Este teorema es particularmente útil en la teoría de las series de Fourier. (Ver teorema 11.16.) También merece interés la siguiente generalización.

Teorema 9.19. *Supongamos que* l.e.m.$_{n\to\infty} f_n = f$ *y* l.e.m.$_{n\to\infty} g_n = g$ *en* $[a, b]$. *Definimos*

$$h(x) = \int_a^x f(t)g(t)\,dt, \qquad h_n(x) = \int_a^x f_n(t)g_n(t)\,dt,$$

si $x \in [a, b]$. *Entonces* $h_n \to h$ *uniformemente en* $[a, b]$.

Demostración. Tenemos

$$h_n(x) - h(x) = \int_a^x (f - f_n)(g - g_n)\,dt$$
$$+ \left(\int_a^x f_n g\,dt - \int_a^x fg\,dt\right) + \left(\int_a^x f g_n\,dt - \int_a^x fg\,dt\right).$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, podemos escribir

$$0 \le \left(\int_a^x |f - f_n|\,|g - g_n|\,dt\right)^2 \le \left(\int_a^b |f - f_n|^2\,dt\right)\left(\int_a^b |g - g_n|^2\,dt\right).$$

La demostración es ahora una consecuencia inmediata del teorema 9.18.

9.14 SERIES DE POTENCIAS

Una serie infinita de la forma

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z - z_0)^n,$$

o más brevemente

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \tag{14}$$

se llama una serie de potencias en $z - z_0$. En ella z, z_0 y a_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ son números complejos. A toda serie de potencias (14) se asocia un círculo, llamado el *círculo de convergencia,* tal que la serie es absolutamente convergente en todo z del interior de este círculo y divergente en todo z de su exterior. El centro del círculo es z_0 y su radio se llama el *radio de convergencia* de la serie de potencias. (El radio puede tomar los valores 0 o $+\infty$ en los casos extremos.) El próximo teorema establece la existencia del círculo de convergencia y nos proporciona un método para calcular su radio.

Teorema 9.20. *Dada una serie de potencias* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, *sea*

$$\lambda = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}, \qquad r = \frac{1}{\lambda},$$

(*en donde* $r = 0$ *si* $\lambda = +\infty$ *y* $r = +\infty$ *si* $\lambda = 0$). *Entonces la serie converge absolutamente si* $|z - z_0| < r$ *y diverge si* $|z - z_0| > r$. *Además la serie converge uniformemente en todo subconjunto compacto interior al círculo de convergencia.*

Demostración. Aplicando el criterio de la raíz (teorema 8.26), tenemos

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(z - z_0)^n|} = \frac{|z - z_0|}{r},$$

y entonces $\sum a_n(z - z_0)^n$ converge absolutamente si $|z - z_0| < r$ y diverge si $|z - z_0| > r$.

Para probar la segunda parte del teorema, basta observar que si T es un subconjunto compacto del círculo de convergencia, existe un punto p de T tal que $z \in T$ implica

$$|z - z_0| \le |p - z_0| < r.$$

Luego $|a_n(z - z_0)^n| \le |a_n(p - z_0)^n|$ para cada z de T y entonces es aplicable el criterio M de Weierstrass.

NOTA. Si el límite $\lim_{n\to\infty} |a_n/a_{n+1}|$ existe (o si es $+\infty$), su valor es igual al radio de convergencia de (14). (Ver el ejercicio 9.30.)

Ejemplo 1. Las dos series $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n^2$ tienen el mismo radio de convergencia, $r = 1$. En la frontera del círculo de convergencia, la primera no converge en ningún punto, y la segunda converge en todos.

Ejemplo 2. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n$ tiene radio de convergencia $r = 1$, pero no converge en $z = 1$. Sin embargo, converge en todos los demás puntos de la frontera en virtud del criterio de Dirichlet (teorema 8.28).

Estos ejemplos ponen de manifiesto porqué el teorema 9.20 no dice nada acerca del comportamiento de una serie de potencias en la *frontera* del círculo de convergencia.

Teorema 9.21 *Supongamos que la serie de potencias* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ *converge para cada* z *de* $B(z_0; r)$. *Entonces la función* f *definida por la ecuación*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \qquad si \quad z \in B(z_0; r), \tag{15}$$

es continua en $B(z_0; r)$.

Demostración. Puesto que cada punto de $B(z_0; r)$ pertenece a algún subconjunto compacto de $B(z_0; r)$, la conclusión se deduce inmediatamente del teorema 9.7.

NOTA. Diremos que la serie (15) *representa* f en $B(z_0; r)$. Se llama también *desarrollo de* f *en serie de potencias* en torno de z_0. Las funciones que admiten un desarrollo en serie de potencias son continuas en el interior del círculo de convergencia. Sin embargo, se verifican mucho más que esto. Probaremos más adelante que tales funciones admiten derivadas de cualquier orden en el interior del círculo de convergencia. Para demostrarlo deberemos utilizar el siguiente teorema:

Teorema 9.22. *Supongamos que* $\sum a_n(z - z_0)^n$ *converge si* $z \in B(z_0; r)$. *Supongamos que la ecuación*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n,$$

es válida para cada z *de un cierto subconjunto abierto* S *de* $B(z_0; r)$. *Entonces, para cada punto* z_1 *de* S, *existe un entorno* $B(z_1; R) \subseteq S$ *en el que* f *tiene un desarrollo en serie de potencias de la forma*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(z - z_1)^k, \tag{16}$$

en donde

$$b_k = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} a_n(z_1 - z_0)^{n-k} \qquad (k = 0, 1, 2, \dots). \tag{17}$$

Demostración. Si $z \in S$, tenemos

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_1 + z_1 - z_0)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (z - z_1)^k (z_1 - z_0)^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} c_n(k),$$

en donde

$$c_n(k) = \begin{cases} \binom{n}{k} a_n(z - z_1)^k(z_1 - z_0)^{n-k}, & \text{si } k \le n, \\ 0, & \text{si } k > n. \end{cases}$$

Ahora elegimos R tal que $B(z_1; R) \subseteq S$ y suponemos que $z \in B(z_1; R)$. Entonces la serie reiterada $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} c_n(k)$ converge absolutamente, ya que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |c_n(k)| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|(|z - z_1| + |z_1 - z_0|)^n = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|(z_2 - z_0)^n, \tag{18}$$

en donde

$$z_2 = z_0 + |z - z_1| + |z_1 - z_0|.$$

Pero

$$|z_2 - z_0| < R + |z_1 - z_0| \le r,$$

y por lo tanto la serie (18) converge. Entonces, por el teorema 8.43, podemos intercambiar el orden de sumación para obtener

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_n(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} a_n(z - z_1)^k(z_1 - z_0)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} b_k(z - z_1)^k,$$

en donde b_k está dado por (17). Esto termina la demostración.

NOTA. En la demostración hemos visto que es posible utilizar cualquier $R > 0$ con tal de que se verifique la condición

$$B(z_1; R) \subseteq S. \tag{19}$$

Teorema 9.23. *Supongamos que* $\sum a_n(z - z_0)^n$ *converge para cada* z *de* $B(z_0; r)$. *Entonces la función* f *definida por medio de la ecuación*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \qquad si \quad z \in B(z_0; r), \tag{20}$$

tiene una derivada $f'(z)$ *para cada* z *de* $B(z_0; r)$ *dada por*

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z - z_0)^{n-1}. \tag{21}$$

LAs series de potencia (20) y (21) tienen el mismo radio de convergencia.