f continua

$$f([a,b]) = [c,d]$$

Teorema: (Del máximo y mínimo para funciones continuas) (Weierstrass)

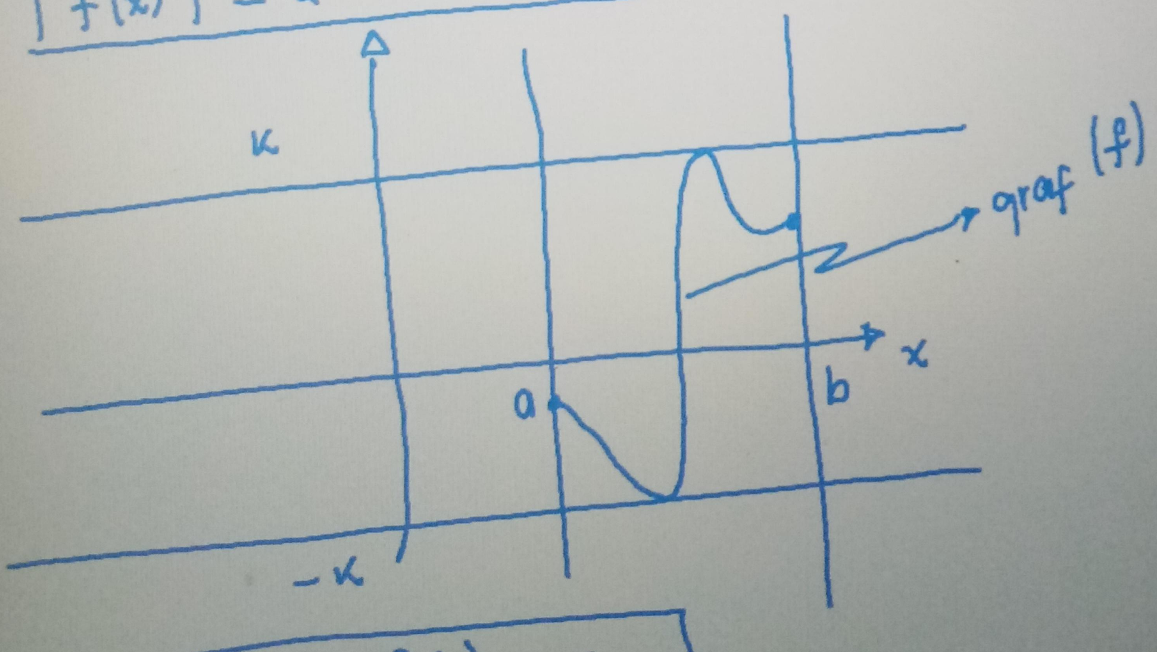
Si $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua $\Rightarrow \exists\, x_0, x_1 \in [a,b]$ tal que

$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1) \quad \forall x \in [a,b]$$

Lema: (Acotación para funciones continuas).

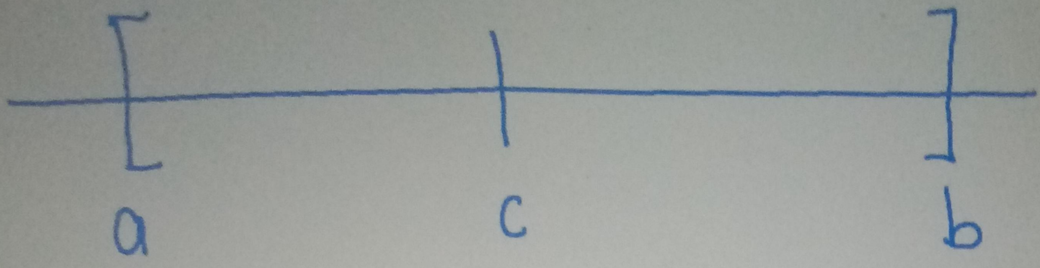
Sea $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. Entonces f es acotada. Es decir, existe $K \in \mathbb{R}^+$ tal que

$|f(x)| \leq K \quad \forall x \in [a,b]$.

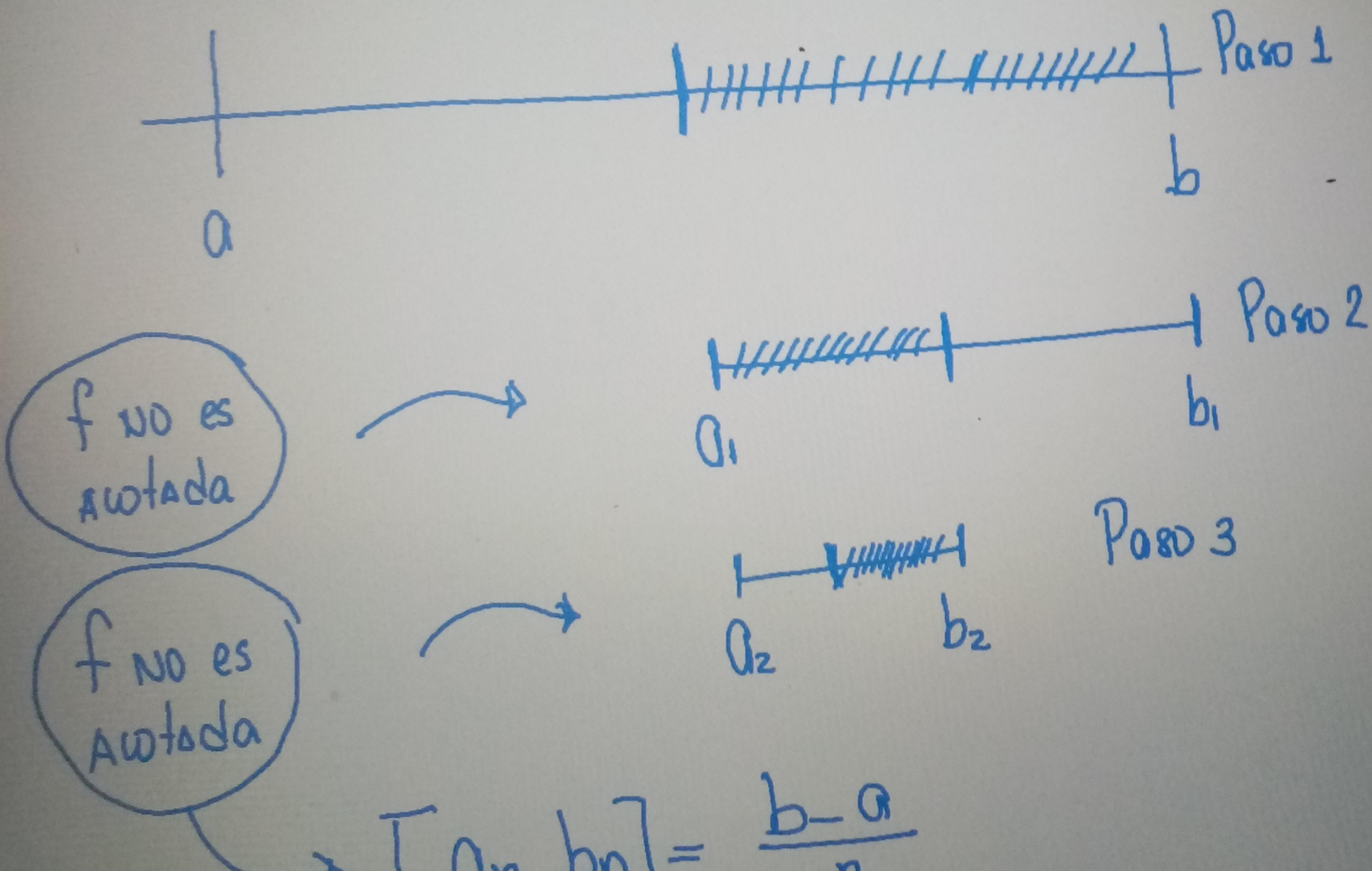


$$\boxed{-K \leq f(x) \leq K}$$

Supongamos que f no está acotada en [a,b].

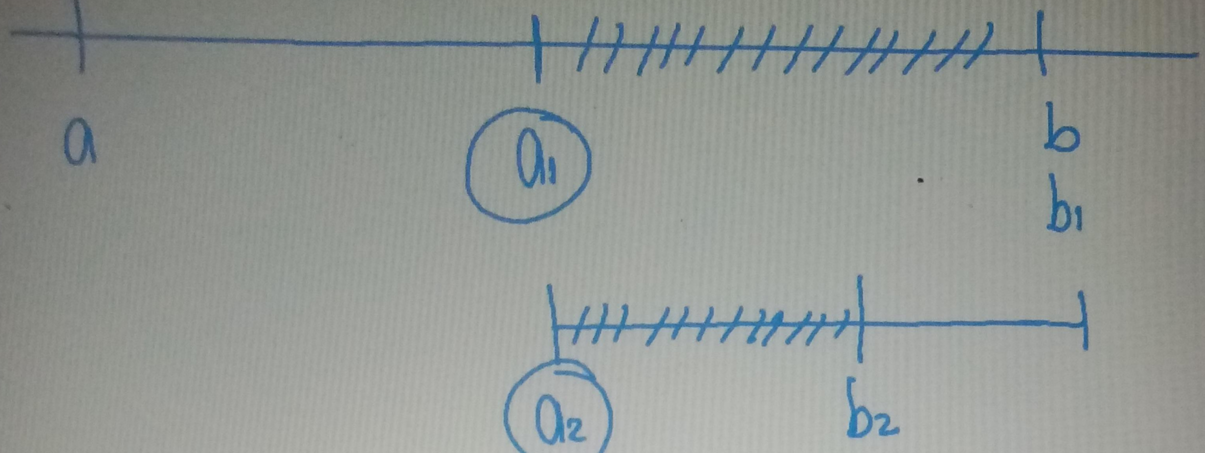


f No es acotada en al menos uno de los sig intervalos [a, c] o [c, b]



$$[a_n, b_n] = \frac{b-a}{2^n}$$

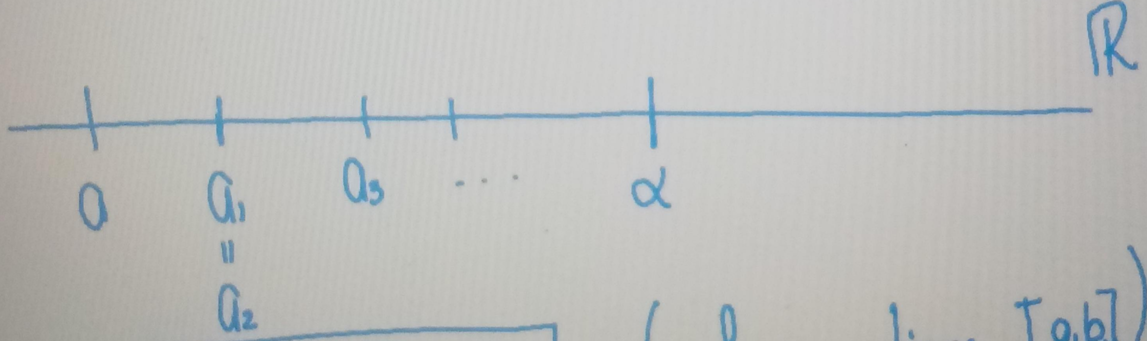
$$A = \{a, a_1, a_2, \ldots\}$$



$$A = \{a, a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots \}$$

$$A \subseteq [a,b]$$

$$\text{Sup } A = \alpha$$



$$\boxed{\alpha \in [a,b].}$$ (f es continua $[a,b]$)

f es continua en α. $\lim_{x \to \alpha} f(x) = f(\alpha)$

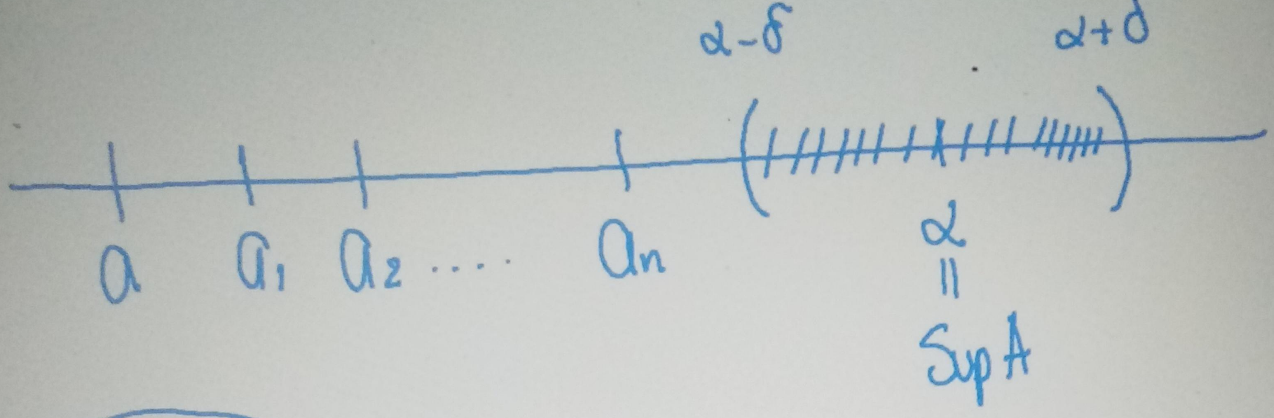
Para $\varepsilon = 1$ $\exists \delta > 0$ tal que

$\forall x \in (\alpha - \delta, \alpha + \delta)$ $|f(x) - f(\alpha)| < 1$

$-1 < f(x) - f(\alpha) < 1$ $\forall x (\alpha - \delta, \alpha + \delta).$

$-1 + f(\alpha) < f(x) < 1 + f(\alpha)$

$\longrightarrow$ $\boxed{f \text{ está acotada en } (\alpha-\delta, \alpha+\delta).}$



$n>>1$

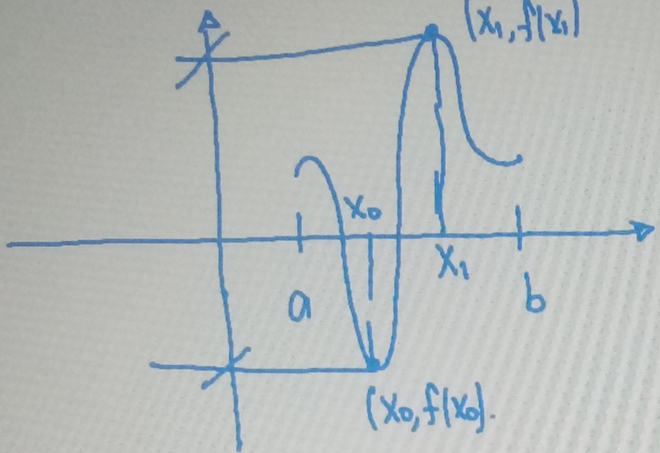
$$[a_n, b_n] \subseteq (\alpha-\delta, \alpha+\delta)$$

$\longrightarrow$ f está acotada en $[a_n, b_n]$

$\rightarrow\leftarrow$ Contradicción $\blacksquare$

Teorema: Si $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, entonces existen $x_0, x_1 \in [a,b]$ tal que

$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1) \quad \forall x \in [a,b]$$



Demostración:

Consideremos el sig. conjunto

$\{f(x) : x \in [a,b]\}$ es acotado por el Lema anterio $\to$

$$\operatorname{Sup}\{f(x) : x \in [a,b]\} = M$$
$$\operatorname{Inf}\{f(x) : x \in [a,b]\} = m$$

Obj $\exists\, x_0, x_1 \in [a,b]$

$$f(x_0) = m$$
$$f(x_1) = M$$

I) Demostrar que existe x_1, $f(x_1) = M = \operatorname{Sup}\{f(x) : x \in [a,b]\}$

II) Demostrar que existe x_0 $f(x_0) = m = \operatorname{Inf}\{f(x) : x \in [a,b]\}$.

I) Sea $M = \operatorname{Sup} f$

$$= \operatorname{Sup}\{f(x) : x \in [a,b]\}.$$

Mostraremos que existe $x_1 \in [a,b]$ tal que $f(x_1) = M$.

$\boxed{\text{(Absurdo) Supongamos que no existe } x \in [a,b] \text{ para el cual } f(x) = M.}$

Auxiliar $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$g(x) = M - f(x).$$

i) g es continua en $[a,b]$.

ii) $g(x) > 0 \quad \forall x \in [a,b]$

$\frac{1}{g} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \quad \left(\frac{1}{g}\right)(x) = \frac{1}{g(x)}$

continua. Lema anterior

$\longrightarrow \frac{1}{g}$ es acotada.

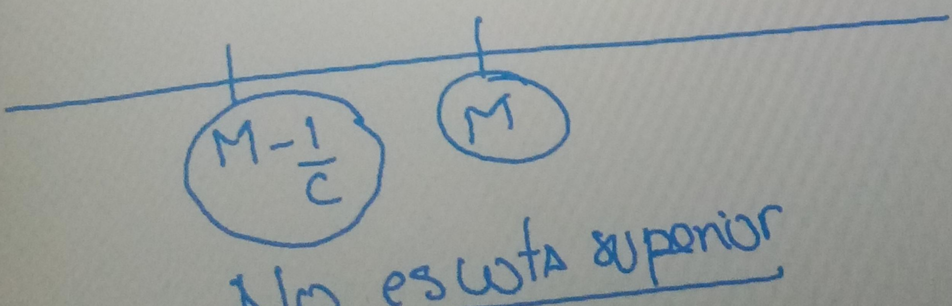
Existe $c>0$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{g(x)} < c \\[2ex] \dfrac{1}{M-f(x)} < c \\[2ex] \dfrac{1}{c} < M - f(x) \\[2ex] \boxed{f(x) < M - \dfrac{1}{c}} \end{array}\right\} \forall x \in [ab]$$

$$f(x) < M - \frac{1}{c} \quad \forall x \in [a,b]$$

$$M = \operatorname{Sup}\{f(x) : x \in [a,b]\}$$

Contradicción



No es cota superior

Resultados

(1) $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua

$\longrightarrow$ f es integrable.