Solución Práctico 6

1.1 a. $||u|| = \sqrt{54}$, $||v|| = \sqrt{11}$, $\langle u, v\rangle = -20$, $u \wedge v = (-4, 13, 3)$, $||u \wedge v|| = \sqrt{194}$.

b. $u \wedge (v \wedge w) = (37, -3, -11)$, $(u \wedge v) \wedge w = (29, 11, -9)$.

1.2 a. Sabemos que $||v||^2 = \langle v, v\rangle$, por lo tanto, tenemos que

$$||x + y||^2 = \langle x + y, x + y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle$$

donde usamos vale la propiedad distributiva. Además, sabemos que el producto interno es conmutativo, por lo que concluimos que

$$||x + y||^2 = ||x||^2 + 2\langle x, y\rangle + ||y||^2$$

1.3 a. $||u|| = 3\sqrt{2}$

b. $||u|| = 3(1 + \sqrt{3})$

c. No es necesario que $u = w$. Se tiene que $u - w$ debe ser ortogonal a v

1.4 a. Si $w \in \mathbb{R}^3$ cumple que $u \wedge w = u \wedge v$, entonces, $u \wedge (w - v) = 0$. Recordar que el producto vectorial de dos vectores es nulo si estos son colineales, es decir, $w - v = \alpha u$, con $\alpha \in \mathbb{R}$.

1.6 a. Para esta parte alcanza hacer el producto AA^{-1} y ver que da la identidad:

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle u, u\rangle & \langle u, v\rangle & \langle u, w\rangle \\ \langle v, u\rangle & \langle v, v\rangle & \langle v, w\rangle \\ \langle w, u\rangle & \langle w, v\rangle & \langle w, w\rangle \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ||u||^2 & 0 & 0 \\ 0 & ||v||^2 & 0 \\ 0 & 0 & ||w||^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b. La única diferencia con la parte anterior es que ahora no podemos hacer el último paso, por lo tanto, para conseguir unos en la diagonal, podemos tomar la inversa como

$$\begin{pmatrix} \frac{u_1}{||u||^2} & \frac{v_1}{||v||^2} & \frac{w_1}{||w||^2} \\ \frac{u_2}{||u||^2} & \frac{v_2}{||v||^2} & \frac{w_2}{||w||^2} \\ \frac{u_3}{||u||^2} & \frac{v_3}{||v||^2} & \frac{w_3}{||w||^2} \end{pmatrix}$$

c. Para simplificar las cuentas, podemos asumir que una de las tapas del paralelepípedo está apoyada sobre el plano $z = 0$. Esto equivale a suponer que $u = (u_1, u_2, 0), v = (v_1, v_2, 0)$ y como los vectores son ortogonales, $w = (0, 0, w_3)$.

Recordar que calcular el volumen del paralelepípedo, equivale a calcular el área de la base y luego multiplicar por la altura. Usando el ejercicio 1.5, tenemos que el valor absoluto de

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

es el área del paralelogramo determinado por los vectores $(a_{11}, a_{12}, 0)$ y $(a_{21}, a_{22}, 0)$.

Desarrollando $\det(A)$ tenemos lo siguiente:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & 0 \\ v_1 & v_2 & 0 \\ 0 & 0 & w_3 \end{vmatrix} = w_3 \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

Es decir, $|\det(A)|$ es el volumen del paralelepípedo.

2.1 a. Recordar que la ecuación implícita de un plano es de la forma $ax + by + cz = d$. Por lo visto en el teórico, sabemos que (a, b, c) son las coordenadas de un vector normal al plano. Como sabemos, por letra, que el plano debe ser perpendicular a $(-1, 2, 3)$, la ecuación de éste debe ser de la forma

$$\pi : -x + 2y + 3x = d$$

Para encontrar d usamos que el punto $(-3, 1, 0) \in \pi$, por lo que debe verificar la ecuación anterior y concluimos que la ecuación del plano es $\pi : -x + 2y + 3z = 5$

b. $\pi : \langle (x - 1, y, z), (1, -1, 3) \rangle$

c. Los versores son $v = (2, 1, 0)/\sqrt{5}$ y $-v$

2.2 Idea para la prueba: para que dos rectas sean ortogonales, el producto interno de sus vectores directores debe ser nulo.

2.3 a. $r : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases}$

b. Vamos a buscar la ecuación paramétrica de la recta que llamaremos r. Dado que ésta pasa por el punto $(-1, 2, -3)$, sabemos que será de la forma $\begin{cases} x = -1 + v_1\mu \\ y = 2 + v_2\mu \\ z = -3 + v_3\mu \end{cases}$

Lo que falta es buscar el vector director. Para esto, podemos observar que como r debe ser ortogonal a la recta $\begin{cases} x = -1 + 6\lambda \\ y = -3 - 2\lambda \\ z = 2 - 3\lambda \end{cases}$ debe estar contenida en un plano π cuya normal es el vector directo de esta recta, es decir $\pi : 6x - 2y - 3z = d$. Para saber cuál es el valor de d, notar que el punto $(-1, 2, -3) \in \pi$ por lo que debe verificar la ecuación de π. De acá sacamos que $\pi : 6x - 2y - 3z = -1$ Por último, sabemos existe un valor de λ tal que el punto $P = (1, -1, 3) + \lambda(3, 2, -5)$ verifica la ecuación de la recta y por lo tanto la del plano. Sustituyendo, encontramos que este valor es $\lambda = 0$, es decir, el punto P que verifica la ecuación es $(1, -1, 3)$.

Concluimos que la recta r pasa por los puntos $(1, -1, 3)$ y $(-1, 2, -3)$ y por lo tanto su ecuación paramétrica es

$$\begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 2 - 3\lambda \\ z = -3 + 6\lambda \end{cases}$$

c. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}$

3.1 a. $d(\pi_1, \pi_2) = \frac{4}{\sqrt{3}}$

b. $(\pi_1, \pi_2) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

3.2 a. $d(\pi, P) = \frac{8}{\sqrt{3}}$

b. $d(\pi, P) = 2$

3.3 a. $d(r, s) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

b. $d(r, s) = \frac{\sqrt{229}}{\sqrt{7}}$

3.4 a. $d(r, P) = \sqrt{\frac{3}{7}}$

b. $d(s, P) = \sqrt{61}$

Revisar en el teórico los procedimientos o fórmulas para el cálculo de las distancias que se piden