Clase 16:

Criterio Serie-Integral

CDIVV – 2023 - 2sem

Eugenia Ellis

eellis@fing.edu.uy

Integral definida

$$\int_a^b f(t)\,dt \qquad f:[a,b]\to\mathbb{R}$$

función acotada

en un intervalo acotado

Integrales impropias de primera especie

$$\int_a^b f(t)\,dt \qquad f:[a,b]\to\mathbb{R}$$

función acotada

~~en un intervalo acotado~~

$$f:[a,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$$

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\,dt}$$

integral definida

integral impropia de primera especie.

Integrales impropias de segunda especie

$f: (a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ función continua

pero no necesariamente acotada.

$$F(x) = \int_x^b f(t)\,dt$$

$f: (0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = 1/x$

$\int_0^1 f(x)$

$$\int_a^b f(x) = \lim_{x \to a^+} \int_x^b f(t)\,dx = \begin{cases} L < +\infty & \text{es convergent} \\ \pm\infty & \text{es divergent} \\ \nexists & \text{oscila} \end{cases}$$

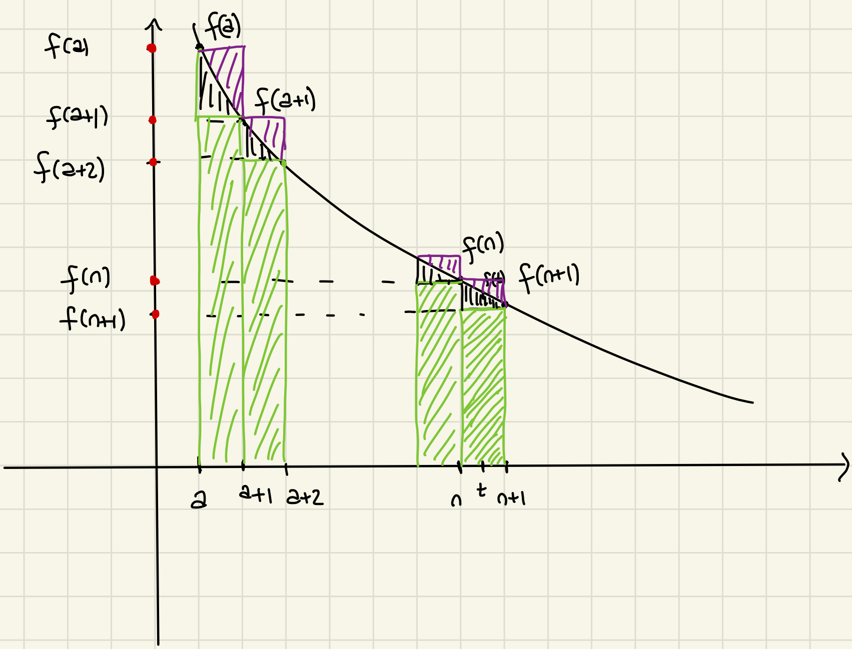
Teorema: Criterio Serie-Integral.

Sea $f : [a, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ monótona decreciente ($a \in \mathbb{N}$)

$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, +\infty)$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{n=a}^{+\infty} f(n) \quad \text{y} \quad \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

son de la misma clase.



Como f es decreciente

$$f(n+1) \leq f(t) \leq f(n) \quad \forall\, t \in [n, n+1]$$

$$\Rightarrow \int_n^{n+1} f(n+1)\,dt \leq \int_n^{n+1} f(t)\,dt \leq \int_n^{n+1} f(n)\,dt.$$

$$\qquad\quad \| \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \|$$

$$\Rightarrow f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(t)\,dt \leq f(n)$$

$\Rightarrow$ Si sumamos desde a tenemos.

$$\sum_{i=a+1}^{i=n+1} a_i \leq \int_a^{n+1} f(t)\,dt \leq \sum_{i=a}^{i=n} a_i$$

$$a_i = f(i)$$

$$\sum_{i=a}^{\infty} a_i = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=a}^{n} a_i$$

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{n \to +\infty} \int_a^{n+1} f(t)\,dt$$

- Si $\sum_{i=a}^{+\infty} a_i$ converge

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \int_a^{n+1} f(t)\,dt \leq \underbrace{\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=a}^{i=n} a_i}_{L}$$

$$\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(t)\,dt \text{ converge.}$$

- Si $\sum_{i=a}^{+\infty} a_i$ diverge. $\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=a}^{n} a_i = +\infty$

$$\Rightarrow \underbrace{\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=a+1}^{n+1} a_i}_{+\infty} \leq \lim_{n\to+\infty} \int_a^{n+1} f(t)\,dt.$$

$$\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(t)\,dt \text{ diverge}$$

Ejemplo:

1) $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ $\alpha > 0$, f es decreciente

$\Rightarrow$ $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}$ y $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ son de la misma clase

Criterio integral

$$a_n = f(n) = \frac{1}{n^\alpha}$$

$\Rightarrow$ La serie $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ Converge si $\alpha > 1$

Diverge si $\alpha \leq 1$

2) Clasificar $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log(n)}$

$f: [2, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \frac{1}{x \log(x)}$

$f(x) > 0$ y es monótona decreciente

si $x_1 < x_2 \Rightarrow \underset{0<}{x_1 \log(x_1)} < x_2 \log(x_2)$

criterio integral

$$\Rightarrow \frac{1}{x_2 \log(x_2)} < \frac{1}{x_1 \log(x_1)}.$$

$$\overset{\text{d}}{\Rightarrow} \int_2^{+\infty} \frac{1}{x \log(x)} dx \quad y \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log(n)}$$

tienen el mismo comportamiento

$$F(x) = \int_2^x \frac{1}{t \log t} dt = \int_{\log 2}^{\log x} \frac{du}{u} = \log u \Big|_{\log 2}^{\log x}$$

$u = \log t$

$du = \frac{1}{t} dt$

$$= \log(\log(x)) - \log(\log 2).$$

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} \log(\log(x)) = +\infty$$

$$\Rightarrow \int_2^{+\infty} \frac{1}{t \log t}\, dt \quad \text{diverge}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n} \quad \text{diverge}$$

criterio integral

<u>Def:</u> Decimos que $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge absolutamente si $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ converge

Teorema: Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge absolutamente

$$\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(t)\,dt \text{ converge.}$$

Ejemplo Clasificar $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}$

$$\left.\begin{array}{l} \left|\dfrac{\operatorname{sen} x}{x^2}\right| \leq \dfrac{1}{x^2} \\ \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \text{ converge} \end{array}\right\} \underset{\substack{\text{criterio}\\ \text{de}\\ \text{comparación}}}{\Rightarrow} \int_1^{+\infty} \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x^2}\right| dx \text{ converge}$$

$$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2} \text{ converge absolutamente.}$$

$\Rightarrow$ $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}$ converge.

Teorema