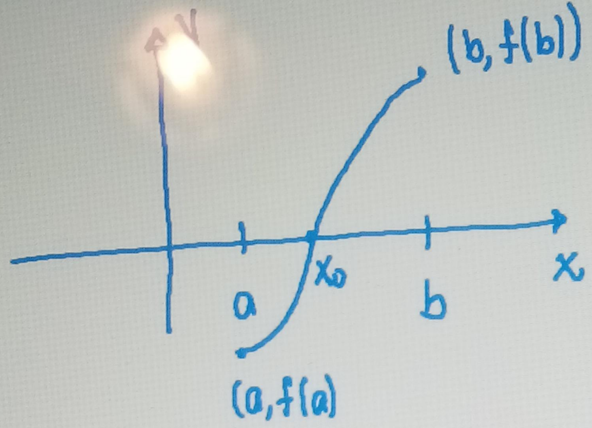
Teorema Bolzano

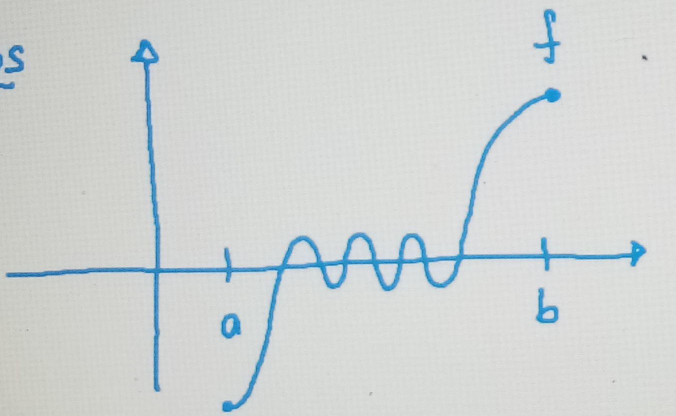
Si $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua y

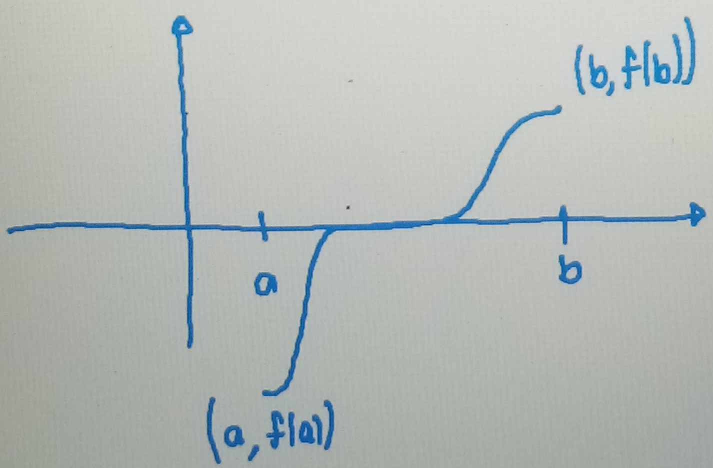
$\boxed{f(a)f(b) < 0} \to \exists\, x_0 \in (a,b)$ tal que

$$f(x_0) = 0.$$



Obs





Aplicación: Demostrar que la ecuación $x - \cos x = 0$ tiene una solución en el intervalo $[0, \pi/2]$.

$f(x) = x - \cos x$

$f : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$

continua

$f(0) = 0 - \cos 0 = -1 < 0$

$f(\pi/2) = \frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} > 0$

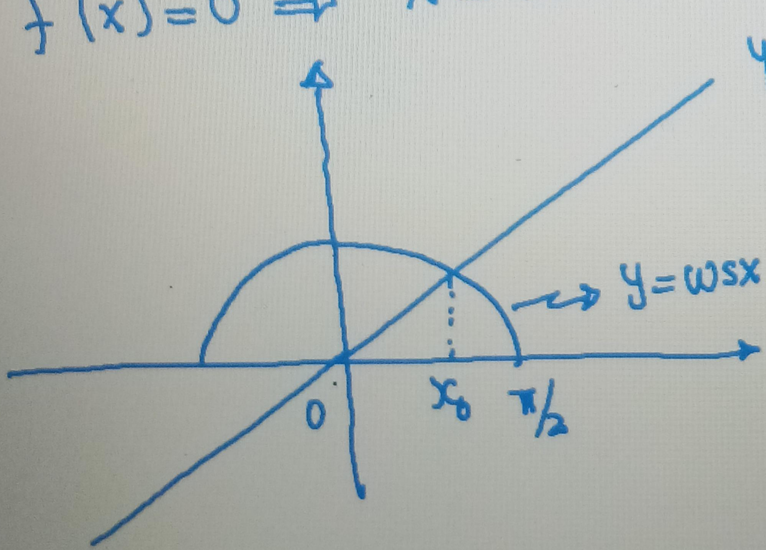
$\boxed{f(0)\,f(\pi/2) < 0} \xrightarrow[\text{Bolzano}]{} \exists\, x_0 \in (0, \pi/2)$

$f(x_0) = 0$

$x_0 - \cos x_0 = 0$

$f(x) = x - \cos x$

$f(x) = 0 \Rightarrow x = \cos x$



$f(0) = -1$ ✓

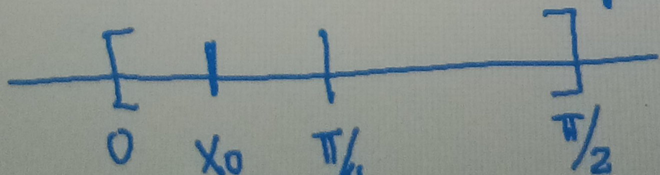
$f(\pi/4) = \pi/4 - \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}$

$f(\pi/2) = \pi/2$

$f(\pi/4) \cong 0{,}0782 > 0$ ✓

$f : [0, \pi/4] \to \mathbb{R}$

$f(x) = x - \cos x$

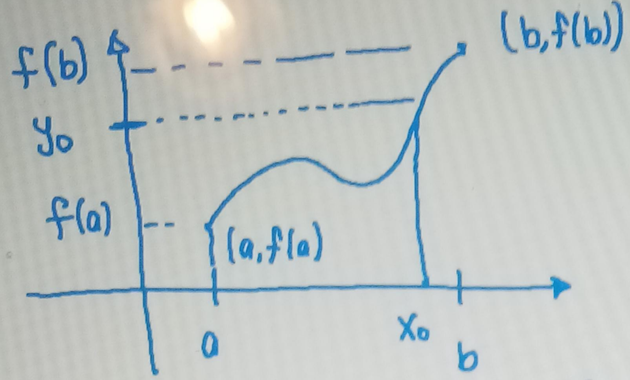


$\cancel{f : [\pi/4, \pi/2] \to \mathbb{R}}$

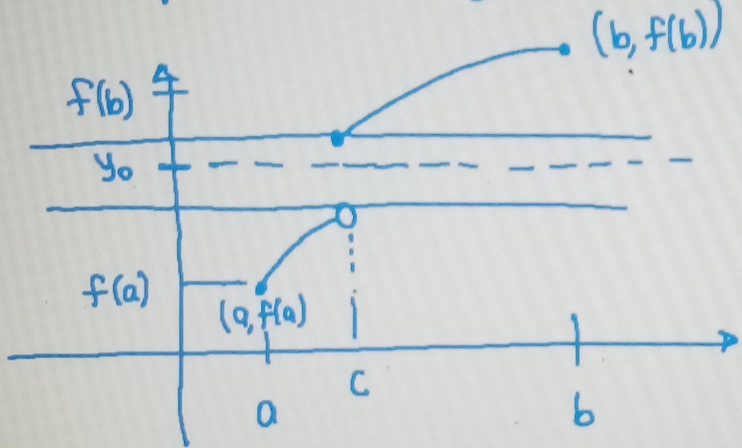
$\cancel{f(x) = x - \cos x}$

Aplicación (Teorema del Valor Medio).

Si $f:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}$ continua y consideremos y_0 un número entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe al menos un $x_0 \in [a,b]$ tal que $f(x_0)=y_0$.



$f(b) \leq y_0 \leq f(b)$



Demostración: Para y_0 entre $f(a)$ y $f(b)$ tenemos los siguientes

i) $y_0 = f(a)$ $\quad x_0 = a$ ✓
$\quad y_0 = f(b)$ $\quad x_0 = b$

$y_0 \neq f(a)$, $y_0 \neq f(b)$ $\quad$ ii) $\begin{cases} f(a) < y_0 < f(b) & \text{ii(a)} \\ f(b) < y_0 < f(a) & \text{ii(b)} \end{cases}$

$$\boxed{(f(a)-y_0)(f(b)-y_0) < 0}$$

ii(a)	$-$	$+$
ii(b)	$+$	$-$

$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua

y_0 entre $f(a)$ y $f(b)$.

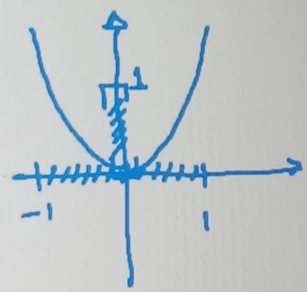
$g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$g(x) = f(x) - y_0$

$g(a) = f(a) - y_0$ $\qquad$ $g(a)g(b) = (f(a)-y_0)(f(b)-y_0)$

$g(b) = f(b) - y_0$ $\qquad$ $g(a)g(b) < 0$

$f_2(x) = x^2$



Por Bolzano (Aplicando a la g)

existe $x_0 \in [a,b]$. $g(x_0) = 0$

$g(x) = f(x) - y_0$

$g(x_0) = f(x_0) - y_0 = 0$

$$\boxed{f(x_0) = y_0}$$

Aplicación: (Imagen continua de un intervalo es un intervalo).

Prop: Si $f : I \to \mathbb{R}$ es una funcion continua en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, entonces la imagen $f(I)$ es un intervalo .

Obs: $f_1 : [0,1] \to \mathbb{R}$ $\quad f_1(x) = x \quad f([0,1]) = [0,1]$

$f_2 (-1,1) \to \mathbb{R}$ $\quad f_2(x) = x^2 \quad f(-1,1) = [0,1)$

Demostración:

$f: I \to \mathbb{R}$ continua $\xrightarrow{?}$ $f(I)$ es un intervalo.

Sean $y_0, y_1 \in \underline{\underline{f(I)}}$ y $y \in \mathbb{R}$ tal que

$y_0 < y < y_1$ hay que probar $y \in f(I)$.

$$f(I) = \{ y \in \mathbb{R} : y = f(x) : x \in I \}.$$

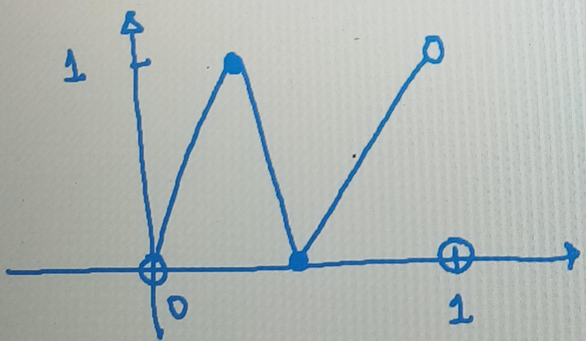
$y_0 \in f(I) \Rightarrow \exists x_0 \in I$ tal que $f(x_0) = y_0$

$y_1 \in f(I) \Rightarrow \exists x_1 \in I$ tal que $f(x_1) = y_1$

$f: [x_0, x_1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua

$y_0 = f(x_0) < y < f(x_1) = y_1$ por el Teorema del Valor medio $\exists x \in I$ tal que

$$f(x) = y.$$



$f(0,1) = [0,1]$
continua

$\boxed{f[a,b] = [c,d] \text{ continua } ?}$

Extremos Absolutos

Def: Sea $f: I \to \mathbb{R}$. Se dice que un punto $P = (x_0, f(x_0))$ de la gráfica de f es

- Un mínimo absoluto de f cuando

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in I.$$

$$\Updownarrow$$

El conjunto $f(I)$ tiene un mínimo

$$m = \min(f(I)) = \min\{f(x) : x \in I\} = f(x_0)$$

- Un máximo absoluto de f cuando

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in I$$

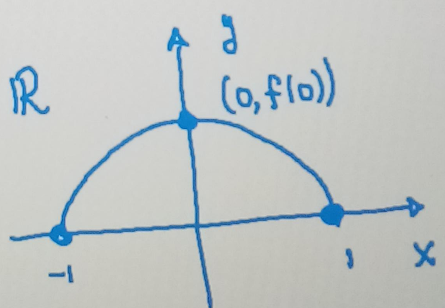
$$\Updownarrow$$

El conjunto $f(I)$ tiene un máximo

$$M = \max(f(I)) = \max\{f(x) : x \in I\} = f(x_0)$$

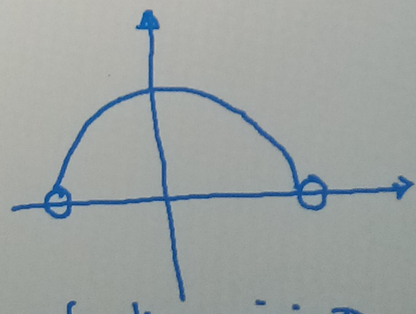
Ejemplos: $f_1 : [-1, 1] \to \mathbb{R}$

$$f_1(x) = 1 - x^2$$



Máximo Absoluto $x=0$

Mínimo Absolutos $x = \pm 1$



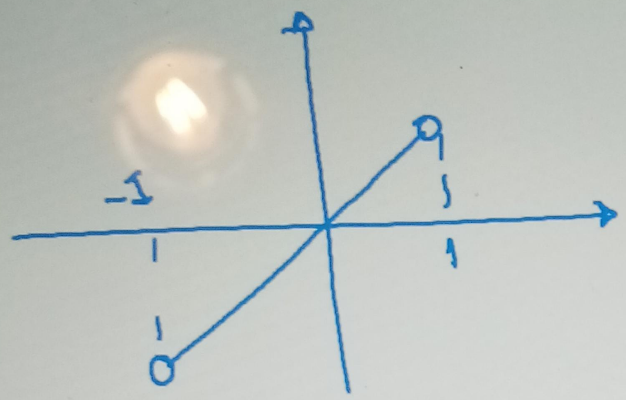
$$f_2 : (-1, 1) \to \mathbb{R}$$

$$f_2(x) = 1 - x^2$$

Máximo Absoluto $x=0$ No tiene mínimo Absoluto.

$f_3 : (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = x$

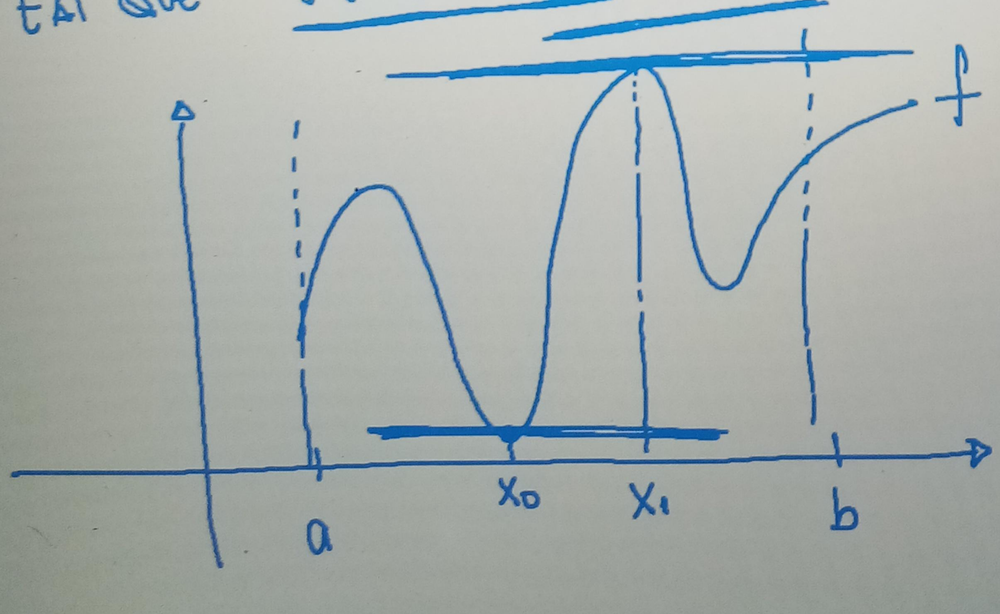


No tiene máximos ni mínimos Absolutos

Teorema (Weierstrass)

Si $f\,[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, entonces f tiene mínimo y máximo Absoluto.

Es decir, existen dos puntos $x_0, x_1 \in [a,b]$ tal que $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1) \quad \forall x \in [a,b]$



Resultado: $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua

f tiene un máximo abs en x_1

f tiene un mínimo abs en x_0

$$\longrightarrow \boxed{f\left([a,b]\right) = [f(x_0), f(x_1)]}$$

Demostración:

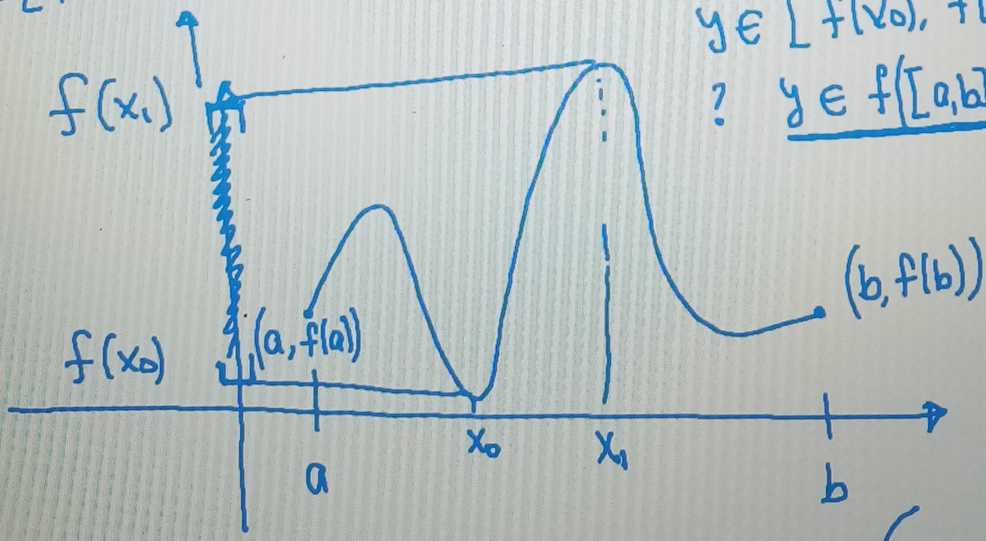
i) $f([a,b]) \subseteq [f(x_0), f(x_1)]$

ii) $[f(x_0), f(x_1)] \subseteq f([a,b])$.

ii $\boxed{[f(x_0), f(x_1)] \subseteq f([a,b])}$ ✓

$y \in [f(x_0), f(x_1)]$

? $y \in f([a,b])$



i $f([a,b]) \subseteq [f(x_0), f(x_1)]$ ✓

$$f\left([a,b]\right) = [f(x_0), f(x_1)].$$