideramos la condición inicial  $u_0 = 10^3 \sin(\pi x), f = 0$ . Fijamos a priori el número de subdominios a  $m = 3$ . El paso de tiempo es fijado a  $\tau_1 = \tau_3 = 1.e^{-5}$  en los dominios dos y tres y  $\tau_2 = 0,5e^{-5}$  en el dominio dos. El resultado calculado al tiempo  $T_{max} = 1.e^3$ .

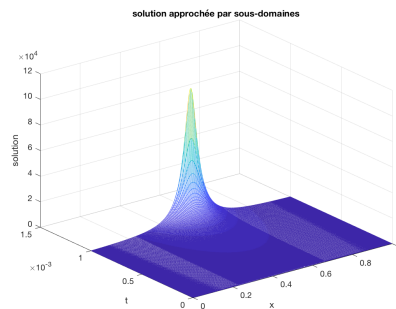


Figura 4.10: Solución numérica



# Capítulo 5

## Apéndice

### 5.1. Condicionamiento de sistemas lineales

#### 5.1.1. Introducción

El condicionamiento de una matriz es una noción que permite de estudiar la sensibilidad de un sistema lineal a la perturbación de los datos. Más claramente la pregunta es: cuál será el error cometido cuando se resuelve un sistema lineal a causa del redondeo de los datos, por ejemplo en la representación de los reales o en el cálculo numérico de coeficientes de la matriz o del segundo miembro.

Dado un sistema lineal:

$$Au = b \quad (5.1)$$

Queremos estimar el error  $\delta u$  tal que:

$$(A + \delta A)(u + \delta u) = b + \delta b \quad (5.2)$$

en función de las perturbaciones  $\delta A$  y  $\delta b$ .

Asumimos en el resto de la sección que  $A \in M_n(\mathbb{R})$  es una matriz cuadrada con  $n \times n$  coeficientes reales y una matriz invertible.

#### 5.1.2. Norma de una matriz

Consideramos aquí las normas matriciales inducidas por una norma vectorial definida sobre  $\mathbb{R}^n$ .

Ejemplos de normas vectoriales sobre  $\mathbb{R}^n$ ,

- $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$
- $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$
- $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$ .

**Definición 5.1.1.** Llamamos norma matricial inducida de  $A \in M_n(\mathbb{R})$  el número:

$$\|A\| = \sup\{\|Ax\|; x \in \mathbb{R}^n, \|x\| = 1\}. \quad (5.3)$$

En realidad el supremo es un máximo pues, el conjunto  $C = \{\|x\| = 1\}$  es un conjunto compacto, la aplicación  $x \rightarrow Ax$  es una función continua, entonces el supremo es realizado en un  $x_A \in C$  tal que  $\|A\| = \|Ax_A\|$ , es decir que el supremo es un máximo alcanzado en el conjunto.

Es inmediato demostrar que  $A \rightarrow \|A\|$  (ejercicio) es una norma matricial. Es decir:

- a)  $\|A\| \geq 0 \quad \forall A \in M_n(\mathbb{R})$
- b)  $\|A\| = 0 \iff A = \bar{0}$
- $\|kA\| = |k|\|A\|$ .
- $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ .
- $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ .

La definición (5.3) es equivalente a la definición siguiente:

$$\|A\| = \max\left\{\frac{\|Ax\|}{\|x\|}; x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\right\}. \quad (5.4)$$

demostración en ejercicio.

**Definición 5.1.2.** Sea  $A \in M_n(\mathbb{R})$  una matriz invertible. Llamamos radio espectral de la matriz  $A$  el número  $\rho(A) = \max\{|\lambda|; \lambda \in \mathbb{C}, \lambda \text{ valor propio de } A\}$ .

Ejemplos de normas inducidas:

- La norma matricial inducida por la norma vectorial infinito es:

$$\|A\|_\infty = \max_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

- La norma matricial inducida por la norma vectorial una es:

$$\|A\|_1 = \max_{j \in \{1, 2, \dots, n\}} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

- La norma matricial inducida por la norma vectorial euclidiana, 2, es:

$$\|A\|_2 = (\rho(A^t A))^{\frac{1}{2}}$$

en particular, si  $A$  es simétrica,

$$\|A\|_2 = \rho(A)$$

**Teorema 5.1.1.**   ▪ Sea  $\|\cdot\|$  una norma inducida. Entonces:

$$\rho(A) \leq \|A\|, \text{ para todo } A \in M_n(\mathbb{R}) \quad (5.5)$$

- Sea  $A \in M_n(\mathbb{R})$  y  $\epsilon > 0$ , entonces existe una norma sobre  $\mathbb{R}^n$  que depende de  $A$  y  $\epsilon$  tal que la norma inducida sobre  $M_n(\mathbb{R})$ , llamada  $\|A\|_{A,\epsilon}$  que verifica  $\|A\|_{A,\epsilon} \leq \rho(A) + \epsilon$

Demonstración, ver [17].

**Teorema 5.1.2.** Sea  $B$  una matriz de  $M_N(\mathbb{R})$ . Las siguientes proposiciones son equivalentes:

- 1  $\lim_{k \rightarrow +\infty} B^k = 0$ .
- 2  $\lim_{k \rightarrow +\infty} B^k X = 0$ .
- 3  $\rho(B) < 1$ .
- 4 Existe una norma inducida tal que  $\|B\| < 1$

Ejemplo:

Sea la matriz de dimensión  $n \times n$  con coeficientes reales o complejos, tridiagonal:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & & & \\ c & a & b & & \\ & c & a & b & \\ & & & & c & a \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

Notamos  $\lambda$  un valor propio de  $A$  y  $v = (v_1, v_1, \dots, v_n)^t$  el vector propio asociado. Entonces:

$$Av = \lambda v \quad (5.7)$$

Más precisamente:

$$\begin{aligned} (a - \lambda)v_1 + bv_2 &= 0 \\ cv_1 + (a - \lambda)v_2 + bv_3 &= 0 \\ &\dots = 0 \\ cv_{j-1} + (a - \lambda)v_j + bv_{j+1} &= 0 \\ &\dots = 0 \\ cv_{N-1} + (a - \lambda)v_N &= 0 \end{aligned} \quad (5.8)$$

definiendo  $v_0 = v_{N+1} = 0$  podemos rescribir las ecuaciones (5.8) como la recurrencia:

$$cv_{j-1} + (a - \lambda)v_j + bv_{j+1} = 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (5.9)$$

La solución de la recurrencia (5.9) es de la forma:

$$v_j = Bm_1^j + Cm_2^j \quad (5.10)$$

con  $m_1$  y  $m_2$  solución de la ecuación de segundo orden siguiente:

$$c + (a - \lambda)m + bm^2 = 0 \quad (5.11)$$

Pero  $v_0 = v_{N+1} = 0$  entonces:

$$B + C = 0 \quad (5.12)$$

$$Bm_1^{N+1} + Cm_2^{N+1} = 0 \quad (5.13)$$

y en consecuencia:

$$\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{N+1} = 1 = e^{i2s\pi}, \quad s = 1, \dots, N \quad (5.14)$$

que significa:

$$\frac{m_1}{m_2} = e^{i\frac{2s}{N+1}\pi} \quad (5.15)$$

Por otro lado;

$$m_1 m_2 = \frac{c}{b} \quad (5.16)$$

por eliminación en las ecuaciones (5.15) y (5.16) obtenemos que:

$$m_1 = \left(\frac{c}{b}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{s}{N+1}\pi} \quad (5.17)$$

y

$$m_2 = \left(\frac{c}{b}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-i\frac{s}{N+1}\pi} \quad (5.18)$$

de (5.11) obtenemos que:

$$m_1 + m_2 = (\lambda - a)/b \quad (5.19)$$

y en consecuencia:

$$\lambda = a + b \left(\frac{c}{b}\right)^{\frac{1}{2}} (e^{i\frac{s}{N+1}\pi} + e^{-i\frac{s}{N+1}\pi}) \quad (5.20)$$

$$= a + 2b \left(\frac{c}{b}\right)^{\frac{1}{2}} \cos \frac{s}{N+1}\pi = a + 2(bc)^{\frac{1}{2}} \cos \frac{s}{N+1}\pi, \quad s = 1, \dots, N \quad (5.21)$$

Los coeficientes de los vectores propios  $v_s$  anotados  $v_{s,j}$  se pueden explicitar a partir de (5.10), (5.12), (5.17) y (5.18) :

$$v_{s,j} = Bm_1^j - Bm_2^j = B \left(\frac{c}{b}\right)^{\frac{1}{2}j} (e^{i\frac{js}{N+1}\pi} + e^{-i\frac{js}{N+1}\pi}) \quad (5.22)$$

$$= 2iB \left(\frac{c}{b}\right)^{\frac{1}{2}j} \sin \frac{js}{N+1}\pi, \quad j = 1, \dots, N, \quad s = 1, \dots, N \quad (5.23)$$

Es inmediato que  $m_1 \neq m_2$  pues sino  $v_{s,j} = (B - B)m_1^j = 0$  para todo  $j$  y entonces el vector propio  $v_s = \bar{0}$ , lo que es absurdo.

Si ahora consideramos una discretización por diferencias finitas del problema:

$$-u''(x) = f(x), \quad \text{si } (x) \in \Omega = (0, 1) \quad (5.24)$$

$$u(0) = u(1) = 0 \quad (5.25)$$

Si se implementa una discretización uniforme en  $N + 1$  nodos de  $[1, 1]$ , sea  $h = 1/(N + 1)$ . La aproximación discreta del problema (5.28) nos da el sistema lineal siguiente:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & & & -1 & 2 \\ & & & & & & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \dots \\ u_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h^2 f(x_1) \\ h^2 f(x_2) \\ h^2 f(x_3) \\ \dots \\ h^2 f(x_N) \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

Los valores propios se deducen (5.20) cuando  $a = 2$  y  $b = c = -1$ .

$$\lambda_s = 2(1 - \cos(\frac{s}{h}\pi)). \quad (5.27)$$

En el caso  $N = 10$  se obtienen los valores propios siguientes:

$$\sigma(A) = \{0,0810, 0,3175, 0,6903, 1,1692, 1,7154, 2,2846, 2,8308, 3,3097, 3,6825, 3,9190\}$$

y entonces el radio espectral es  $\rho(A) = 3,9190$  que es a priori la norma 2 de la matriz  $A$ .

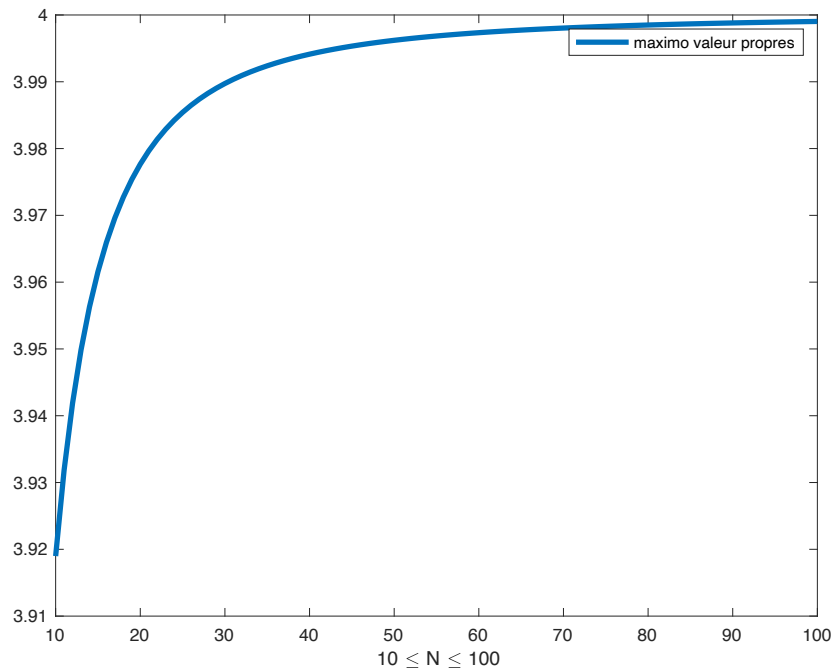


Figura 5.1: Evolución del valor propio máximo en funcion de N, 1d.

Si ahora consideremos un problema similar en dos dimensiones:

$$-\Delta(x, y) = f(x, y), \text{ si } (x, y) \in \Omega = (0, 1) \times (0, 1) \tag{5.28}$$

$$u(x, y) = 0, \text{ si } (x, y) \in \partial\Omega \tag{5.29}$$

Una discretización por diferencias finitas uniforme en  $N + 1$  nodos en las dos direcciones, sea  $h = 1/(N + 1)$ . La aproximación discreta del problema (5.28) nos da la matriz siguiente:

$$A_m = \begin{bmatrix} T_m & -I & 0 & & 0 \\ -I & T_m & -I & & 0 \\ 0 & -I & T_m & -1 & 0 \\ 0 & & & \dots & 0 \\ 0 & & & & -I & T_m \end{bmatrix} \tag{5.30}$$

con  $T_m$  la matriz  $N \times N$ ;

$$T_m = \begin{bmatrix} m & -1 & & & \\ -1 & m & -1 & & \\ & -1 & m & -1 & \\ & & & & \\ & & & & -1 & m \end{bmatrix} \tag{5.31}$$

Con  $m = 4$  obtenemos la matriz de discretización del Laplaciano en un cuadrado con el esquema a cinco puntos clásico.

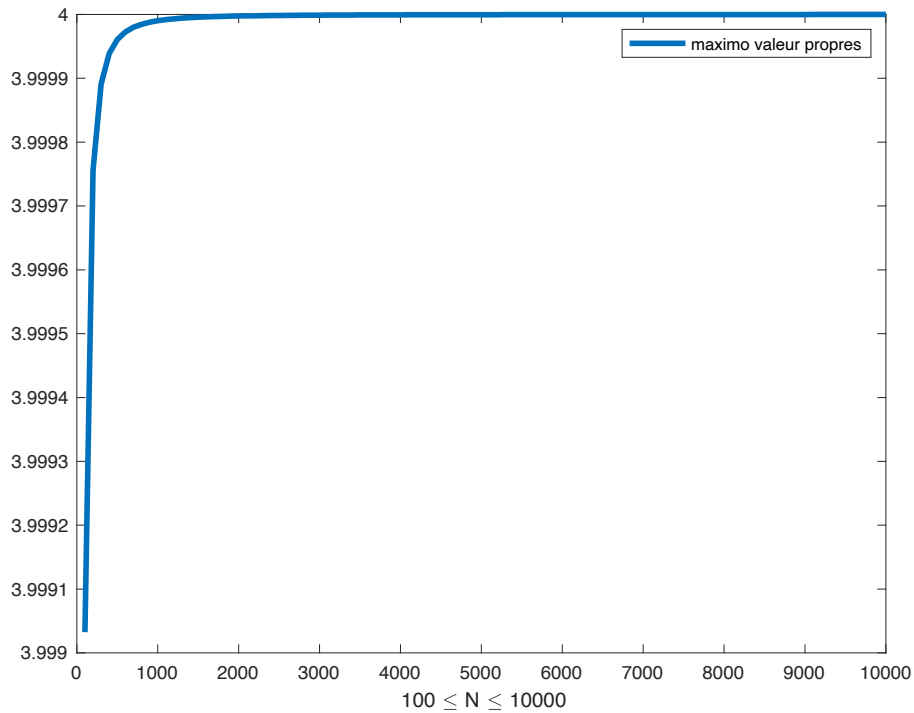


Figura 5.2: Evolución del valor propio máximo en función de N, 1d.

En este particular caso el sistema linear asociado a la discretizacion de (5.28) es el siguiente:

$$\begin{bmatrix} T_4 & -I & 0 & & 0 \\ -I & T_4 & -I & & 0 \\ 0 & -I & T_4 & -I & 0 \\ 0 & & & \dots & 0 \\ 0 & & & & -I & T_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,1} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ u_{N,N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h^2 f(x_1, y_1) \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ h^2 f(x_N, y_N) \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

Los valores propios de la matriz  $A_m$  son reales (la matriz es simétrica) y toman los valores siguientes:

$$\lambda_{p,q} = m - 2 \cos\left(\frac{p}{N+1}\pi\right) - 2 \cos\left(\frac{q}{N+1}\pi\right), \quad 1 \leq p, q \leq N. \quad (5.33)$$

En el caso del laplaciano en dos dimensiones, es decir con  $m = 4$  obtenemos:

$$\lambda_{p,q} = 4 \sin^2\left(\frac{p}{N+1}\pi\right) + 4 \sin^2\left(\frac{q}{N+1}\pi\right). \quad (5.34)$$

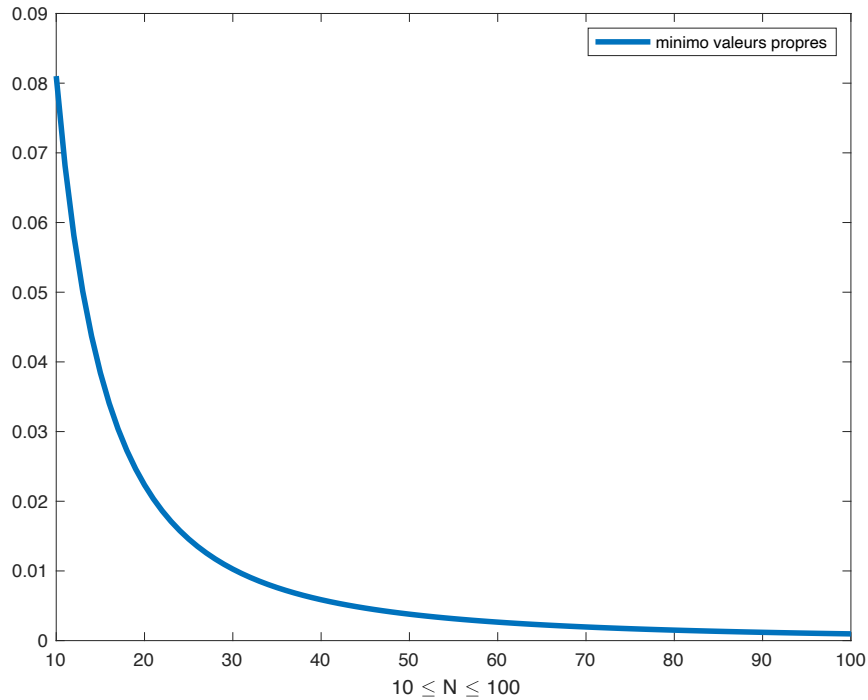


Figura 5.3: Evolución del valor propio mínimo en función de  $N$ , 1d.

### 5.1.3. Condicionamiento de un sistema lineal

Como es señalado en la introducción de la sección buscamos calcular el error a priori, producido cuando resolvemos numéricamente un sistema lineal:

$$Au = b \quad (5.35)$$

Queremos estimar el error  $\delta u$  tal que:

$$(A + \delta A)(u + \delta u) = b + \delta b \quad (5.36)$$

en función de las perturbaciones  $\delta A$  y  $\delta b$ .

Asumimos en el resto de la sección que  $A \in M_n(\mathbb{R})$  es una matriz cuadrada  $n \times n$  con coeficientes reales y una matriz invertible.

**Definición 5.1.3.** Sea  $A \in M_n(\mathbb{R})$  una matriz invertible y  $\|\cdot\|$  una norma inducida definida sobre  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . Llamamos condicionamiento de  $A$  al número real positivo,  $\text{cond}(A)$ :

$$\text{cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\|. \quad (5.37)$$

Esta cantidad tiene algunas propiedades evidentes:

- $\text{cond}(A) \geq 1$ .
- si  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $\text{cond}(\alpha A) = \text{cond}(A)$ .
- si  $A$  et  $B$  son dos matrices invertibles  $\text{cond}(AB) \leq \text{cond}(A)\text{cond}(B)$ .

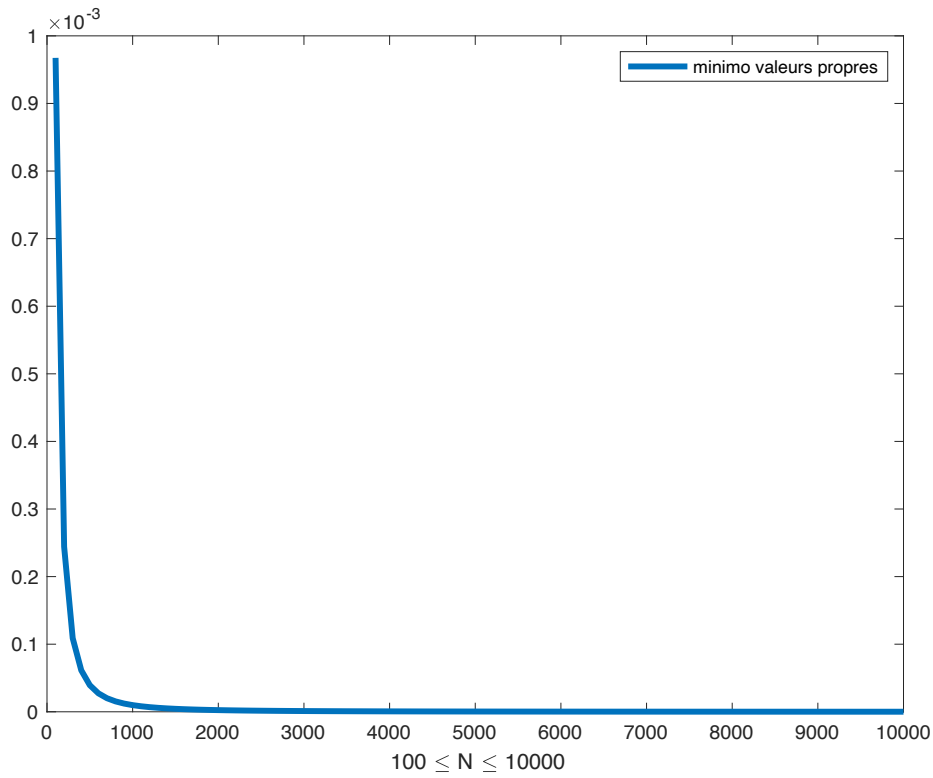


Figura 5.4: Evolución del valor propio mínimo en función de N, 1d.

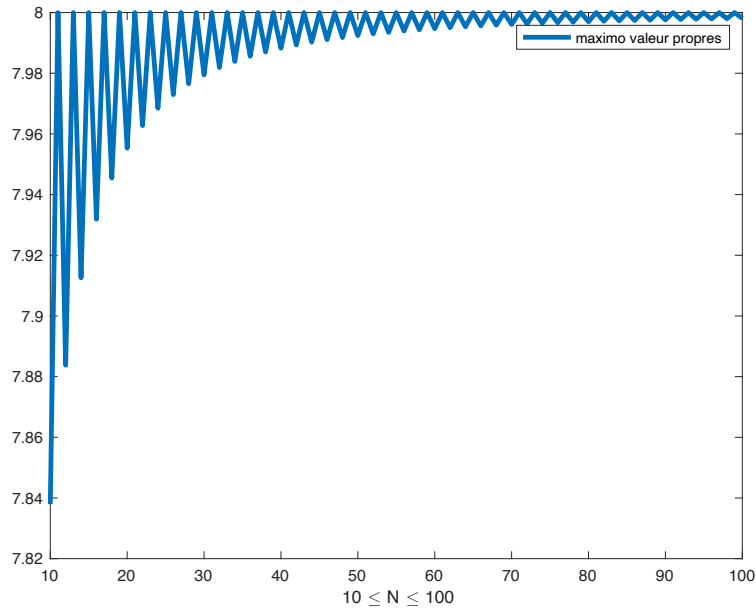


Figura 5.5: Evolución del valor propio máximo en función de N, 2D.

Notamos  $cond_i(A)$  el condicionamiento de la matriz  $A$  con respecto a la norma inducida  $i$ , en particular  $cond_2(A)$  es el condicionamiento de la matriz  $A$  con respecto a la norma matricial inducida por la norma euclidiana en  $\mathbb{R}^n$ .



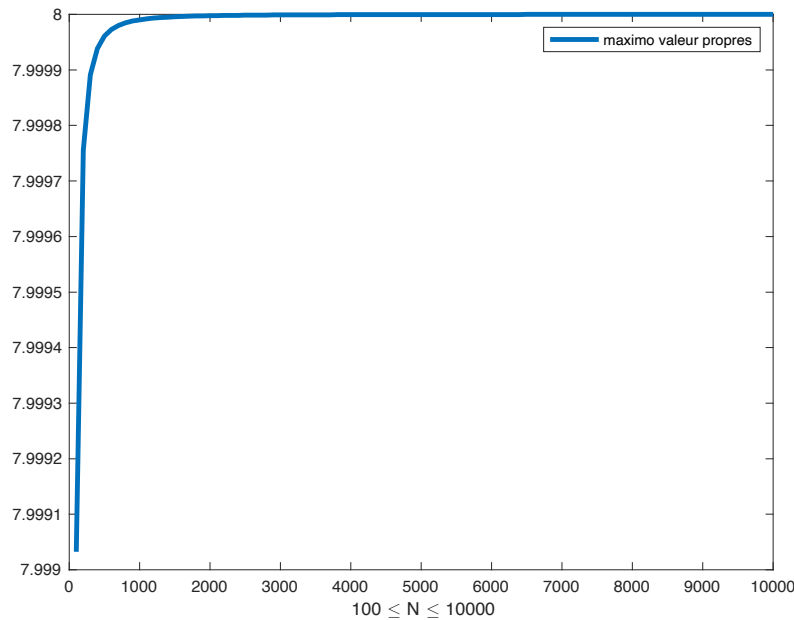


Figura 5.6: Evolución del valor propio máximo en función de N, 2D.

Para el condicionamiento  $cond_2(A)$  se pueden demostrar las propiedades siguientes:

- Si  $A$  es una matriz simétrica definida positiva:

$$cond_2(A) = \sqrt{\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}} \tag{5.38}$$

donde  $\lambda_{max}$  es el mayor valor propio de  $A$  y  $\lambda_{min}$  es el menor valor propio de  $A$ .

- Si  $A$  es simplemente una matriz invertible, definimos  $\sigma_{max}$  el mayor valor propio de la matriz  $A^t A$  y  $\sigma_{min}$  el menor valor propio, se los llama valores singulares de  $A$ . Entonces:

$$cond_2(A) = \sqrt{\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}}}. \tag{5.39}$$

- Si  $A$  y  $B$  son dos matrices definidas positivas:

$$cond_2(A + B) \leq cond_2(A) + cond_2(B). \tag{5.40}$$

Con estas herramientas podemos ahora dar algunas estimaciones del error cometido cuando resolvemos (5.35).

**Proposición 5.1.1.** *Sea  $A \in M_n(\mathbb{R})$  una matriz invertible y  $\|\cdot\|$  una norma inducida definida sobre  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . Sea  $b \in \mathbb{R}^n$ ,  $b \neq 0$  y  $\delta b \in \mathbb{R}^n$ . Si  $u$  es solución de (5.35) y  $u + \delta_u$  es solución de:*

$$A(u + \delta_u) = (b + \delta_b), \tag{5.41}$$

entonces

$$\frac{\|\delta_u\|}{\|u\|} \leq cond(A) \frac{\|\delta_b\|}{\|b\|}. \tag{5.42}$$

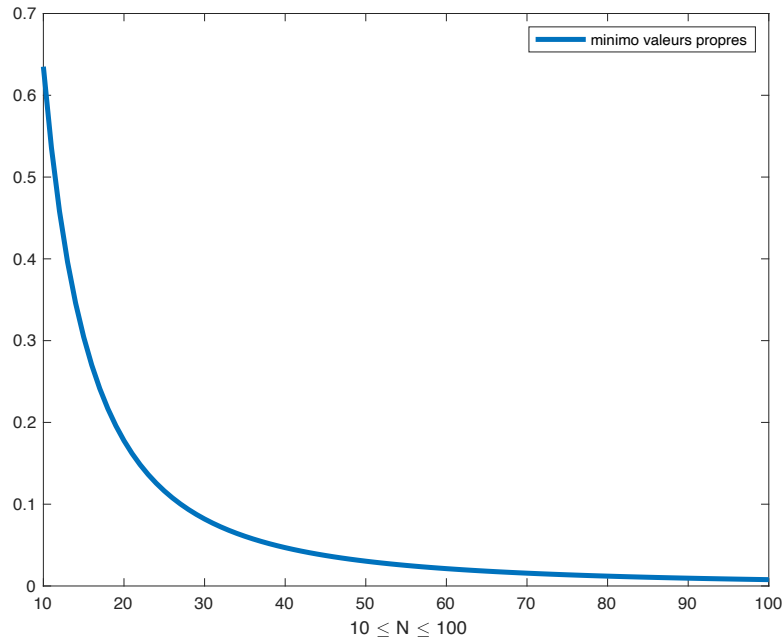


Figura 5.7: Evolución del valor propio mínimo en función de N, 2D.

**Demostración 5.1.1.** Como  $u$  es solución de (5.35) y  $u + \delta_u$  verifica  $A(u + \delta_u) = (b + \delta_b)$  obtenemos:

$$A\delta_u = \delta_b, \tag{5.43}$$

entonces:

$$\|\delta_u\| \leq \|A^{-1}\| \|\delta_b\|. \tag{5.44}$$

De la ecuación (5.35) se obtiene que

$$\|b\| \leq \|A\| \|u\|, \tag{5.45}$$

deducimos que:

$$\frac{1}{\|u\|} \leq \frac{\|A\|}{\|b\|}. \tag{5.46}$$

multiplicando (5.44) por (5.46) de cada lado de la desigualdad obtenemos así:

$$\frac{\|\delta_u\|}{\|u\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|\delta_b\|}{\|b\|}. \tag{5.47}$$

La estimación de error es optimal en el sentido que existe un segundo miembro  $b$  y un error  $\delta b$  para los cuales obtenemos la igualdad. La primera constatación es que si  $u$  es solución de (5.35) y  $u + \delta_u$  verifica  $A(u + \delta_u) = (b + \delta_b)$  entonces:

$$\delta u = A^{-1}\delta_b, \text{ y entonces } \|\delta_u\| = \|A^{-1}\delta_b\| \tag{5.48}$$

Hemos señalado que existe  $u_0$  tal que  $\|u_0\| = 1$  y  $\|A\| = \|Au_0\|$ . Obtenemos que:

$$\frac{\|\delta_{u_0}\|}{\|u_0\|} = \|A^{-1}\delta_b\| \frac{\|A\|}{\|Au_0\|} \tag{5.49}$$

Elegimos ahora  $b = Au_0$  y entonces  $\|b\| = \|A\|$  y:

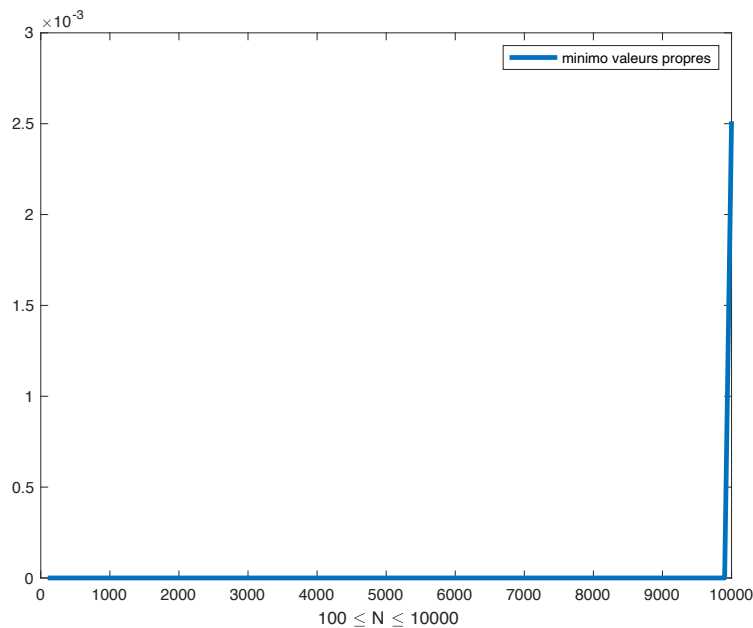


Figura 5.8: Evolución del valor propio mínimo en función de N, 2D.

$$\frac{\|\delta_{u_0}\|}{\|u_0\|} = \|A^{-1}\delta_b\| \frac{\|A\|}{\|b\|} \quad (5.50)$$

Por la definición de norma inducida existe  $v \in \mathbb{R}^n$  tal que  $\|v\| = 1$  y  $\|A^{-1}\| = \|A^{-1}v\|$ . Elejimos ahora  $\delta_b = v$ . En consecuencia:

$$\|\delta_{u_0}\| = \|A^{-1}\delta_b\| = \|A^{-1}v\| = \|A^{-1}\| = \|\delta_b\| \|A^{-1}\|. \quad (5.51)$$

Deducimos que:

$$\frac{\|\delta_{u_0}\|}{\|u_0\|} = \|\delta_{u_0}\| = \|\delta_b\| \|A^{-1}\| \frac{\|A\|}{\|b\|}. \quad (5.52)$$

Es decir que de la elección hecha de  $b$  y  $\delta v$  obtenemos la igualdad.

Vamos ahora a considerar el caso donde es la matriz  $A$  la que es perturbada por una matriz  $\delta_A$ .

**Proposición 5.1.2.** *Sea  $A \in M_n(\mathbb{R})$  una matriz invertible y  $\|\cdot\|$  una norma inducida definida sobre  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . Sea  $b \in \mathbb{R}^n$ ,  $b \neq 0$ . Sea  $\delta_A \in M_n(\mathbb{R})$  tal que  $A + \delta_A$  es una matriz invertible. Si  $u$  es solución de (5.35) y  $u + \delta_u$  es solución de:*

$$(A + \delta_A)(u + \delta_u) = b \quad (5.53)$$

entonces

$$\frac{\|\delta_u\|}{\|u + \delta_u\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|\delta_A\|}{\|A\|}. \quad (5.54)$$

**Demostración 5.1.2.** *Haciendo la diferencia entre el sistema lineal original y el sistema lineal perturbado se obtiene:*

$$A\delta_u = -\delta_A(u + \delta_u) \quad (5.55)$$

y entonces:

$$\delta_u = -A^{-1}(\delta_A(u + \delta_u)). \quad (5.56)$$

Deducimos que  $\|\delta_u\| \leq \|A^{-1}\| \|\delta_A\| \|u + \delta_u\|$ , multiplicando y dividiendo por  $\|A\|$  obtenemos el resultado esperado.

Podemos ahora concluir sobre las estimaciones de error teóricas con el teorema siguiente:

**Teorema 5.1.3.** *Sea  $A \in M_n(\mathbb{R})$  una matriz invertible y  $\|\cdot\|$  una norma inducida definida sobre  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . Sea  $b \in \mathbb{R}^n$ ,  $b \neq 0$ . Sea  $\delta_A \in M_n(\mathbb{R})$  y  $\delta b \in \mathbb{R}^n$ . Se supone que  $\|\delta_A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$ . Entonces la matriz  $A + \delta_A$  es invertible. Si  $u$  es solución de (5.35) y  $u + \delta_u$  es solución de (5.2) entonces:*

$$\frac{\|\delta_u\|}{\|u\|} \leq \frac{\text{cond}(A)}{1 - \|A^{-1}\| \|\delta_A\|} \left( \frac{\|\delta_b\|}{\|b\|} + \frac{\|\delta_A\|}{\|A\|} \right) \quad (5.57)$$

**Demostración 5.1.3.** *La matriz  $A + \delta_A = A(Id + B)$  con  $B = A^{-1}\delta_A$ .*

*La norma  $\|B\| < 1$  por hipótesis entonces la matriz  $Id + B$  es invertible y su inversa se puede desarrollar en serie de Neumann:*

$$(Id + B)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n B^n \quad (5.58)$$

*Esto implica que:*

$$\|(Id + B)^{-1}\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|B\|^n = \frac{1}{1 - \|B\|} \leq \frac{1}{1 - \|A^{-1}\| \|\delta_A\|}. \quad (5.59)$$

*Deducimos que  $A + \delta_A$  es invertible pues  $(A + \delta_A)^{-1} = (Id + B)^{-1}A^{-1}$ .*

*Por otro lado  $Au = b$ , entonces:*

$$\delta_u = (A + \delta_A)^{-1}(\delta_b - \delta_A u), \quad (5.60)$$

*deducimos que:*

$$\|\delta_u\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\| \|\delta_A\|} (\|\delta_b\| + \|\delta_A\| \|u\|). \quad (5.61)$$

*Multiplicando y dividiendo por  $\|A\|$  y dividiendo por  $\|u\|$  obtenemos:*

$$\frac{\|\delta_u\|}{\|u\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \|A\|}{1 - \|A^{-1}\| \|\delta_A\|} \left( \frac{\|\delta_b\|}{\|A\| \|u\|} + \frac{\|\delta_A\|}{\|A\|} \right) \quad (5.62)$$

*Pero  $Au = b$  y  $\|b\| \leq \|A\| \|u\|$ , deducimos que:*

$$\frac{\|\delta_u\|}{\|u\|} \leq \frac{\text{cond}(A)}{1 - \|A^{-1}\| \|\delta_A\|} \left( \frac{\|\delta_b\|}{\|b\|} + \frac{\|\delta_A\|}{\|A\|} \right) \quad (5.63)$$

Por ejemplo: Si consideramos el caso de la matriz del sistema lineal asociado a la discretización del problema (5.24) el número de condicionamiento euclidiano es del orden de  $N^2$ . Efectivamente si  $h = \frac{1}{N+1}$  obtenemos que:

$$\text{cond}_2(A) = \frac{\lambda_N}{\lambda_1} = \frac{2(1 - \cos(\frac{N}{N+1}\pi))}{2(1 - \cos(\frac{1}{N+1}\pi))}. \quad (5.64)$$

Cuando  $N \rightarrow \infty$ , es decir cuando  $h \rightarrow 0$ , observamos que:

$$\lambda_N \rightarrow 4 \quad (5.65)$$

y

$$\frac{1}{h^2}\lambda_1 \rightarrow \pi^2 \quad (5.66)$$

pues

$$\frac{1}{h^2}\lambda_i = \frac{2}{h^2}\left(1 - 1 + \frac{i^2 h^2 \pi^2}{2} + o(h^4)\right). \quad (5.67)$$

Entonces  $h^2 \text{cond}_2(A) \rightarrow \frac{4}{\pi^2}$  cuando  $h \rightarrow 0$ . Es decir  $\text{cond}_2(A) \rightarrow \infty$  cuando  $h \rightarrow 0$ .

Si suponemos que  $\delta_A = \bar{0}$ ,  $N = 10$  el condicionamiento de la matriz es aproximadamente 100, es decir:

$$\frac{\|\delta_u\|}{\|u\|} \leq 100 \frac{\|\delta_b\|}{\|b\|} \quad (5.68)$$

un error de 1 % en el segundo miembro  $b$  implica un error de 100 % en la aproximación de la solución. En la realidad la estimación del error es muy pesimista y grosera, mismo si es óptima, en particular en el caso de la resolución de sistemas lineales asociados a la discretización de ecuaciones a derivadas parciales.

En las figuras 5.9 y 5.11 podemos verificar el comportamiento del número de condicionamiento con respecto a la evolución de la dimensión  $N$ .

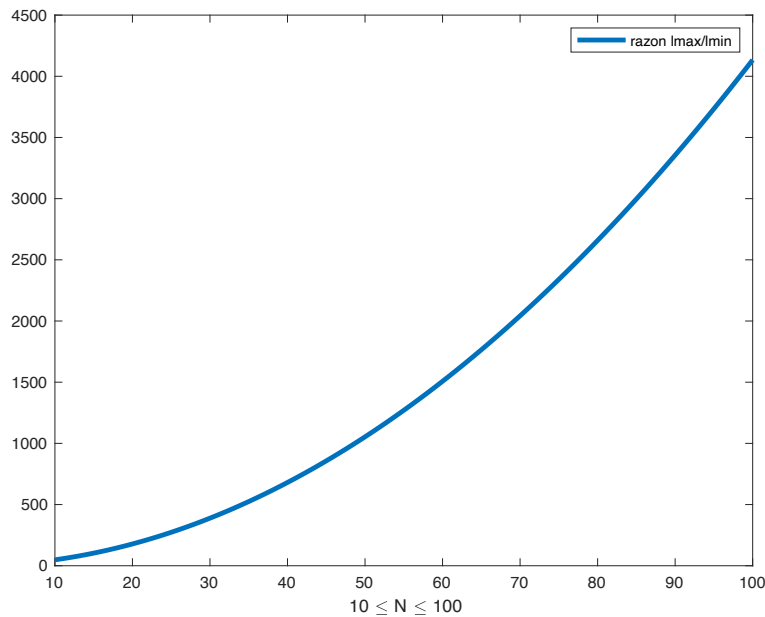


Figura 5.9: Evolución de  $\text{cond}_2(A)$  en función de  $N$ , 1d.

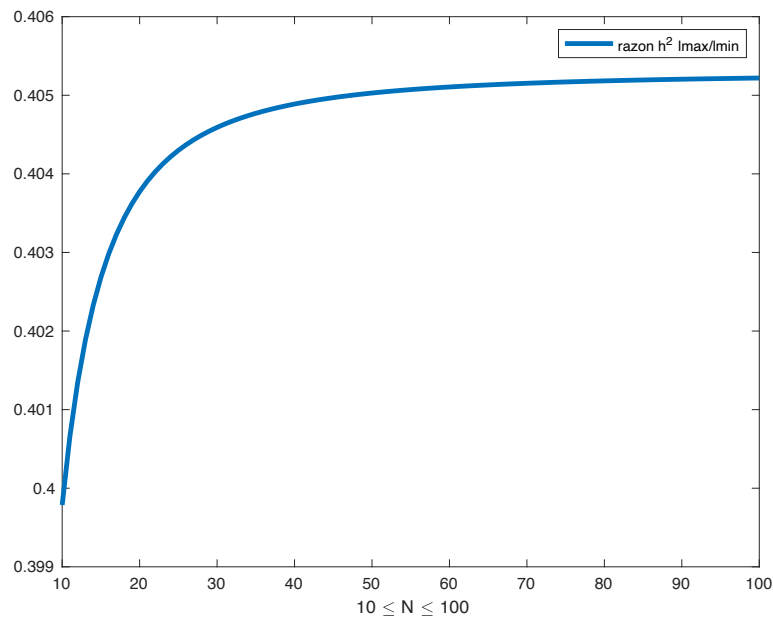


Figura 5.10: Evolución de  $h^2 * cond_2(A)$  en función de  $N$ , una dimensión.

En las figuras 5.10 y 5.12 vemos la evolución de  $h^2 cond_2(A)$ . Aparece evidente que converge a una constante, caracterizando el comportamiento del orden de  $h^2$  del condicionamiento de la matriz de discretización del operador de derivadas segundas multiplicado por  $h^2$ .

En el caso de dos dimensiones de espacio los resultados son similares:

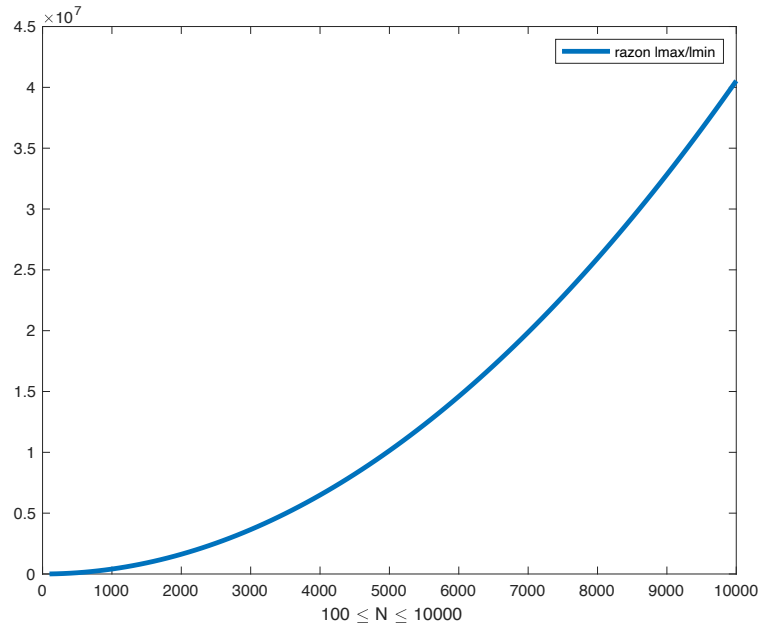


Figura 5.11: Evolución de  $cond_2(A)$  en función de  $N$ , una dimensión.

#### 5.1.4. Condicionamiento y descomposición de dominios

Parece evidente que al menos en el caso de un operador elíptico el condicionamiento de la matriz asociada a una discretización depende de la dimensión de la matriz. La descomposición de dominios aporta una solución a este problema, pues las matrices de discretización en cada subdominio son de dimensiones bien inferiores a la dimensión original. Si consideramos el ejemplo en una dimensión observamos que el  $cond_2(A)$  es de  $3,4373e + 03$ . Si consideramos una resolución usando el método de Schwarz con dos subdominios el condicionamiento de la matriz correspondiente a la discretización de la ecuación diferencial en cada subdominio es del orden de  $1e + 03$ .

## 5.2. Precondicionadores

El principio del precondicionamiento de un sistema lineal  $Au = b$  consiste en reemplazarlo por un sistema lineal equivalente (misma solución):

$$C^{-1}Au = C^{-1}b. \quad (5.69)$$

La matriz precondionadora  $C$  es elegida con el objetivo de que  $1 \leq cond(C^{-1}A) \ll cond(A)$ . Teóricamente la elección óptima es  $C^{-1} = A^{-1}$ . En la práctica se trata de obtener una matriz  $C^{-1}$  próxima de  $A^{-1}$  simple a calcular, poco costosa en el sentido de complejidad algorítmica.

Existen un número importante de métodos de cálculo de precondicionadores, en particular técnicas derivadas de los métodos de Gauss y Cholesky de resolución de sistema lineales. Esas técnicas son las factorizaciones incompletas, ver([17]). En este documento vamos a introducir precondicionadores para matrices simétricas definidas positivas.

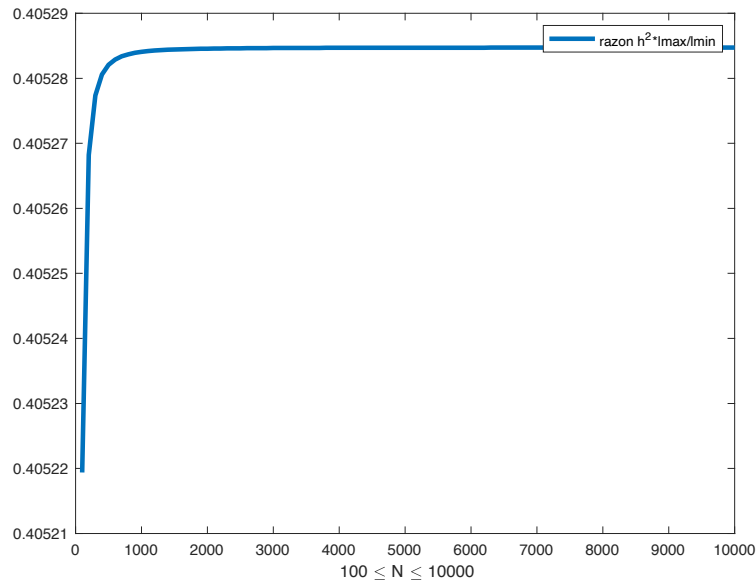


Figura 5.12: Evolución de  $h^2 * cond_2(A)$  en función de  $N$ , una dimensión.

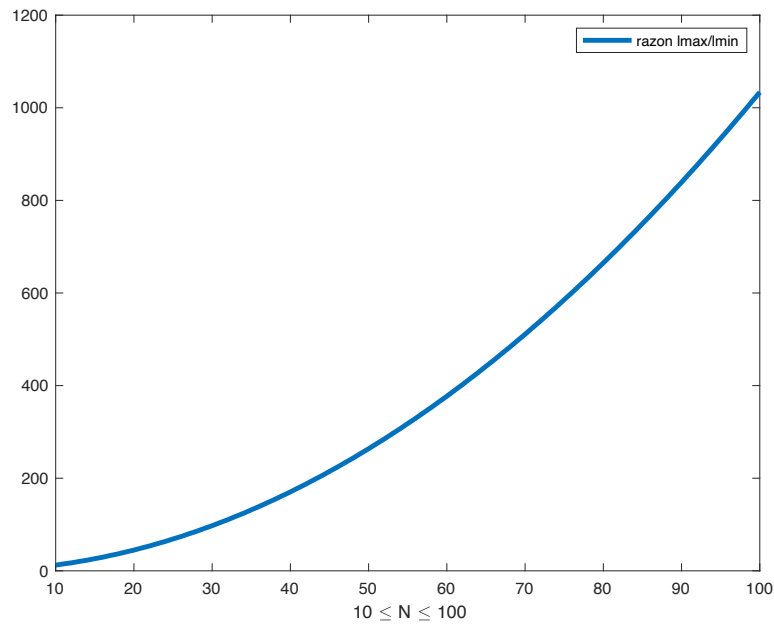


Figura 5.13: Evolución de  $cond_2(A)$  en función de  $N$ , dos dimensiones.

### 5.2.1. El preconditionador SSOR d’Evans

Si  $A$  es una matriz simétrica definida positiva, podemos descomponerla de la manera siguiente:

$$A = D - L - L^t. \tag{5.70}$$

donde  $D$  es la matriz diagonal  $(D)_{i,i} = a_{i,i}$ , para  $i = 1 : N$  y  $(D)_{i,j} = 0$ , para  $i \neq j, i = 1 : N; j = 1 : N$ .



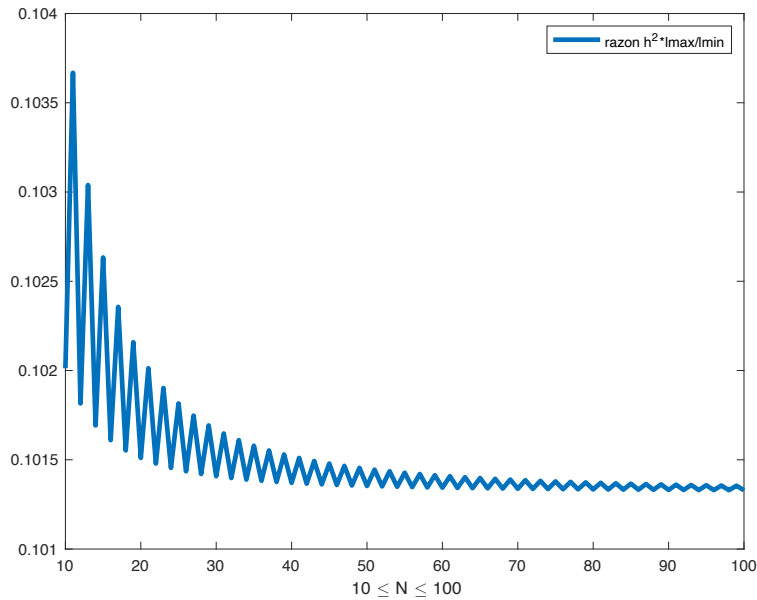


Figura 5.14: Evolución de  $h^2 * \text{cond}_2(A)$  en función de  $N$ , 2d.

La matriz  $L$  es estrictamente triangular inferior y es igual a  $(-L)_{i,j} = a_{i,j}$ , para  $i > j$  y  $(-L)_{i,j} = 0$ , para  $i \leq j$ .

En los métodos iterativos para resolver sistemas lineales, la solución se puede ver como el límite de la recurrencia:

$$u_{k+1} = Gu_k + f, \tag{5.71}$$

con  $G$  una matriz que caracteriza los diversos métodos:

- $G = I - D^{-1}A$  para el método de Jacobi.
- $G = I - (D - L)^{-1}A$ , para el método de Gauss Seidel.

La iteración  $u_{k+1} = Gu_k + f$  puede verse como una resolución del sistema lineal:

$$(I - G)u = g. \tag{5.72}$$

donde  $G = I - C^{-1}A$ , lo que produce la solución del sistema preconditionado:

$$C^{-1}Au = C^{-1}b. \tag{5.73}$$

Así tenemos que los preconditionadores correspondientes:

- $C = D$  para la iteración de Jacobi.
- $C = D - L$  para el método de Gauss Seidel.
- $C = \frac{1}{\omega}(D - \omega L)$ , para el método de SOR (Successive Overrelaxation Method).
- $C = \frac{1}{\omega(2-\omega)}(D - \omega L)D^{-1}(D - \omega L)^t$ , para el método de SSOR (Symetric Successive Overrelaxation Method).

donde el parámetro  $\omega \in (0, 2)$ . Que el valor del parámetro pertenezca al intervalo  $]0, 2[$  está determinado por la convergencia del método considerado.

Precisamente es evidente que:

$$\|u_{k+1} - u\| \leq \|G\| \|u_k - u\| \leq \|G\|^{k+1} \|u_0 - u\| \quad (5.74)$$

es decir, el método convergerá si  $\|G\| < 1$ . Debemos determinar  $\omega$  de tal manera que el radio espectral de  $G$  sea inferior a 1. Para cada problema y método existe un  $\omega^*$  óptimo que debe pertenecer al intervalo  $(0, 2)$ , pero en general con  $\omega = 1$  se obtienen buenos resultados.

Se observa que, en todos los casos, el preconditionador  $C$  se obtiene sin efectuar ningún cálculo.

En el caso de preconditionador SSOR, como la matriz diagonal  $D$  es estrictamente definida positiva, podemos definir  $D^{1/2}$  de la manera siguiente:  $(D^{1/2})_{i,i} = a_{i,i}^{1/2}$ . Entonces podemos descomponer el preconditionador  $SSOR$  :

$$C = TT^t, \text{ donde } T = \frac{(D - \omega L)D^{1/2}}{(\omega(2 - \omega))^{1/2}}. \quad (5.75)$$

La matriz  $C$  es invertible pues  $\det(C) = \frac{1}{\omega^{2N}} \prod_{i=1}^N a_{i,i} \neq 0$ .

En la práctica se reemplaza la solución del problema original por:

$$D^{-1}Au = D^{-1}b. \quad (5.76)$$

Entonces el preconditionador SSOR se define de la manera siguiente:

$$C = \frac{1}{\omega(2 - \omega)} (I - \omega D^{-1}L)(I - \omega D^{-1}L)^t. \quad (5.77)$$

Entonces la solución del sistema  $Cp = r$  se calcula en dos etapas:

- Calcular  $y$  tal que  $(I - \omega D^{-1}L)y = r$  por un algoritmo de descenso (el sistema es triangular inferior).
- Calcular  $p$  solución de  $(I - \omega D^{-1}L)^t p = y$  por un algoritmo de subida (el sistema es triangular superior).

En el caso de la discretización del laplaciano en un cuadrado, si  $\omega$  es el  $\omega$  óptimo se puede demostrar que  $\text{cond}_2(C^{-1}A) = O(N)$  cuando  $\text{cond}_2(A) = O(N^2)$ .

### 5.2.2. El algoritmo de Richardson

Sea  $A \in M_N(\mathbb{R})$  invertible y  $b \in \mathbb{R}^N$ . La solución del sistema lineal:

$$Ax = b, \quad (5.78)$$

la notaremos  $x^*$  y  $x^* = A^{-1}b$ .

El método de Richardson a paso fijo  $\alpha \in \mathbb{R}$  consiste en construir una secuencia  $x^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$  tal que cada iteración se obtiene gracias a la recurrencia siguiente:

$$\begin{cases} x^0 \in \mathbb{R}^N & \text{iteración inicial} \\ x^{k+1} = x^k + \alpha(b - Ax^k) \end{cases} \quad (5.79)$$

Notaciones:

- el residuo a la iteración  $k$  es definido por  $r^k = b - Ax^k$ .

- el error a la iteración  $k$  está definido por  $e^k = x^* - x^k$ .

es evidente que  $r^k = Ae^k$ .

La convergencia de este método es una consecuencia de la teoría del punto fijo.

**Proposición 5.2.1.** *La secuencia  $x^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$  verifica:  $e^k = (I - \alpha A)^k e^0, \forall k \in \mathbb{N}$ . Converge a  $x^*$  para todo dato inicial  $x^0 \in \mathbb{R}^N$  si y solamente si:*

$$\rho(I - \alpha A) < 1. \quad (5.80)$$

Más aún:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left( \frac{\|e^k\|}{\|e^0\|} \right)^{1/k} \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \|(I - \alpha A)^k\|^{1/k} = \rho(I - \alpha A) \quad (5.81)$$

**Demostración 5.2.1.**

$$\begin{aligned} e^{k+1} &= x^* - x^{k+1} \\ &= x^* - x^k - \alpha(b - Ax^k) \\ &= e^k - \alpha(Ax^* - Ax^k) \\ &= e^k - \alpha Ae^k \\ &= (I - \alpha A)e^k \\ &= (I - \alpha A)^k e^0. \end{aligned}$$

Pero tenemos la equivalencia siguiente en (5.1.2)  $B \in M_N(\mathbb{R})$  es tal que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} B^k x = 0$  si y solamente si  $\rho(B) < 1$

En consecuencia, concluimos que la secuencia converge si y solamente si  $\rho(I - \alpha A) < 1$ .

Más aún:

$$\|e^{k+1}\| \leq \|I - \alpha A\| \|e^k\| \quad (5.82)$$

y

$$\|e^{k+1}\| \leq \|I - \alpha A\|^k \|e^0\| \quad (5.83)$$

entonces

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left( \frac{\|e^k\|}{\|e^0\|} \right)^{1/k} \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \|(I - \alpha A)^k\|^{1/k} \quad (5.84)$$

pero tenemos las equivalencias de (5.1.2) y entonces la convergencia de la secuencia es equivalente a que  $\rho(I - \alpha A) < 1$ .

En el caso de las matrices definidas positivas se puede determinar un  $\alpha$  óptimo. Supongamos que  $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N$  son los valores propios de la matriz  $A$ .

**Proposición 5.2.2.** *El valor optimal de  $\alpha$ , que minimiza  $\rho(I - \alpha A)$ , es dado por:*

$$\alpha_{opt} = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_2} \quad (5.85)$$

y se obtiene:

$$\rho(I - \alpha_{opt} A) = \frac{\lambda_N - \lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_N} = \frac{cond_2(A) - 1}{cond_2(A) + 1} < 1. \quad (5.86)$$

**Demostración 5.2.2.**

$$\rho(I - \alpha A) = \max_{i=1, \dots, N} (|1 - \alpha \lambda_i|) = \max(|1 - \alpha \lambda_1|, |1 - \alpha \lambda_N|), \quad (5.87)$$

entonces el  $\alpha$  optimal es solución de:

$$\alpha_{opt} = \operatorname{argmin}_{\alpha \in \mathbb{R}} \max(|1 - \alpha \lambda_1|, |1 - \alpha \lambda_N|) \quad (5.88)$$

obtenemos que:  $\alpha_{opt} = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_2}$  y en consecuencia:

$$\rho(I - \alpha_{opt} A) = \frac{\lambda_N - \lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_N} = \frac{\operatorname{cond}_2(A) - 1}{\operatorname{cond}_2(A) + 1} < 1. \quad (5.89)$$

Podemos así determinar un  $\alpha_{opt}$  óptimo y calcular el número de iteraciones necesarias para obtener una convergencia con una precisión  $\epsilon$  dada.

Si la matriz  $A$  es definida positiva,  $\alpha = \alpha_{opt} = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_2}$ . Si nos damos  $1 \gg \epsilon > 0$  vamos a poder estimar el número de iteraciones  $k$  necesarios para que  $\frac{\|e^k\|}{\|e^0\|} \leq \epsilon$ . Se puede demostrar que  $k \geq \frac{\ln(\frac{1}{\epsilon})}{\ln(\frac{\operatorname{cond}_2(A)+1}{\operatorname{cond}_2(A)-1})}$  y cuando el condicionamiento de  $A$  es grande  $k \approx (\frac{\operatorname{cond}_2(A)}{2} + O(1)) \ln(\frac{1}{\epsilon})$ .

**Algoritmo de Richardson con preconditionador**

Si introducimos un preconditionador  $C$ , se trata de resolver el sistema lineal:

$$C^{-1}Ax = C^{-1}b, \quad (5.90)$$

entonces el algoritmo de Richardson a paso fijo preconditionado es dado por:

$$\begin{cases} x^0 \in \mathbb{R}^N \text{ dado,} \\ x^{k+1} = x^k + \alpha C^{-1}(b - Ax^k), \quad k \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (5.91)$$

En la práctica se obtiene el algoritmo siguiente:

- i) Dar  $x^0 \in \mathbb{R}^N$ ,  $r^0 = b - Ax^0$ , dar  $1 \gg \epsilon > 0$ .
- ii) Mientras que  $\|r^k\| \geq \epsilon$ ,
- iii) resolver  $Cp = r^k$ ,
- iv) calcular  $x^{k+1} = x^k + \alpha p$ ,
- v) calcular  $r^{k+1} = b - Ax^{k+1}$  y ir a ii)

Si  $e^0 = x^* - x^0$  es el error inicial, el error cometido a cada iteración  $e^k$  es dado por:

$$e^k = (I - \alpha C^{-1}A)^k e^0, \quad (5.92)$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

Entonces la secuencia  $x^k$  converge para todo dato inicial  $x^0$  si y solamente si

$$\rho(I - \alpha C^{-1}A) < 1 \quad (5.93)$$

### 5.3. Pseudo inversa de Moore-Penrose

La pseudo inversa de Moore-Penrose es una generalización de la inversa de matriz, mismo rectangular. Existe para toda matriz y es única.

Sea  $A$  una matriz de dimensión  $m \times n$  con coeficientes en  $\mathbb{R}$ , admite una pseudo inversa  $A^\dagger$  de dimensión  $n \times m$  con coeficientes en  $\mathbb{R}$  que es única. Se la puede caracterizar de la manera siguiente: una matriz  $G$  es igual a  $A^\dagger$  si:

- 1  $AGA = A$
- 2  $GAG = G$
- 3  $(AG)^t = AG$
- 4  $(GA)^t = GA$

Esta caracterización no es constructiva, pero permite verificar si una matriz  $A^\dagger$  es la pseudo inversa de una matriz  $A$  dada.

Si la matriz  $A$  tiene sus líneas linealmente independientes (es decir invertible a derecha) entonces:  $A^\dagger = A^t(AA^t)^{-1}$ .

Si la matriz  $A$  tiene sus columnas linealmente independientes (es decir invertible a izquierda) entonces:  $A^\dagger = (AA^t)^{-1}A^t$ .

El método de descomposición  $QR$  puede ser utilizado para calcular una pseudo inversa de una matriz  $A$  de dimensión  $n \times m$  con  $n > m$ . Es decir calculamos una matriz  $Q$  unitaria (inversa igual a la transpuesta conjugada, en los reales, ortogonal), y una matriz  $R$  triangular superior tal que  $A = QR$ .

$$R = \begin{bmatrix} R_1 \\ \mathcal{O} \end{bmatrix} \quad (5.94)$$

Sea  $R_1$  una matriz  $m \times m$ . Entonces  $A^\dagger = [R_1 \mathcal{O}^*]Q^*$ , ( $B^*$  es la transpuesta conjugada de  $B$ ),  $\mathcal{O}$  es una matriz con todos los coeficientes nulos.

Consideremos el caso en que la dimensión de  $A$  es  $n \times n$  pero no invertible, pero de rango  $r$ . Calculamos una descomposición de  $A = QRU^*$  donde  $Q$  es una matriz unitaria de dimensión  $n \times n$ ,  $U^*$  es un matriz ortogonal de dimensión  $n \times n$  y  $R$  es una matriz de la forma:

$$R = \begin{bmatrix} R_1 & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} \end{bmatrix} \quad (5.95)$$

donde  $R_1$  es una matriz  $r \times r$ .

Entonces

$$A^\dagger = U \begin{bmatrix} R_1^{-1} & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} \end{bmatrix} Q^* \quad (5.96)$$

Un otro método para calcular la pseudo inversa es la utilización de la descomposición en valores singulares SVD.

Una matriz  $A$  de dimensión  $n \times m$  de rango  $r \leq n$  admite una factorización:

$$A = UDV^* \quad (5.97)$$

Donde:

- $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$  y  $V \in \mathbb{C}^{m \times m}$  son dos matrices unitarias.

- D es una matriz diagonal de la forma:

$$D = \begin{bmatrix} S & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} \end{bmatrix} \quad (5.98)$$

donde  $S$  es una matriz diagonal con los valores singulares de  $A$ , es decir la raíz cuadrada de los valores propios de  $A^*A$ .

Entonces:

$$A^\dagger = VD^\dagger U \quad (5.99)$$

donde:

$$D^\dagger = \begin{bmatrix} S^{-1} & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} \end{bmatrix}^* \quad (5.100)$$

## 5.4. Gradiente Projectado

Si consideramos el problema de optimización numérica: calcular  $u \in \mathbb{R}^N$  tal que:

$$J(u) = \min_{v \in C} J(v) \quad (5.101)$$

donde  $J : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  es una función estrictamente convexa, diferenciable y  $C \subset \mathbb{R}^N$  es un conjunto convexo.

El algoritmo del gradiente proyectado para calcular  $u$  solución del problema de minimización (5.101) es una variación del método del gradiente.

**Algoritmo 5.4.1.** 1) *Inicialización:*  $\epsilon > 0$ ,  $\tau > 0$ ,  $k = 0$ , elegimos  $v^0 \in \mathbb{R}^N$  y  $\rho_0 \in \mathbb{R}_+^*$ .

2) *Iteración en  $k$ :* para  $k = 1, \dots$  hasta la convergencia:

a) *verificación de la convergencia*

$$\frac{\|v^k - v^{k-1}\|}{\|v^0\|} \leq \epsilon \quad (5.102)$$

o

$$\frac{\|J(v^k) - J(v^{k-1})\|}{\|J(v^0)\|} \leq \tau \quad (5.103)$$

b) *Cálculo de  $\nabla J(v^{k-1})$*

c) *Calcular  $\rho_k$  argumento mínimo de la función:*

$$\varphi(\rho) = J(x^{k-1} - \rho \nabla J(v^{k-1})) \quad (5.104)$$

con la restricción  $\rho > 0$ .

d) *Calcular  $x^k = P_C(x^{k-1} - \rho_k \nabla J(v^{k-1}))$ , donde  $P_C$  designa la proyección ortogonal sobre  $C$*

En el caso donde la restricción es de igualdad, es decir:

$$C = \{v \in \mathbb{R}^N : \text{tal que } Gv = b\} \quad (5.105)$$

entonces:

$$P = I_N - G^t(GG^t)^{-1}G. \quad (5.106)$$

## 5.5. Reconexión de espacios de Sobolev

**Teorema 5.5.1.** Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  un abierto acotado de borde Lipschitz y  $\Omega_1, \Omega_2$  dos abiertos de borde Lipschitz, subconjuntos de  $\Omega$  tales que:

$$\overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2 = \overline{\Omega} \quad (5.107)$$

$$\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset \quad (5.108)$$

Sea  $\Gamma = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ . Sean  $u_1 \in H_0^1(\Omega_1), u_2 \in H_0^1(\Omega_2)$  tales que:

$$u_1 = u_2 \text{ en } \Gamma \quad (5.109)$$

entonces la función definida por

$$u = \begin{cases} u_1, & \text{en } \Omega_1 \\ u_2, & \text{en } \Omega_2 \end{cases} \quad (5.110)$$

**Demostración 5.5.1.**  $u \in L^2(\Omega)$  es evidente pues  $u_1 \in L^2(\Omega_1)$  y  $u_2 \in L^2(\Omega_2)$ . Queda demostrar que  $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1, \dots, d$ . Sea  $\varphi \in D(\Omega)$  una distribución, entonces:

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = -\left\langle u, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle \quad (5.111)$$

$$= -\int_{\Omega_1} u_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx - \int_{\Omega_2} u_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \quad (5.112)$$

Pero  $\varphi \in H_0^1(\Omega)$  y  $\varphi \in H_0^1(\Omega_k), k = 1, 2$ , usando la fórmula de Green y que  $\varphi = 0$  en  $\partial\Omega$  :

$$\int_{\Omega_k} u_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = -\int_{\Omega_k} \varphi \frac{\partial u_k}{\partial x_i} dx + \int_{\Gamma} u_k \varphi n_i^k d\gamma \quad (5.113)$$

donde  $n_i^k$  es la coordenada  $i$  de la normal exterior  $n_k$  al dominio  $\Omega_k$ .

Sumando para  $k = 1, 2$  la igualdad (5.113) y considerando  $n_2 = -n_1$  sobre  $\Gamma$ .

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = \int_{\Omega_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_i} \varphi dx + \int_{\Omega_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_i} \varphi dx \quad (5.114)$$

$$- \int_{\Gamma} (u_1 - u_2) \varphi n_i^1 d\Gamma \quad (5.115)$$

Pero  $u_1 = u_2$  en  $\Gamma$  y resulta que:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial x_i}, & \text{en } \Omega_1 \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_i}, & \text{en } \Omega_2 \end{cases} \quad (5.116)$$

Como  $\frac{\partial u_k}{\partial x_i}, k = 1, 2, i = 1, \dots, d$  pertenece a  $L^2(\Omega_k)$ .

## 5.6. Fórmula de Green

Sea  $\Omega$  un abierto acotado, de frontera Lipschitz, entonces  $\forall u, v \in H^1(\Omega)$  tenemos que:

$$\int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_i} v + u \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\} dx = \int_{\Gamma} u|_{\Gamma} v|_{\Gamma} n_i d\Gamma, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

donde  $n_i$  es la coordenada  $i$  de la normal a la frontera  $n$ .

**Corolario** Si  $u \in H^2(\Omega)$  y  $v \in H^1(\Omega)$  entonces:

$$\int_{\Omega} \Delta u v \, dx = - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n|_{\Gamma}} v|_{\Gamma} \, d\Gamma.$$

y si  $u, v \in H^2(\Omega)$

$$\int_{\Omega} (\Delta u v - u \Delta v) \, dx = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n|_{\Gamma}} v|_{\Gamma} - u|_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial n|_{\Gamma}} \, d\Gamma.$$



## 5.7. Introducción al cálculo paralelo

### 5.7.1. Clasificación de la arquitecturas

Consideramos aquí la clasificación dicha de Flynn de 1972.

#### Calculadoras secuenciales SISD (Single Instruction flow Single Data flow)

Son las calculadoras secuenciales clásicas.

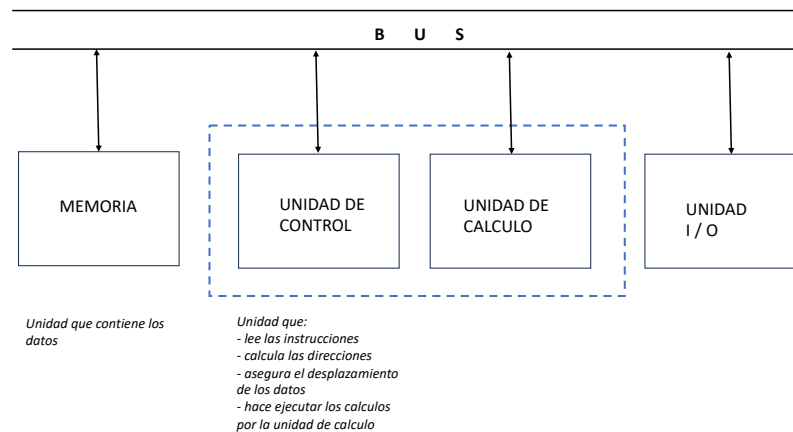


Figura 5.15: Arquitectura SISD.

Por ejemplo para calcular  $A = B + C$  efectuamos las operaciones siguientes:

- i) lire  $B$ ,
- ii) lire  $C$ ,
- iii) realizar la operación  $B + C$ ,
- iv) depositar el resultado en  $A$ .

#### Calculadoras SIMD (Single Instruction flow Multiple Data flow).

Permite efectuar simultáneamente la misma operación sobre datos diferentes. Pero estas arquitecturas presentan algunos problemas.

- El tiempo de cebado de una serie de operaciones tiende a aumentar con el número de unidades de cálculo.
- La aceleración obtenida no es uniforme, el número de operaciones a efectuar no es siempre un múltiplo del número de unidades de cálculo.
- Incapacidad de realizar cálculos recursivos

$$\begin{aligned} \text{do } i = 2, N \\ X(i) = 2 \times X(i - 1) \end{aligned}$$

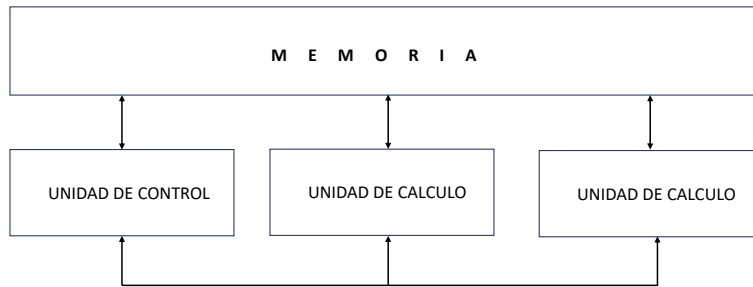


Figura 5.16: Arquitectura SIMD.

- El acceso a la memoria. Es necesario que en la memoria se pueda acceder a varios datos en paralelo. Una solución utilizada, es organizar la memoria en bancos.

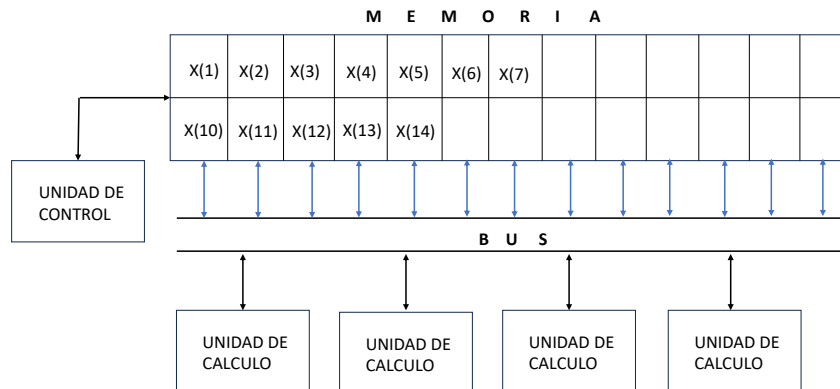


Figura 5.17: Pipeline.

**Arquitectura MIMD (Multiple Instruction flow Multiple Data flow).**

### 5.7.2. Caracterización del rendimiento de una calculadora paralela

**Dos parámetros experimentales**

- $n_{1/2}$  medida de media eficiencia.
- $r_{\infty}$  velocidad asintótica.



Figura 5.18: Arquitectura MIMD.

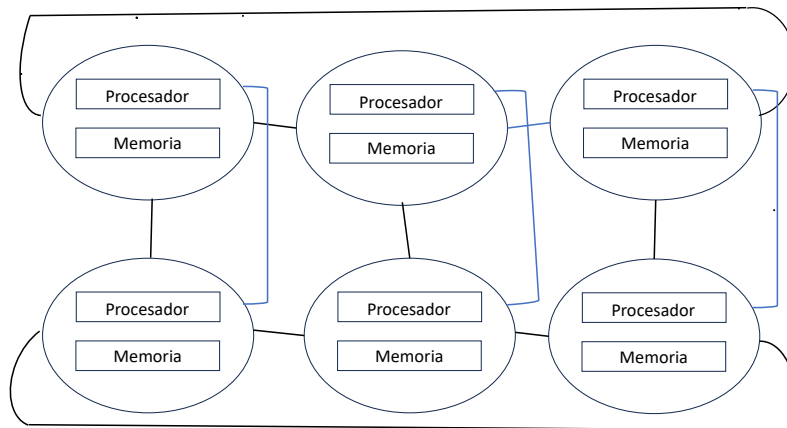


Figura 5.19: Arquitectura MIMD, memoria distribuida.

Programa test:

```

DO 3 i = 1, N
  V3(i) = V1(i) × V2(I)
END
    
```

**Velocidad asintótica**

$r_\infty$  es la velocidad máxima expresada en términos de Mflops para  $N$  grande. Mflops=  $10^6$  operaciones flotantes por segundo.

La velocidad asintótica depende del período del reloj, del número de unidades de cálculo y del flujo máximo de la memoria

$n_{1/2}$  es el valor de  $N$  para el cual la velocidad medida es igual a la mitad de la velocidad asintótica, (expresa la tasa de paralelismo de la arquitectura).

El tiempo de ejecución  $T$  de (??) es una función afín de  $N$ ,

$$T = d + aN$$

donde  $d$  es el tiempo de cebado,  $a$  la pendiente y  $N$  el nombre de iteraciones. Entonces  $r_\infty = 1/a$  y  $n_{1/2} = d/a$ . Si la computadora es del tipo SIMD con  $p$  procesadores,  $\tau$  el tiempo necesario para

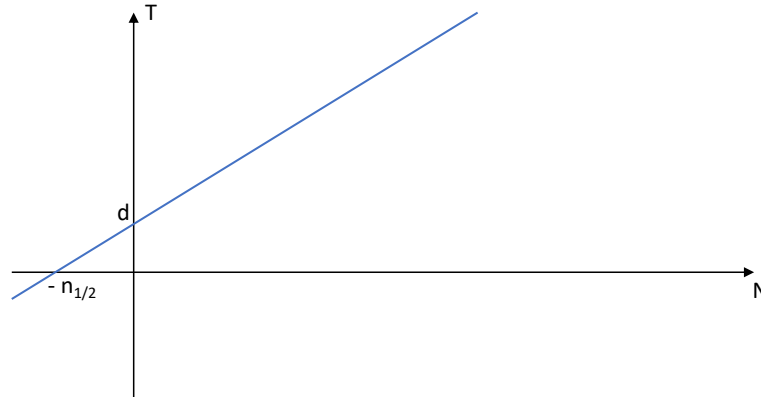


Figura 5.20: Tiempo de cálculo en función de  $N$ .

calcular una serie de  $p$  operaciones en paralelo, entonces:

$$T = d + \tau(N/p) + r\tau$$

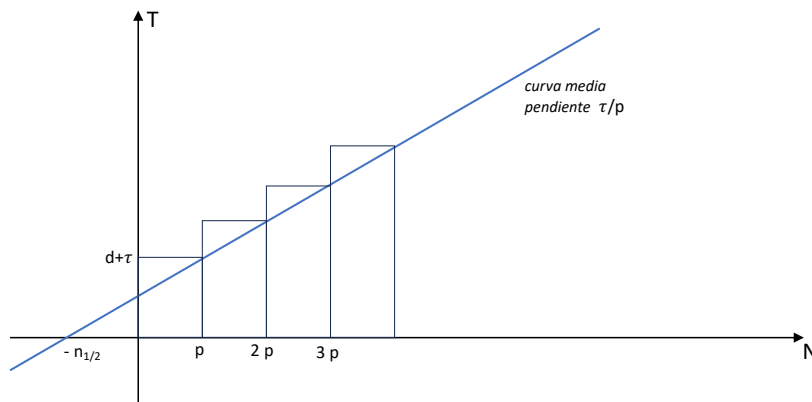


Figura 5.21: Tiempo de cálculo en función de  $N$ , caso de  $p$  procesadores.

**Speedup**

$$Speedup = \frac{\text{Tiempo con un solo procesador}}{\text{Tiempo con } p \text{ procesadores}} \tag{5.117}$$

## 5.8. Introducción a la interfaz MPI (Message Passing Interface)

El modelo por pasaje de mensajes es un modelo de programación que puede ser utilizado con conjunto de procesadores que disponen de una memoria local y que comunican el pasaje de mensajes, es decir enviando y recibiendo mensajes, una referencia [9].

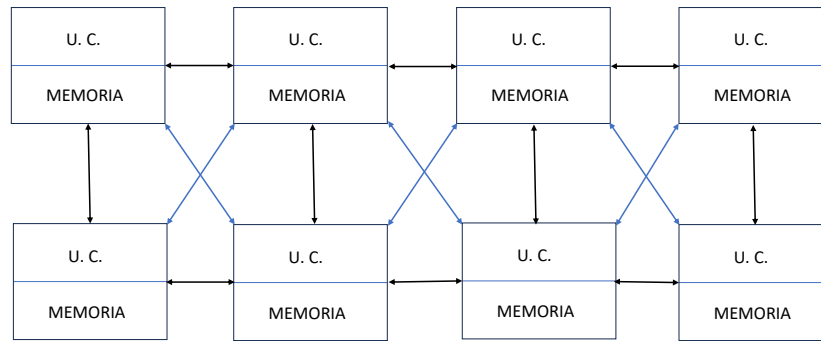


Figura 5.22: Message Passing Interface.

### Ventajas del modelo MPI

El modelo por pasaje de mensajes se acomoda de un conjunto de procesadores no homogéneos conectados por una red de comunicaciones. Soporta algoritmos diversos con cargas no homogéneas sobre cada procesador.

La mayor parte de los errores de programación proviene de la mala gestión de la locación de la memoria.

El rendimiento es mejorado pues este tipo de computadora permite de disponer de mucha memoria y sobre todo de memoria cache rápida.

### Elementos de MPI

Un ejemplo (en Fortran).

#### Algoritmo 5.8.1. Ejemplo MPI

```

program main
include "mpif.h "
integer ierr,myid, numprocs
C inicialización MPI
Call MPLINIT(ierr)
C Saber quien soy
Call MPL_COMM_RANK(MPL_COMM_WORLD,myid,ierr)
Call MPL_COMM_SIZE(MPL_COMM_WORLD,numprocs,ierr)
C if (myid.eq.0) then
C
C trabajo del maestro

```

```

C
end if
C
C trabajo de los esclavos
C
C Stop MPI
C
Call MPI_FINALIZE(ierr)
stop
end

```

En lenguaje C :

**Algoritmo 5.8.2.** Ejemplo en C

```

# include <mpi.h>
int argc;
char *argv[];
{ int myid, numprocs;
MPI_INIT(&argc,&argv); /* inicialización MPI */
MPI_COMM_SIZE(MPI_COMM_WORLD, &numprocs)
MPI_COMM_RANK(MPI_COMM_WORLD,&myid)
if (myid==0) {
    master();
} else {
    slave()
}
MPI_FINALISE();
}

```

Las instrucciones siguientes hacen parte de todo programa:

- Call MPI\_INIT(ierr),
- Call MPI\_COMM\_RANK(MPI\_COMM\_WORLD,myid,ierr),
- Call MPI\_COMM\_SIZE(MPI\_COMM\_WORLD,numprocs,ierr),
- Call MPI\_FINALISE(ierr)
- MPI-INIT(ierr)
  - ierr: un entero
  - ierr es un código de error o MPI\_success
- MPI\_COMM\_RANK(comm,rank,ierr)
  - Comm: entero, caracteriza o identifica el contexto de comunicación y el grupo de procesos asociados.
  - Es definido por "mpif.h"
  - rank: un entero
  - Cada proceso a un rank en el grupo asociado al comunicador MPI\_COMM\_WORLD.
  - ierr: un entero, código de error.

- Call `MPLCOMM_SIZE(MPLCOMM_WORLD, size, ierr)`

`size`: un número entero.

Esta rutina nos informa en `size` el número de procesos que el utilizador a inicializado para el programa.

Si `numprocs` es el valor de `size`, es el número de procesadores asociados a `MPLCOMM_WORLD`. Cada proceso a el mismo `MPLCOMM_WORLD` y "numprocs"pero un diferente "myid"(rank).

## Comunicaciones

`MPLSEND(adress, length,tipodata, destinación,tag,comm)`

- `adress`: lugar en la memoria del comienzo del buffer que contiene los datos a enviar.
- `length`: Entero. El tamaño del mensaje.
- `tipodata`: Tipo de dato, enteros, reales, caracteres, etc...
- `destinación`: identificación del proceso al que los datos son destinados.
- `tag`: un número arbitrario, entero positivo, que exprime la exclusividad y caracteriza el un mensaje. Permite organizar el recibo de los mensajes en el buen orden.
- `comm`: identifica el grupo de procesos y el contexto de comunicación.

Diferentes "tipodata":

- `MPLCHAR`,
- `MPLINTEGER`,
- `MPLFLOAT`,
- `MPLDOUBLE_PRECISION`,
- etc...

Por ejemplo si queremos enviar una columna de una matriz  $a$ :

### Algoritmo 5.8.3. Ejemplo

```
do 40 i = 1, numprocs - 1
```

```
do 30 j = 1, acols
```

```
30 buffers(j) = a(i, j)
```

```
call MPLSEND(buffer, acols, MPLDOUBLE_PRECISION, i, i, MPLCOMM_WORLD, ierr)
```

```
40 continue
```

`MPLRECV(adress, maxlength,tipodata,source,tag,comm,status,ierror)`

- `adress`: lugar en la memoria del comienzo del buffer que contiene los datos a enviar.
- `maxlength`: Entero. El tamaño maximal del mensaje.
- `tipodata`: Tipo de dato, enteros, reales, caracteres, etc...
- `source`: identificación del proceso de donde aceptamos los datos. Por ejemplo `MPLANY_SOURCE`, indica que aceptamos datos de todo proceso asociado al contexto `MPLCOMM_WORLD`.

- tag: un número arbitrario, entero positivo, que exprime la exclusividad y caracterizar un mensaje. Permite organizar el recibo de los mensajes en buen orden.
- comm: identifica el grupo de procesos y el contexto de comunicación.
- status: informaciones sobre el mensaje. Por ejemplo: stat(MPLSOURCE) es el rank del proceso de donde vienen los datos.

### Comunicaciones colectivas

MPLBCAST(adress, length, tipodata,source,tag,comm,ierr)

source: entero, proceso origen de los datos.

Va a enviar el contenido de los datos en adress a todos los procesos de comm.

### Calcul collectif

#### Reduction

MPLREDUCE(sendbuffer, recvbuffer, length, tipodata, operación, source, comm, erreur)

Operación: tipo de operación.

- MPLMAX
- MPLMIN
- MPLSUM
- MPLPROD
- MPLLAND
- MPLBAND
- MPLLOR
- MPLBOR

#### Evaluación del tiempo

tt=MPLWTIME()

variable en doble precisión que contiene el tiempo transcurrido desde un punto inicial arbitrario.

t1=MPLWTICK

variable en doble precisión que contiene el tiempo transcurrido entre dos consultaciones sucesivas.

### 5.8.1. Ejemplo

Cálculo de  $\pi$ .

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x)_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4} \quad (5.118)$$



Algoritmo de cálculo de la integral.

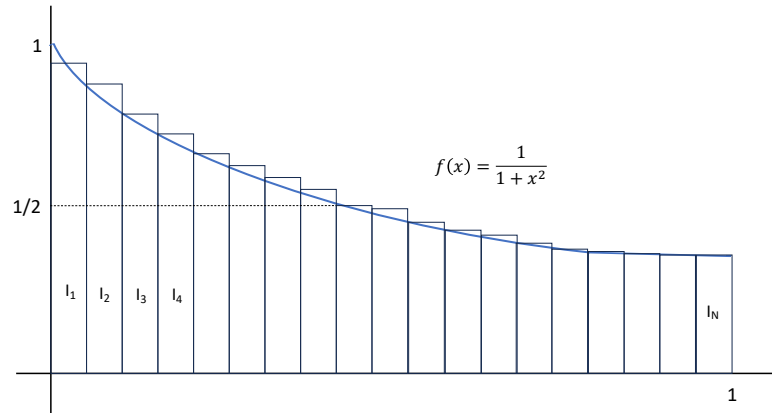


Figura 5.23: Descomposición del intervalo.

Paralelizamos el cálculo agrupando la evaluación de la superficie  $I_i$  en varios subgrupos y efectuando la adición. A continuación, con una operación de reducción (suma global) obtenemos el resultado.

Un proceso, el director, es responsable de la comunicación con el exterior. Por otro lado calcula el valor de  $N$  y lo distribuye a todos los procesos (broadcast).

Entonces cada proceso calcula el subgrupo de superficies que le fueron atribuidas, y envía el resultado al proceso que hace la suma global.

### Programa

```
include "mpif.h"
double precision PI25D
parameter(PI25D=3.141592653589793239462643)
double precision mypi,pi,h,sum,x,f,a
integer n,myid,numprocs,i,ierr
C
C función a integrar
C
f(a) = 4.d0/(1.d0 + a * a)
C Call MPLINIT(ierr)
Call MPLCOMM_RANK(MPLCOMM_WORLD,myid,ierr)
Call MPLCOMM_SIZE(MPLCOMM_WORLD,numprocs,ierr)
10 if(myid.eq.0) then
print*, "entrar el número de intervalos:( si zero stop)"
read(*,*) n
endif
C
C broadcast n
C
Call MPLBCAST(n,1,MPLINTIGER,0,MPLCOMM_WORLD,ierr)
C
```

```
C Verificación de n
C
if(n.le.0) go to 30
C
C Calculo del tamaño
C
h=1/n
sum=0.
do 20 i = myid + 1, n, numprocs
x=h*(dble(i)-0.5)
sum=sum+f(x)
20 continue
mypi=h*sum
C
C recuperación de todas las sumas parciales
C
Call MPLREDUCE(myp,pi,1,MPLDOUBLE_PRECISION,MPLSUM,0, MPLCOMM_WORLD,ierr)
C
C El proceso 0 escribe la respuesta
C
if(myid.eq.0) then
print*, "pi es ", pi, "Erreur", abs(pi-PI25D)
endif
go to 10
30 Call MPLFINALIZE(ierr)
Stop
end
```

# Bibliografía

- [1] Tony F. Chan and Tarek P. Mathew. Domain decomposition algorithms. In *Acta Numerica 1994*, pages 61–143. Cambridge: Cambridge University Press, 1994.
- [2] M. Chipot and F. B. Weissler. Some blowup results for a nonlinear parabolic equation with a gradient term. *SIAM J. Math. Anal.*, 20(4):886–907, 1989.
- [3] Victorita Dolean, Pierre Jolivet, and Frédéric Nataf. *An introduction to domain decomposition methods. Algorithms, theory, and parallel implementation*, volume 144 of *Other Titles Appl. Math.* Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2015.
- [4] Charbel Farhat, Po-Shu Chen, Jan Mandel, and Francois Xavier Roux. The two-level FETI method II: Extension to shell problems, parallel implementation and performance results. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 155(1-2):153–179, 1998.
- [5] Charbel Farhat, Michael Lesoinne, and Kendall Pierson. A scalable dual-primal domain decomposition method. *Numer. Linear Algebra Appl.*, 7(7-8):687–714, 2000.
- [6] Charbel Farhat, Michel Lesoinne, Patrick LeTallec, Kendall Pierson, and Daniel Rixen. FETI-DP: A dual-prime unified FETI method. I: A faster alternative to the two-level FETI method. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 50(7):1523–1544, 2001.
- [7] Charbel Farhat and Francois-Xavier Roux. A method of finite element tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 32(6):1205–1227, 1991.
- [8] Martin J. Gander and Andrew M. Stuart. Space-time continuous analysis of waveform relaxation for the heat equation. *SIAM J. Sci. Comput.*, 19(6):2014–2031, 1998.
- [9] William Gropp, Ewing Lusk, Nathan Doss, and Anthony Skjellum. A high-performance, portable implementation of the MPI message passing interface standard. *Parallel Comput.*, 22(6):789–828, 1996.
- [10] Axel Klawonn and Olof B. Widlund. Dual-primal FETI methods for linear elasticity. *Commun. Pure Appl. Math.*, 59(11):1523–1572, 2006.
- [11] E. Lindelöf. Sur l’application de la méthode des approximations successives aux équations différentielles ordinaires du premier ordre. *C. R. Acad. Sci., Paris*, 118:454–457, 1894.
- [12] S. H. Lui. On schwarz alternating methods for nonlinear elliptic pdes. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 21(4):1506–1523, 1999.
- [13] Shiu-Hong Lui. On monotone and Schwarz alternating methods for nonlinear elliptic PDEs. *M2AN, Math. Model. Numer. Anal.*, 35(1):1–15, 2001.

- [14] Tarek P. A. Mathew. *Domain decomposition methods for the numerical solution of partial differential equations*, volume 61 of *Lect. Notes Comput. Sci. Eng.* Berlin: Springer, 2008.
- [15] É. Picard. Sur l'application des méthodes d'approximations successives à l'étude de certaines équations différentielles ordinaires. *Journ. de Math. (4)*, 9:217–271, 1893.
- [16] François-Xavier Roux. Parallel implementation of a domain decomposition method for non-linear elasticity problems. In *Domain-based parallelism and problem decomposition methods in computational science and engineering*, pages 161–175. Philadelphia, PA: SIAM, 1995.
- [17] Yousef Saad. *Iterative methods for sparse linear systems*. Philadelphia, PA: SIAM Society for Industrial and Applied Mathematics, 2nd ed. edition, 2003.
- [18] Barry F. Smith, Petter E. Bjørstad, and William D. Gropp. *Domain decomposition. Parallel multilevel methods for elliptic partial differential equations*. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.
- [19] S. AGMON. *Lecture on Elliptic Boundary value Problems*. D. Van Nostrand Company, Princeton, 1965.
- [20] E. AHMED, S. A. HASSAN, C. JAPHET, M. KERN, AND M. VOHRALIK. A posteriori error estimates and stopping criteria for space-time domain decomposition for two-phase flow between different rock types. *SMAI-JCM*, 5, 2019.
- [21] G. BAL. On the convergence and the stability of the parareal algorithm to solve partial differential equations, in domain decomposition methods in science and engineering. *SIAM, Springer, Berlin*, 40, 2005.
- [22] S. C. BRENNER, L. RIDGWAY SCOTT. *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, volume 15. American Mathematical society, 1994.
- [23] F. CAETANO, M.J. GANDER, L. HALPERN, AND J. SZEFTÉ. Schwarz waveform relaxation algorithms for semilinear reaction-diffusion equations. *American Institute of Mathematical Sciences*, 5, 2010.
- [24] X.C CAI. An optimal two-level overlapping domain decomposition method for elliptic problems in two and three dimensions. *SIAM, JOURNAL ON SCIENTIFIC COMPUTING* , pages 239–247, 1993.
- [25] X.C CAI, OLOF B. WIDLUND. domain Decomposition Algorithms for Indefinite elliptic Problems. *SIAM, Journal on Scientific and Statistical Computing* , pages 243–258, 1992.
- [26] X.C CAI, OLOF B. WIDLUND. Multiplicative SCHWARZ ALGORITHMS FOR SOME NONSYMMETRIC AND INDEFINITE PROBLEMS. *SIAM, JOURNAL ON NUMERICAL ANALYSIS* , pages 936–952, 1993.
- [27] T. CAZENAVE, A.HARAUX. *Introduction aux problèmes d'évolution semi-linéaire*. 1987.
- [28] P. G. CIARLET. *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. North-Holland, Amsterdam-New-York, Oxford, 1978.
- [29] X. DAI, Y. MADAY. Stable parareal in time method for first and second order hyperbolic systems. *SIAM J. Sci. Comput*, 35, 2013.

- [30] D. S. DAOUD, M.J. GANDER. Overlapping Schwarz Waveform Relaxation for Convection Reaction Diffusion Problems. *In: 13th International Conference on Domain Decomposition Methods. Cimne, 2001.*
- [31] P. DEUFLHARD. *Newton Methods for Nonlinear Problems.* Springer Series in Computational Mathematics, 2000.
- [32] M. DRYJA, B.F. SMITH AND O.B. WIDLUND. Schwarz analysis of iterative substructuring algorithms for elliptic problems in three dimensions. *SIAM J. Numer. Anal.*, 31:1662–1694, 1994.
- [33] M. DRYJA, O.B. WIDLUND. Domain decomposition algorithms with small overlap. *SIAM J. Sci. Comput.*, 15:604–620, 1994.
- [34] X. H. DU, M.SARKIS, C.F.SCHAERER, D.B.SZYLD. Inexact and truncated parareal-in-time krylov subspace methods for parabolic optimal control problems. *Electron. Trans. Numer. Anal.*, 40, 2013.
- [35] A. ERN, J.L GUERMOND. *Theory and Practice of finite Elements*, volume 159. APPLIED MATHEMATIC SCIENCES, 2010.
- [36] J. A. EZQUERRO, M.A.HERNANDEZ. On an application of newton’s method to nonlinear operators with w-conditioned second. *BIT Numerical Mathematics*, 42:519–530, 2002.
- [37] J. A. EZQUERRO, M.A.HERNANDEZ. On the R-order of convergence of newthon’s method under mild differentiability conditions. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, pages 53–61, 2005.
- [38] M. GANDER. A waveform relaxation with overlapping splitting for reaction diffusion equations. *Numerical Linear Algebra with Applications*, 6:125–145, 1999.
- [39] M. J. GANDER. 50 years of time parallel time integration. multiple shooting and time domain decomposition methods. *Contrib. Math. Comput. Sci. 9, Springer, Cham*, 9, 2015.
- [40] M. J. GANDER, S. VANDEWALLE. Analysis of the parareal time-parallel time-integration method. *SIAM J. Sci. Comput.*, 29, 2007.
- [41] A. HARAUX, F.B. WEISSLER. Non-uniqueness for a semi linear initial value problem. *Indiana Univ. Math*, 31:167–189, 1989.
- [42] S. A. HASSAN, C. JAPHET, M.VOHRALIK. A posteriori stopping criteria for optimized schwarz domain decomposition algorithms in mixed formulations. *Comput. Methods Appl. Math.*, 18, 2018.
- [43] S. A. HASSAN, C. JAPHET, M.VOHRALIK. A posteriori stopping criteria for space-time domain decomposition for the heat equation in mixed formulations. *Electron. Trans. Numer. Anal.*, 49, 2018.
- [44] M. A. HERNANDEZ. The newton method for operators with hölder continous first derivate. *Journal of optimization theory and applications*, 3:631–641, 2001.
- [45] C. KELLY. *Iterative Methods for Linear and Nonlinear Equations.* Frontiers in Applied Mathematics, 1995.

- [46] J. L. LIONS, Y. MADAY AND G. TURINICI. Parareal in time algorithm for kinetic systems based on model reduction in high-dimensional partial differential equations in science and engineering. *Amer. Math. Soc. Providence*, 41, 2007.
- [47] J. L. LIONS, Y. MADAY AND G. TURINICI. Résolution d'edp par un schéma en temps pararéel. *C.R.Acad. Sci. Paris Sér. I Math*, 332, 2001.
- [48] K. MARTIN. Parallel multiple shooting for the solution of initial value problems. *Parallel Computing*. 20, 3, 1994.
- [49] T. P. MATHEW, M. SARKIS, C.E, SCHAEERER. Analysis of block parareal preconditioners for parabolic optimal control problems. *SIAM J. Sci. Comput*, 32, 2010.
- [50] N. NACEUR, M. KHENISSI, J. R. ROCHE. Numerical solution of nonlinear differential boundary value problems using adaptive non-overlapping domain decomposition method. *Applicable Analysis, Taylor and Francis*, 2020.
- [51] N. NACEUR, N. ALAA, M. KHENISSI, J. R. ROCHE. Theoretical and numerical analysis of a class of quasilinear elliptic equations. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series S, American Institute of Mathematical Sciences*, 2020.
- [52] T. NAKAGAWA. Blowing up on a finite difference solution to  $u_t = u_{xx} + u^2$ . *Appl. Math. Optim.*, 2:337–350, 1976.
- [53] N. ALAA, J.R. ROCHE. Theoretical and Numerical Analysis of a class of Nonlinear Elliptic Equations. *Mediterr. J. Math*, 2:327–344, 2005.
- [54] A. QUARTERONI, A. VALLI. *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*. Springer series in Computational Mathematics, Springer, 1994.
- [55] A. QUARTERONI, A. VALLI. *Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*. Oxford Science Publications, 1999.
- [56] P. A. RAVIART, J.M. THOMAS. *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Masson, Paris, 1983.
- [57] P. A. RAVIART, J.M THOMAS. *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Paris New York Barcelone Mexico Sao Paulo, 1983.
- [58] D. RUPRECHT, R. SPECK, R. KRAUSE. Parareal for di usion problems with space- and time-dependent coefficients. domain decomposition methods in science and engineering xxii. *Lect. Notes Comput. Sci. Eng. Springer, Cham*, 104, 2016.
- [59] V. THOMÉE. *Galerkin Finite Element Methods for parabolic Problems*, volume 25. Springer Series in Computational Mathematics, 2000.
- [60] J. M. F. TRINDADE, J.C.F, PEREIRA. Parallel-in-time simulation of two- dimensional, unsteady, incompressible laminar flows. *Numer. Heat Trans. Part B Fund*, 50, 2006.
- [61] J. M.F TRINDADE, J.C.F, PEREIRA. A “parareal” time discretization for non-linear pde’s with application to the pricing of an american put. in: Recent developments in domain decomposition methods (zurich, 2001). *N Lect. Notes Comput. Sci. Eng*, 23, 2002.

- [62] Vidar Thomée. *Galerkin finite element methods for parabolic problems*. Berlin: Springer, 2nd revised and expanded ed. edition, 2006.
- [63] Andrea Toselli and Olof Widlund. *Domain decomposition methods – algorithms and theory*, volume 34 of *Springer Ser. Comput. Math.* Berlin: Springer, 2005.