

NIB – Curso Ingeniería Biomédica 2023

Clase: Elementos de Metrología Física y Legal

Clase # 2: Incertidumbre combinada

Incertidumbre expandida

Docente: Dr. Leonardo NICOLA SIRI

Profesor Senior



Carrera Ingeniería Biomédica

Universidad Tecnológica

Fray Bentos – Uruguay

CONTACTO: leonardo.nicola@utec.edu.uy

Objetivos

- 1) Entender la **MEDICION** como procedimiento físico
- 2) Entender el encuadre disciplinar **METROLOGIA**
- 3) Conocer y utilizar la **TERMINOLOGÍA LEGAL de METROLOGÍA**
- 4) *Eliminar ambigüedades y evitar el uso incorrecto de la terminología*



Conceptos fundamentales: Incertidumbre / Resolución / Error / Precisión

Causales de incertidumbre: lectura / calibración / dispersión

Error por (*des*)calibración:

incertidumbre del error / corrección del error / el error como incertidumbre

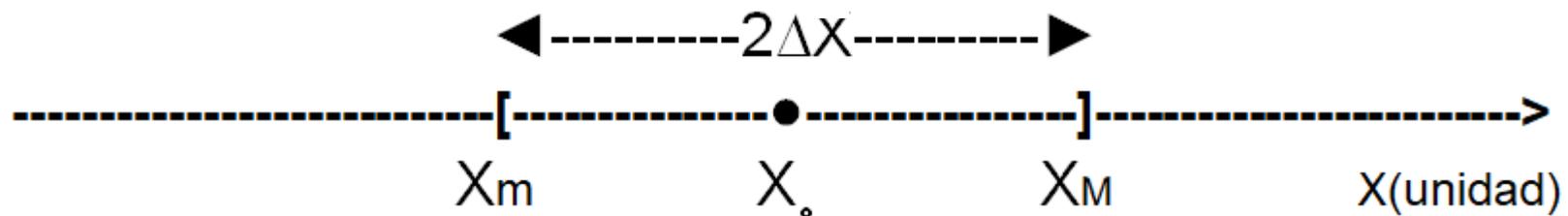
Incertidumbre estadística (y estadística de la incertidumbre)



Intervalo de incertidumbre

El “resultado” de la medición es la
TOTALIDAD del intervalo de incertidumbre
No hay valores “preferibles” o “mejores”

ATENCIÓN
No es “ERROR”
es “INCERTIDUMBRE”



Notación 1: $x_L = [x_m; x_M]$ (unidad)

Notación 2: $x_L = [x_0; \Delta x]$ (unidad)



$X = (x_0 \pm \Delta x)$ (unidad)

Equivalencias: x_0 (unidad) = $\frac{1}{2} (x_M + x_m)$; valor representativo (ubicación) del intervalo

Δx (unidad) = $\frac{1}{2} (x_M - x_m)$; “incertidumbre”, (U, “uncertainty”)

x_M (unidad) = $x_0 + \Delta x$; extremo inferior del intervalo, valor mínimo del mensurando

x_m (unidad) = $x_0 - \Delta x$; extremo superior del intervalo, valor máximo del mensurando



Incertidumbre **ABSOLUTA** e Incertidumbre **RELATIVA** (según VIM)

Dado un intervalo de incertidumbre $x = [x_m ; x_M](\text{unidad}) = [x_0 \pm \Delta x](\text{unidad})$

Se define **Incertidumbre ABSOLUTA**: Δx (unidad)

Incertidumbre RELATIVA: $\varepsilon = \Delta x / x_0$; ADIMENSIONAL (sin unidades)

Incertidumbre RELATIVA PORCENTUAL: $\varepsilon(\%) = 100 * \varepsilon$; ADIMENSIONAL (sin unidades)

ε y $\varepsilon(\%)$ indican la “calidad” de la medida

(cuánto “pesa” la incertidumbre Δx respecto del valor representativo x_0)

RESUMEN: (queda por demostrar, * y /)

Para $c = a+b$ y $c = a-b \rightarrow \Delta c = \Delta a + \Delta b$; $\varepsilon_c = \Delta c / c_0 \rightarrow$ se suman las incertidumbres absolutas

Para $c = a*b$ y $c = a/b \rightarrow \varepsilon_c = \varepsilon_a + \varepsilon_b$; $\Delta c = \varepsilon_c * c_0 \rightarrow$ se suman las incertidumbres relativas

La incertidumbre **RELATIVA** facilita el cálculo de propagación de incertidumbre en (*) y en (/)



Terminología Metrológica (según VIM)

Para cuantificar (valorar) la incertidumbre se deben considerar las **causales de incertidumbre**

- a) Incertidumbre de lectura (u_L): **NO ES DE NATURALEZA ALEATORIA!!**
- b) Incertidumbre por calibración (u_{cal}): puede o no, incluir procesos aleatorios
- c) Incertidumbre por dispersión (u_P): **ES INTRINSECAMENTE ALEATORIA**



Incertidumbre de lectura (u_L) → Resolución

Instrumento **DIGITAL**



$$u_L = \pm 1 \text{ lsd}$$

Instrumento **ANALÓGICO**

(de “escala y aguja”)



$u_L = \pm 1/1$ mínima división de la escala

$u_L = \pm 1/2$ mínima división de la escala

$u_L = \pm 1/3$ mínima división de la escala

$u_L = \pm 1/4$ mínima división de la escala

$u_L = \pm 1/5$ mínima división de la escala



Exactitud (Inexactitud = **ERROR DE MEDICIÓN**)

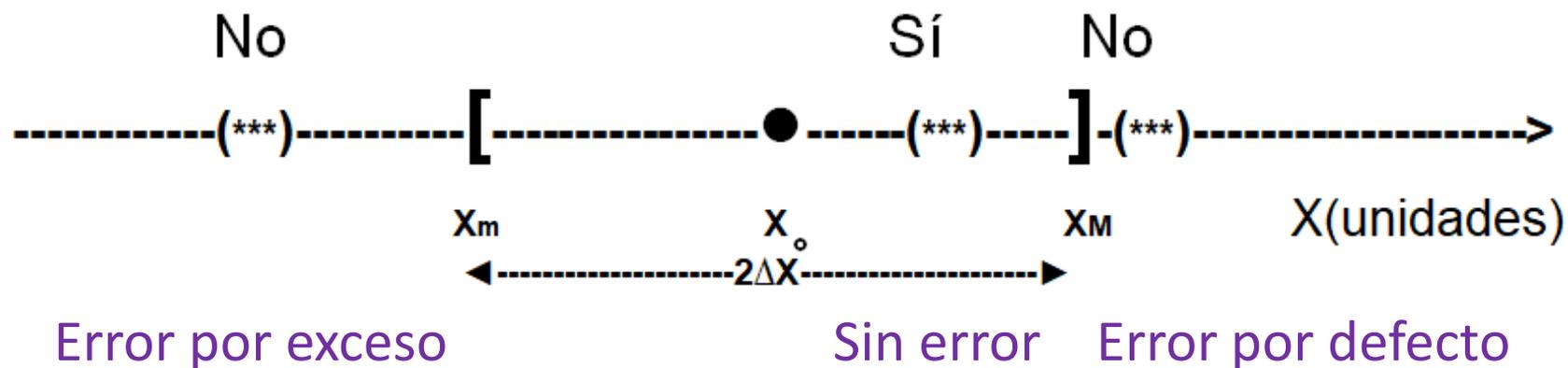
ERROR DE MEDICIÓN:

diferencia entre la “medida” $[X_o \pm \Delta X]$ y un “valor de referencia” (***) $[V_p \pm \delta V]$,

NOTA: $[V_p \pm \delta V]$ suele considerarse como el supuesto “valor real” de la magnitud

$$E = [X_o \pm \Delta X] - [V_o \pm \delta V] = [(X_o - V_o) \pm (\Delta X + \delta V)] \text{ unidades}$$

Puede resultar en un **Error por Exceso** ($E > 0$), o en un **Error por Defecto** ($E < 0$)



Exactitud -----> Inexactitud = Error de medición

Como se corrige?

- 1) **Ajuste del instrumento:** Se modifican controles (mandos) “de ajuste” en el instrumento de medición hasta que las “lecturas” coincidan con el “valor de referencia”  se ha eliminado el “ERROR”, no la incertidumbre del “ERROR”
El diseño del instrumento debe contemplar la función de “ajuste”
- 2) **Calibración del instrumento:**
 - a) Se realizan pares de comparaciones entre “lecturas” $X_L = X_o \pm \Delta X$ y “referencias” $V_o \pm \delta V$
 - b) Para cada par, se calcula el ERROR $E = [X_o \pm \Delta X] - [V_o \pm \delta V] = [(X_o - V_o) \pm (\Delta X + \delta V)]$
- 3) **Corrección del error de la medición:**
 - c) Para nuevos valores “leídos” X_L , el ERROR seria $E = X_L - X^{\text{real}}$
 - d) El valor “corregido” es $X_c = X_L - E = [(X_{Lo} - E_o) \pm (\Delta X_L + \Delta E)]$
donde $\Delta X_c = \Delta X_L + \Delta E = \delta V + 2 \Delta X_L$

NOTAS: E puede obtenerse mediante una única medición o como promedio de varias mediciones.
Debe determinarse E para cada zona del rango del instrumento, puede resultar constante en todo el rango.

Ejercicio: Corrección del Error de medición mediante Calibración

Tabla de Calibración		
Valor de Referencia V_r (unidad)	Valor de Lectura X_L (unidad)	Error durante la calibración $E = X_L - V_r$ (unidad)
$0,0 \pm 0,1$	$0,3 \pm 0,5$	$+ 0,3 \pm 0,6$
$5,0 \pm 0,1$	$5,5 \pm 0,5$	$+ 0,5 \pm 0,6$
$10,0 \pm 0,1$	$9,8 \pm 1,0$	$- 0,2 \pm 1,1$
$15,0 \pm 0,1$	$15,0 \pm 1,0$	$0,0 \pm 1,1$
$20,0 \pm 0,1$	$19,5 \pm 1,0$	$- 0,5 \pm 1,1$

Tabla para corrección por calibración		
Valor de Lectura X_L (unidad)	Error durante la calibración E (unidad)	Valor corregido $X_c = X_L - E$ (unidad)
$0,0 \pm 0,5$	$+ 0,3 \pm 0,6$	$- 0,7 \pm 1,1$
$2,3 \pm 0,5$	$+ 0,4 \pm 0,6$	$1,9 \pm 1,1$
$6,5 \pm 0,5$	$+ 0,5 \pm 0,6$	$6,0 \pm 1,1$
$8,2 \pm 0,5$	$+ 0,4 \pm 0,8$	$8,2 \pm 1,3$
$11,2 \pm 1,0$	$- 0,2 \pm 1,1$	$11,4 \pm 2,1$
$16,0 \pm 1,0$	$0,0 \pm 1,1$	$16,0 \pm 2,1$
$19,7 \pm 1,0$	$- 0,5 \pm 1,1$	$20,2 \pm 2,1$

EJERCICIO: Con los datos de la CALIBRACION, construya una gráfica de E vs. X_L ;

Compare con los valores de E en la Tabla de CORRECCION, si es necesario corríjala y rehaga los cálculos



Precisión (según el VIM)---> **Repetibilidad de las medidas**
(lo contrario de “dispersión”)

Al REITERAR el procedimiento de medición puede suceder

a) SE REPITEN los “valores”



son intervalos = respecto de la Incertidumbre de Lectura

si son todos iguales no hay dispersión, el “**resultado**” es **UN UNICO INTERVALO**



b) NO SE REPITEN los “valores”



intervalos \neq respecto de la Incertidumbre de Lectura

al ser “diferentes” hay dispersión

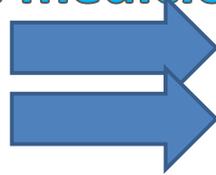
cuál es el “resultado”?

Precisión (según el VIM)

Repetibilidad de las medidas (lo contrario de “dispersión”)

Al REITERAR el procedimiento de medición puede suceder

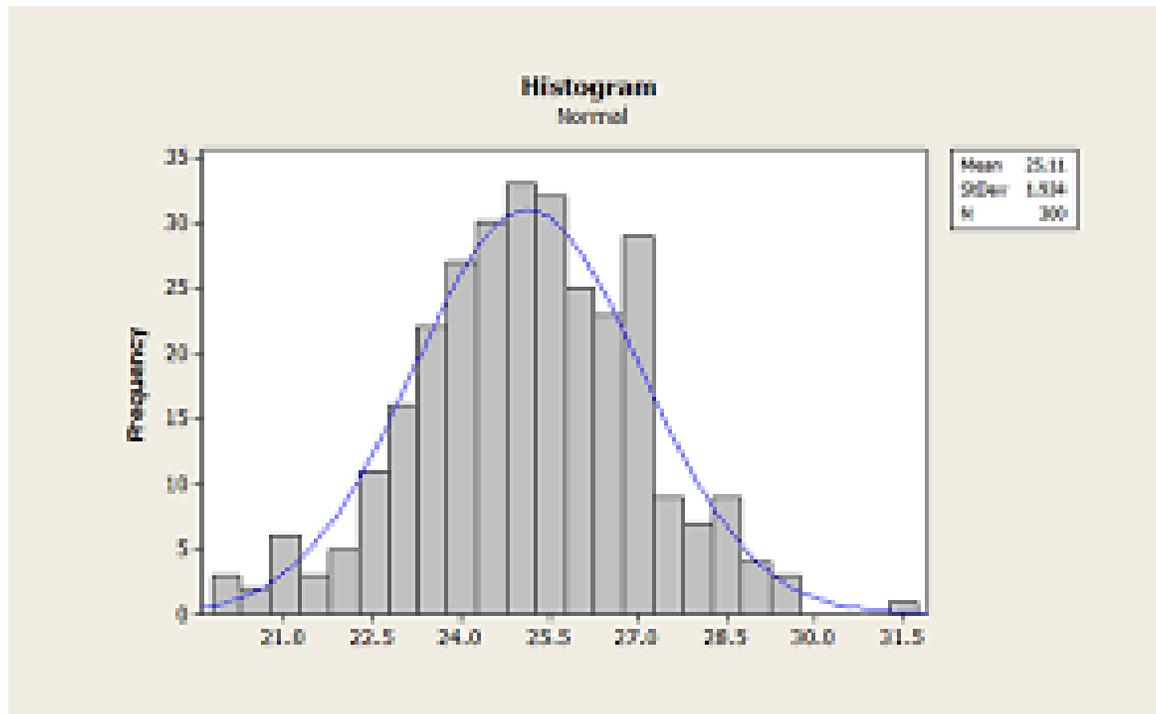
a) SE REPITEN los valores de lectura



Resultan = respecto de la Incertidumbre de Lectura

b) NO SE REPITEN los valores de lectura

Resultan ≠ respecto de la Incertidumbre de Lectura



Modelo estadístico “clásico”

se aplica a “valores”, no a “intervalos”!

$$\langle X \rangle = \int x f(x) dx \cong (1/N) \sum n_i x_i$$

$$\langle X^2 \rangle = \int x^2 f(x) dx \cong (1/N) \sum n_i x_i^2$$

$$\text{Var} = \langle X^2 \rangle - (\langle X \rangle)^2$$

$$\text{DE} = \sqrt{\text{Var}} \quad ; \quad \text{EE} \cong \text{DE} / \sqrt{(N-1)}$$

Finalmente: el “resultado” es

$$X = [\langle X \rangle \pm \text{DE}] \quad \text{o bien} \quad X = [\langle X \rangle \pm \text{EE}]$$

Incertidumbre Combinada (según el VIM):

Deben considerarse TODAS las causales de incertidumbre

Teoría de Probabilidades:

Si en un fenómeno (el proceso de medición) intervienen fuentes causales aleatorias INDEPENDIENTES, la VARIANZA total es la suma de las varianzas individuales de cada fuente causal.

Fuentes de Incertidumbre:

Incertidumbre de lectura: U_L de naturaleza *NO ESTOCASTICA*

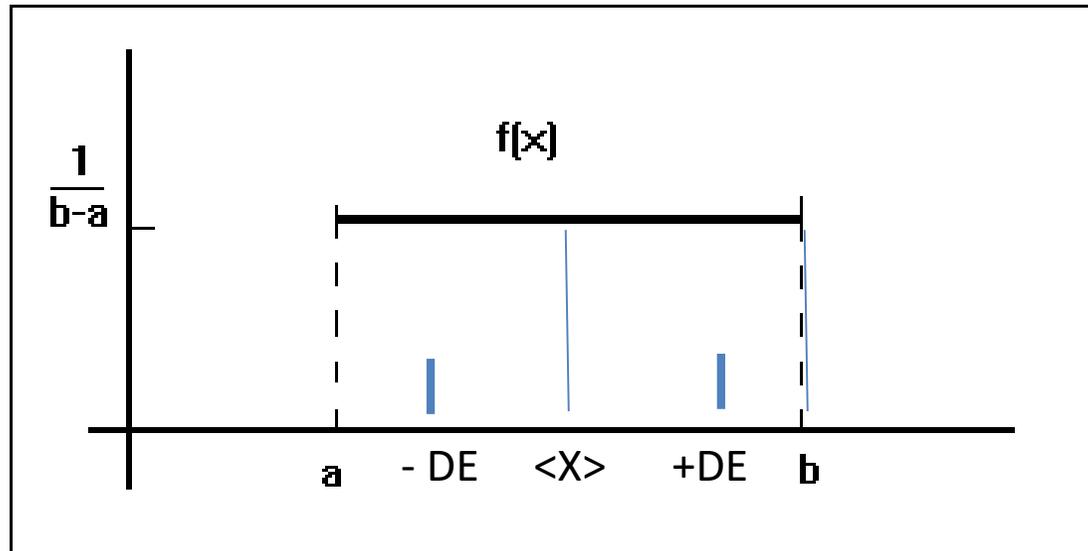
Incertidumbre de calibración: U_{cal} puede ser o no, *ESTOCASTICA*

Incertidumbre por dispersión: U_p de naturaleza *ESTOCASTICA*

Incertidumbre Combinada (según el VIM): Cálculo de U_L

Paso I: En el proceso de ‘lectura’ se genera un intervalo de incertidumbre $[X_0 \pm \Delta X_L]$ de naturaleza no aleatoria.

SOLUCION: Se asocia al intervalo de incertidumbre por lectura, una distribución uniforme de probabilidad, $f(x)$



Paso II: Se igualan los extremos de la distribución uniforme, con los extremos del intervalo $[X_0 \pm \Delta x]$

$$a = X_0 - \Delta X_L, b = X_0 + \Delta X_L \rightarrow (b-a) = 2 \Delta X_L$$

Paso III: Se calculan los parámetros de ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA de la distribución uniforme

$$\langle X \rangle = \int x f(x) dx = (b-a) / 2 = 0,5 (b-a)$$

$$\langle X^2 \rangle = \int x^2 f(x) dx = (a^2 + ab + b^2) / 3$$

$$\text{Var} = (\langle X^2 \rangle - (\langle X \rangle)^2) = ((b-a)^2) / 12 = 0,0833 (b-a)^2$$

$$\text{DE} = \sqrt{\text{Var}} = (b-a) / \sqrt{12} = 0,289 (b-a)$$

$$p\{x \in [\langle X \rangle \pm \text{DE}]\} = \int f(x) dx = 1 / \sqrt{3} = 0.577 \rightarrow \mathbf{57,7\%}$$

Paso IV: Se define $U_L = \pm \text{DE}_{\text{dist.unif.}}$; el DE por ‘lectura’

$$\text{Resulta en } U_L = \pm (b-a) / \sqrt{12} = \pm 2 \Delta X_L / \sqrt{12}$$

$$\mathbf{U_L = \pm \Delta X_L / \sqrt{3} = \pm 0,577 \Delta X_L}$$

Incertidumbre Combinada (según el VIM)

Incertidumbre de Lectura:

Resolución = $\pm \Delta X_L$; intervalo (b-a) = $2 \Delta X_L$

$$(U_L)^2 = \text{Varianza} = ((b-a)^2) / 12 = (\Delta X_L)^2 / 3 = 3,33 (\Delta X_L)^2$$

Incertidumbre por (des) Calibración:

Incertidumbre del patrón (tolerancia) = $\pm \delta V$; Resolución del instrumento = $\pm \Delta X_L$

Se asocia con distribución uniforme:

$$(U_{cal})^2 = \text{Varianza} = ((\delta V + 2 \Delta X_L)^2) / 12 = 0,0833 ((\delta V + 2 \Delta X_L)^2)$$

Incertidumbre por dispersión (precisión):

$(U_p)^2 = \text{Varianza} = DE^2$ o bien EE^2

Incertidumbre combinada:

$$UC = \sqrt{ (U_L)^2 + (U_{cal})^2 + (U_p)^2 }$$

Incertidumbre Combinada (según el VIM)

Incertidumbre de Lectura

Incertidumbre por (des) Calibración

Incertidumbre por dispersión (precisión)

Incertidumbre combinada:

Se calcula el Desvío Estándar “combinando” las varianzas:

$$U_c = \sqrt{ [(U_L)^2 + (U_{cal})^2 + (U_p)^2] }$$

Se asocia **U_c** a una distribución normal, $\{N(\langle X \rangle ; U_c)\}$

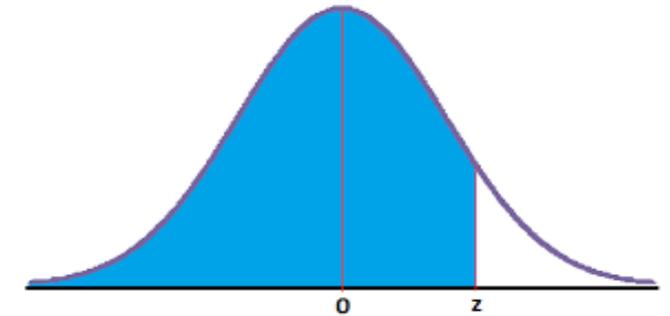
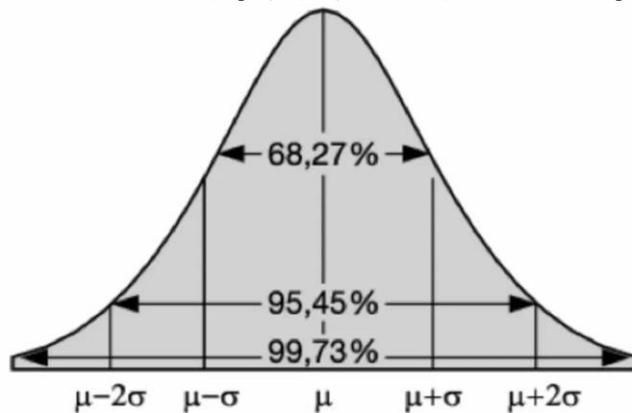
Incertidumbre Expandida (según el VIM)

Se asume que todo el proceso de medición se describe por una distribución normal con media $\langle X \rangle$ y $DE = U_c = \sigma$ (incertidumbre combinada del proceso de medición).

Definiendo la **incertidumbre expandida** $U_e = k U_c$, se sigue que el **intervalo de confianza** $x = \langle X \rangle \pm U_e$ expresa la probabilidad $p(k, x)$ de que el valor x del mensurando, se encuentre en el intervalo $\langle X \rangle \pm k U_c$.

El factor “k” se denomina “factor de cobertura”

Para $k = 1$, $p(1, x) = 68\%$	$p(k, x) = 90\%$	si $k = 1,64$	$U_e = 1,64 U_c$
Para $k = 2$, $p(2, x) = 95,5\%$	$p(k, x) = 95\%$	si $k = 1,96$	$U_e = 1,96 U_c$
Para $k = 3$, $p(3, x) = 99,7\%$	$p(k, x) = 99\%$	si $k = 2,58$	$U_e = 2,58 U_c$



$p(k, x) = p \{x \leq (\langle X \rangle + k U_c)\}$
Equivale a $p(z \leq k)$

El estadístico $Z = (x - \langle X \rangle) / U_c$ tiene distribución **Normal (0;1)**

Bibliografía específica:

VIM - Vocabulario Internacional de Metrología – Conceptos fundamentales y generales, y asociados

Ed. BIPM (Bureau International des Poids et Mesures) , 1ra edición en español, 2008

GUM - Evaluation of measurement data — Guide to the expression of uncertainty in measurement (JCGM 100:2008, GUM 1995 with minor corrections) - First edition September 2008

Ed. BIPM (Bureau International des Poids et Mesures), JCGM 2008

Expresión de la incertidumbre de medida en las calibraciones / ensayos; (GUI-LE-01)

Ed. OAA Organismo Argentino de Acreditación – 2013

Units and conversion charts – T. Wildi (1981)

Ed. IEEE PRESS, New York, EEUU (1981); ISBN 0-87942-273-4; IEEE Order number: PP0267-5



Bibliografía complementaria:

Foundations of Metrology, - J.A. Simpson – J. Res. Nat. Bureau of Standards (EEUU), Vol. 86, No.3, (1981)

Las definiciones de las unidades de medida en su nueva etapa – R.J. Lazos Martínez y J.M. López Romero; Simposio de Metrología 2010, SM2010-S5D1 Ed. Centro Nacional de Metrología (México) (2010)

Estimación de incertidumbres. Guía GUM, - Mar PÉREZ HERNÁNDEZ - e-medida. Revista Española de Metrología. Diciembre 2012 - https://www.uv.es/meliajl/Docencia/WebComplementarios/GuiaGUM_e_medida.pdf

Links útiles:

Vocabulario Internacional de Metrología navegable online: <http://jcgm.bipm.org/vim/en/index.html>

CENAM Publicaciones Gratuitas: <http://www.cenam.mx/publicaciones/gratuitas/>

Software Open para Cálculo de Incertidumbre: <http://www.npl.co.uk/science-technology/mathematics-modelling-and-simulation/mathematics-and-modelling-for-metrology/mmm-software-downloads>



FIN de la 2ª CLASE de METROLOGIA

Preguntas?

**Por consultas: Leonardo NICOLA SIRI
leonardo.nicola@utec.edu.uy**