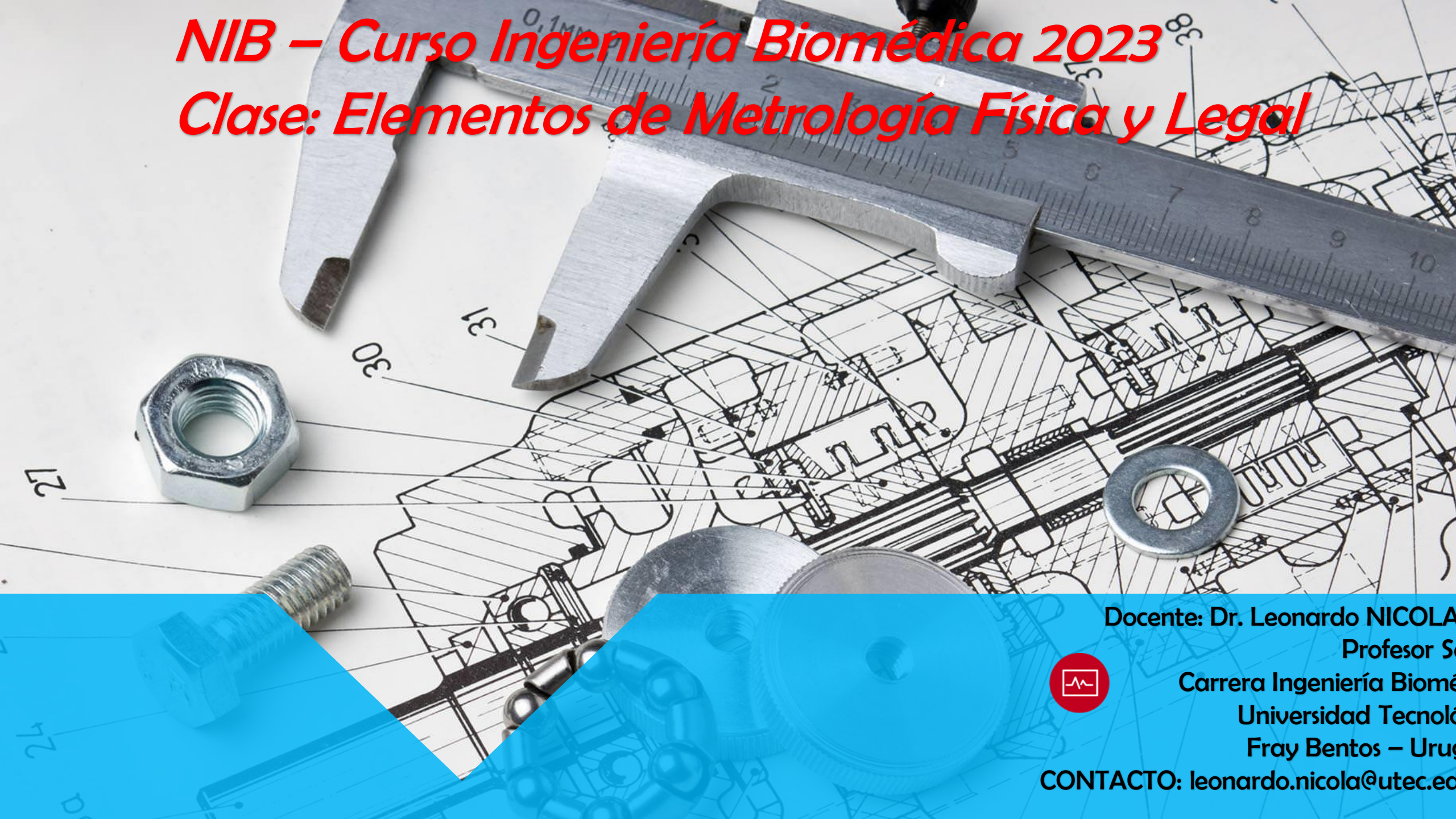


# *NIB – Curso Ingeniería Biomédica 2023*

## *Clase: Elementos de Metrología Física y Legal*



Docente: Dr. Leonardo NICOLA  
Profesor S

Carrera Ingeniería Biomé  
Universidad Tecnol  
Fray Bentos – Uru



CONTACTO: [leonardo.nicola@utec.edu.uy](mailto:leonardo.nicola@utec.edu.uy)

# Objetivos

- 1) Entender la **MEDICION** como procedimiento físico
- 2) Entender el encuadre disciplinar **METROLOGIA**
- 3) Conocer y utilizar la **TERMINOLOGÍA LEGAL de METROLOGÍA**
- 4) *Eliminar ambigüedades y evitar el uso incorrecto de la terminología*



## Objetivos

Entender MEDICION como procedimiento físico

Entender el encuadre disciplinar METROLOGIA

Conocer y utilizar TERMINOLOGÍA LEGAL de METROLOGÍA

***Eliminar ambigüedades y uso incorrecto de la terminología***

**Conceptos fundamentales:** Incertidumbre / Resolución / Error / Precisión

**Conceptos operacionales:** (modelización matemática)

Intervalo de incertidumbre / notación / representación grafica

igualdad o desigualdad de intervalos / incertidumbre en los cálculos (*propagación de la incertidumbre*)

**Causales de incertidumbre:** lectura / calibración / dispersión

**Error por (des)calibración:**

incertidumbre del error / corrección del error / el error como incertidumbre

**Incertidumbre estadística** (y estadística de la incertidumbre)





## Bibliografía específica:

***VIM - Vocabulario Internacional de Metrología – Conceptos fundamentales y generales, y asociados***

Ed. BIPM (Bureau International des Poids et Mesures) , 1ra edición en español, 2008

***GUM - Evaluation of measurement data — Guide to the expression of uncertainty in measurement (JCGM 100:2008, GUM 1995 with minor corrections)*** - First edition September 2008

Ed. BIPM (Bureau International des Poids et Mesures), JCGM 2008

***Expresión de la incertidumbre de medida en las calibraciones / ensayos; (GUI-LE-01 )***

Ed. OAA Organismo Argentino de Acreditación – 2013

***Units and conversion charts*** – T. Wildi (1981)

Ed. IEEE PRESS, New York, EEUU (1981); ISBN 0-87942-273-4; IEEE Order number: PP0267-5



## Bibliografía complementaria:

*Foundations of Metrology*, - J.A. Simpson – J. Res. Nat. Bureau of Standards (EEUU), Vol. 86, No.3, (1981)

*Las definiciones de las unidades de medida en su nueva etapa* – R.J. Lazos Martínez y J.M. López Romero; Simposio de Metrología 2010, SM2010-S5D1 Ed. Centro Nacional de Metrología (México) (2010)

*Estimación de incertidumbres. Guía GUM*, - Mar PÉREZ HERNÁNDEZ - e-medida. Revista Española de Metrología. Diciembre 2012 - [https://www.uv.es/meliajl/Docencia/WebComplementarios/GuiaGUM\\_e\\_medida.pdf](https://www.uv.es/meliajl/Docencia/WebComplementarios/GuiaGUM_e_medida.pdf)

## Links útiles:

Vocabulario Internacional de Metrología navegable online: <http://jcgm.bipm.org/vim/en/index.html>

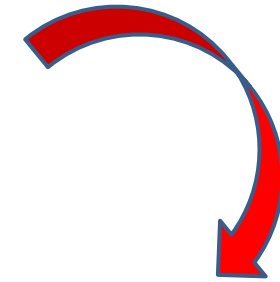
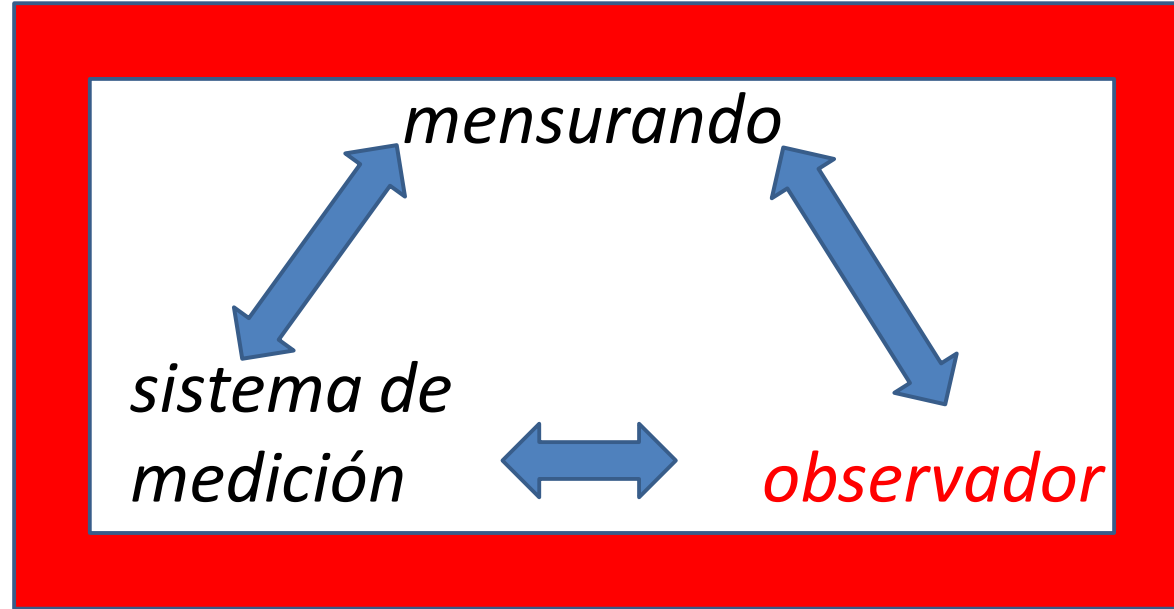
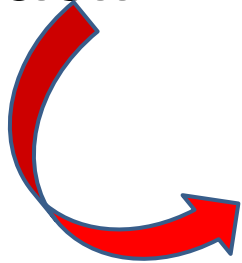
CENAM Publicaciones Gratuitas: <http://www.cenam.mx/publicaciones/gratuitas/>

Software Open para Cálculo de Incertidumbre: <http://www.npl.co.uk/science-technology/mathematics-modelling-and-simulation/mathematics-and-modelling-for-metrology/mmm-software-downloads>



## El Procedimiento de Medición:

procedimiento  
de medición



*(lectura)*

**Resultado**

**“valor de la medida”**

***Mensurando:***

la propiedad o atributo que quiero “valorar”

***Sistema de Medición:***

dispositivo físico / instrumento de medición

***Observador:***

quien realiza la “medición”



## Incertidumbre

Problema 1



¿A qué hora ( $tf$ ) fue tomada la fotografía del calendario?

**R.S.V.P.**

(Répondez s'il vous plaît)

Problema 2

*En una reunión de comadres en el vecindario del Chavo, a la pregunta “cuántos años tiene su niño?”, Doña Clorinda respondió: **“Quico tiene un año”***

¿En ese momento, cuál era la edad (en días) de Quico?



## Incertidumbre

### Problema 1



¿A qué hora ( $tf$ ) fue tomada la fotografía del calendario?



### Respuesta

$tf \equiv$  algún instante entre 0hs y 24hs

### Problema 2

En una reunión de comadres en el vecindario del Chavo, a la pregunta “cuántos años tiene su niño?”, Doña Clorinda dijo: **“Quico tiene un año”**

¿En ese momento, cuál era la edad (en días) de Quico?



### Respuesta (del Profesor Jirafales)

$edad \equiv$  algún valor entre 365 y 731 días

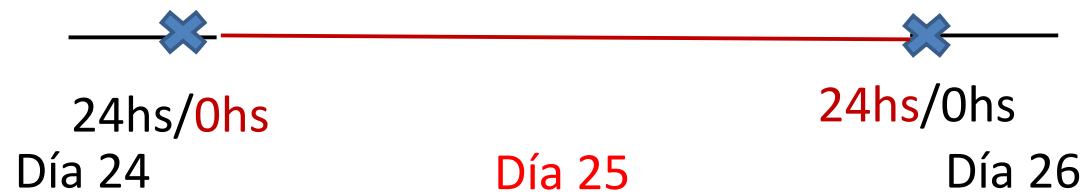




## Incertidumbre (de acuerdo con el VIM)

### Resultado de la Medición

El “resultado” de la medición es un intervalo denominado **“INTERVALO DE INCERTIDUMBRE”**



NOTACIÓN: el “intervalo de incertidumbre” se anota **tf = [0 hs ; 24 hs]**

**Referencia:** Vocabulario Internacional de Metrología (VIM), 3ª Edición; BIPM, Sevres, Francia; 2012

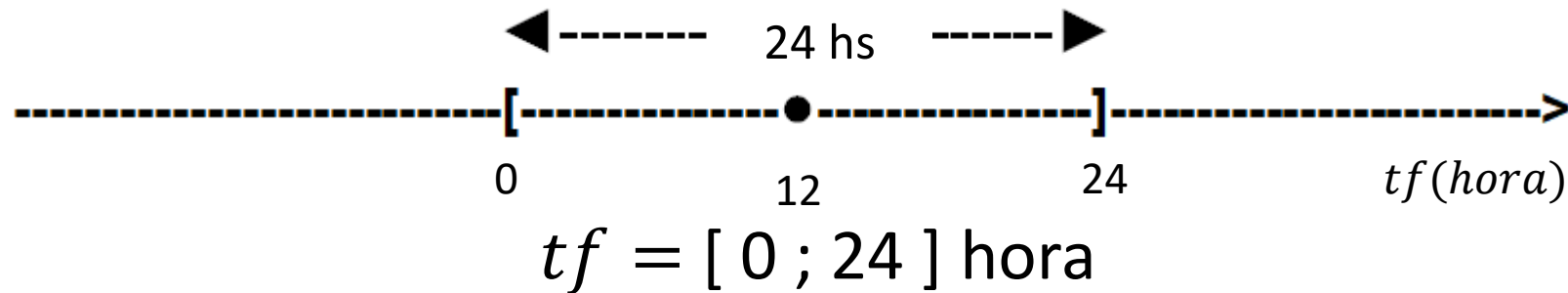
(<http://www.bipm.org/en/publications/guides/vim.html>)



## Intervalo de incertidumbre

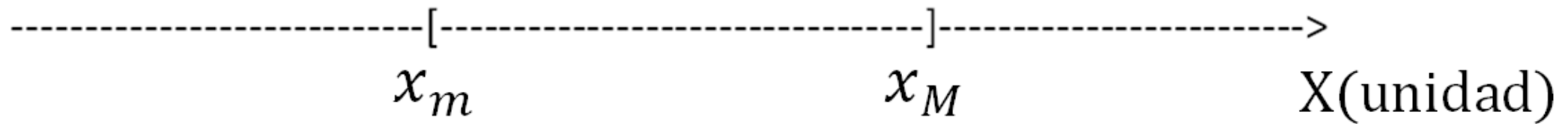
**TODO** el intervalo de incertidumbre es el “resultado” de la medición

**ATENCIÓN**  
No es “ERROR”  
es “INCERTIDUMBRE”

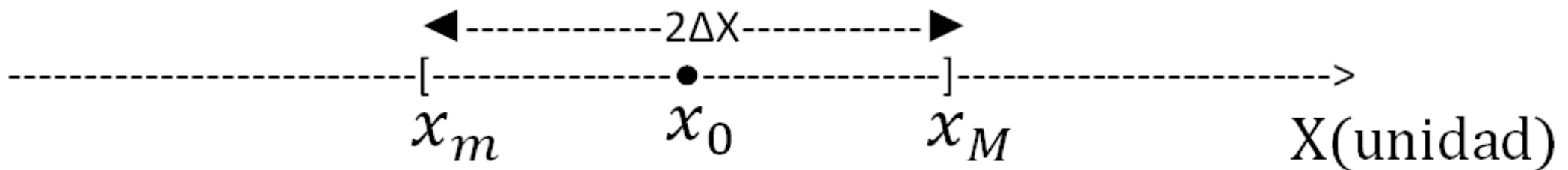


## Intervalo de Incertidumbre: Representación Gráfica y Notación

**Notación 1:**  $x_L = [x_m; x_M]$  (unidad)



**Notación 2:**  $x_L = [x_0; \Delta x]$  (unidad)



**Equivalencia:**  $x_0$ (unidad) valor representativo (ubicación)  $= \frac{1}{2} (X_M + X_m)$   
 $\Delta x$ (unidad) "incertidumbre" ; (**U**, "uncertainty")  $= \frac{1}{2} (X_M - X_m)$



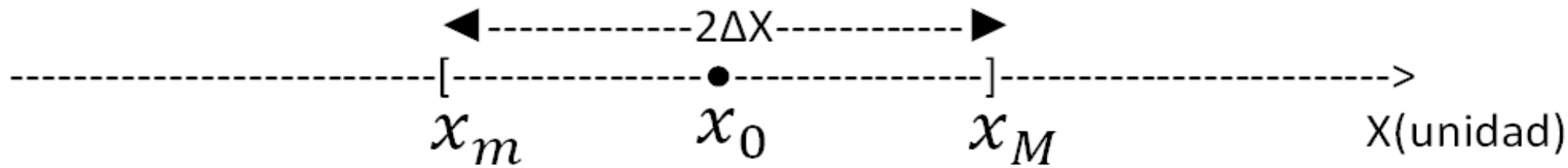
## Intervalo de Incertidumbre

### Representación y Notación

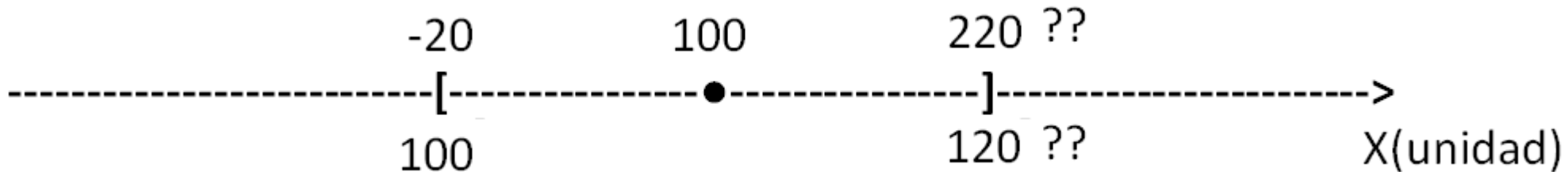
Notación 1:  $X = [x_m; x_M]$  (unidad)

Notación 2:  $X = [x_0; \Delta x]$  (unidad)

**¡Genera confusión!**



Ejemplo:  $X = [ 100 ; 120 ]$  (unidad)



## Notación de la Incertidumbre de medida:

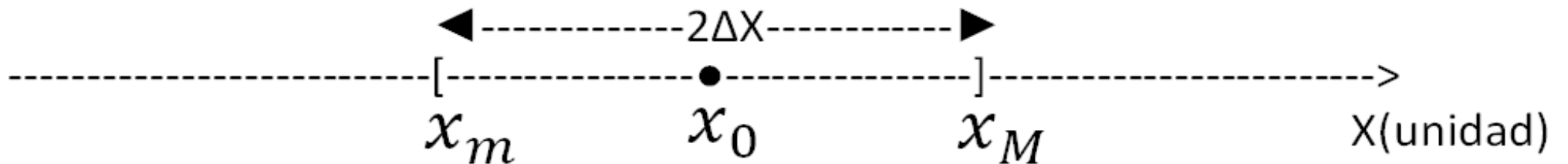
$t_f = [t_m ; t_M] u = [ 0 ; 24] \text{ hs.} / \text{ edad} = [e_m ; e_M] u = [365 ; 731] \text{ d}$   
 $t_f = [t_o ; \Delta t] u = [12 ; 12] \text{ hs.} / \text{ edad} = [e_o ; \Delta e] u = [548 ; 183] \text{ d}$

Situación posible:  $x = [-10 ; 10] u$



**PRODUCE AMBIGÜEDAD!**

Solución:



$$x_M = x_0 + \Delta x$$
$$x_m = x_0 - \Delta x$$



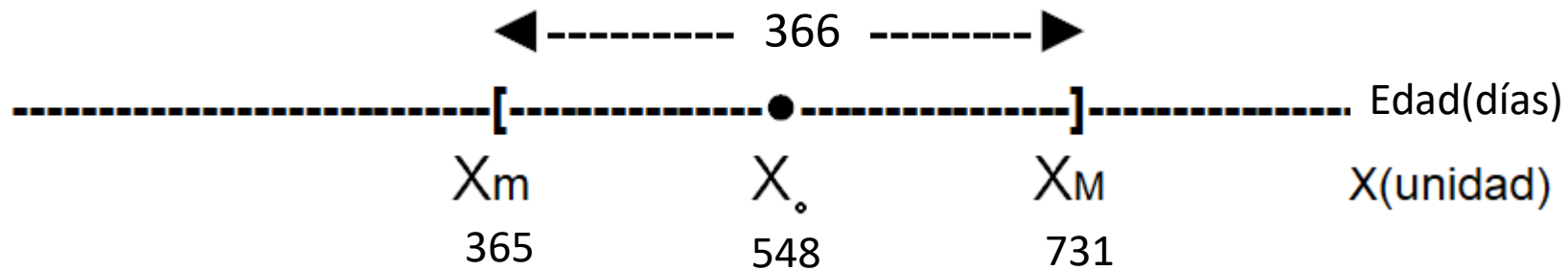
$$X = (x_0 \pm \Delta x) (\text{unidad})$$



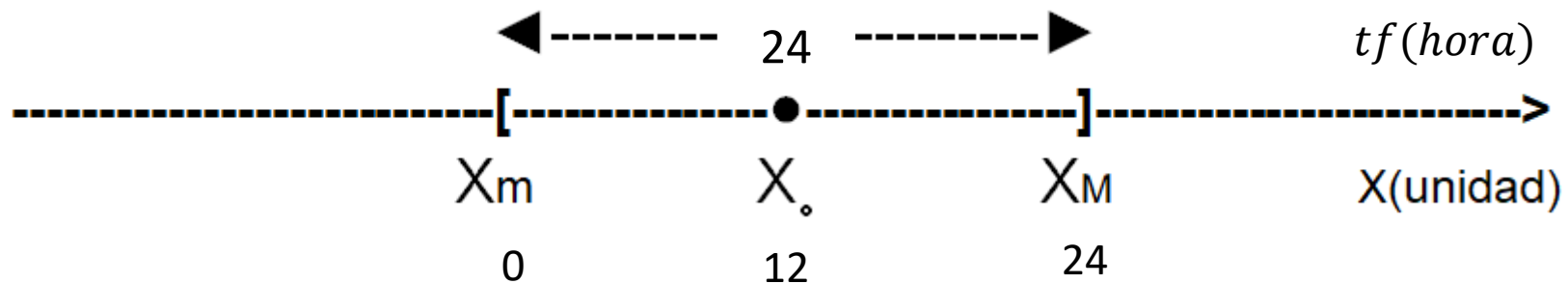


Notación de la Incertidumbre de medida:  $X = [x_m ; x_M]$  unidades

$$X = (X_o \pm \Delta x) \text{ (unidad)}$$



$$\text{Edad} = (548 \pm 183) \text{ días}$$



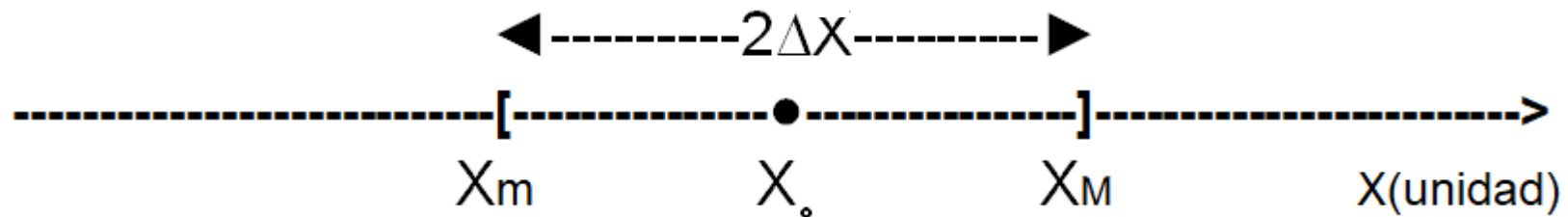
$$tf = (12 \pm 12) \text{ hora}$$



## Intervalo de incertidumbre

El “resultado” de la medición es la  
TOTALIDAD del intervalo de incertidumbre  
No hay valores “preferibles” o “mejores”

**ATENCIÓN**  
No es “ERROR”  
es “INCERTIDUMBRE”



Notación 1:  $x_L = [x_m; x_M]$  (unidad)

Notación 2:  $x_L = [x_0; \Delta x]$  (unidad)



$X = (x_0 \pm \Delta x)$  (unidad)

**Equivalencias:**  $x_0$ (unidad) =  $\frac{1}{2} (x_M + x_m)$  ; valor representativo (ubicación) del intervalo

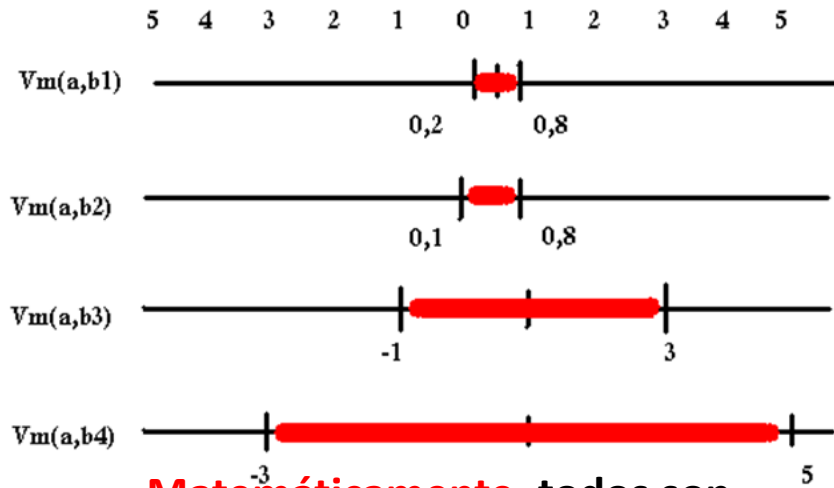
$\Delta x$ (unidad) =  $\frac{1}{2} (x_M - x_m)$  ; “incertidumbre”, (U, “uncertainty”)

$x_M$ (unidad) =  $x_0 + \Delta x$  ; extremo inferior del intervalo, valor mínimo del mensurando

$x_m$ (unidad) =  $x_0 - \Delta x$  ; extremo superior del intervalo, valor máximo del mensurando

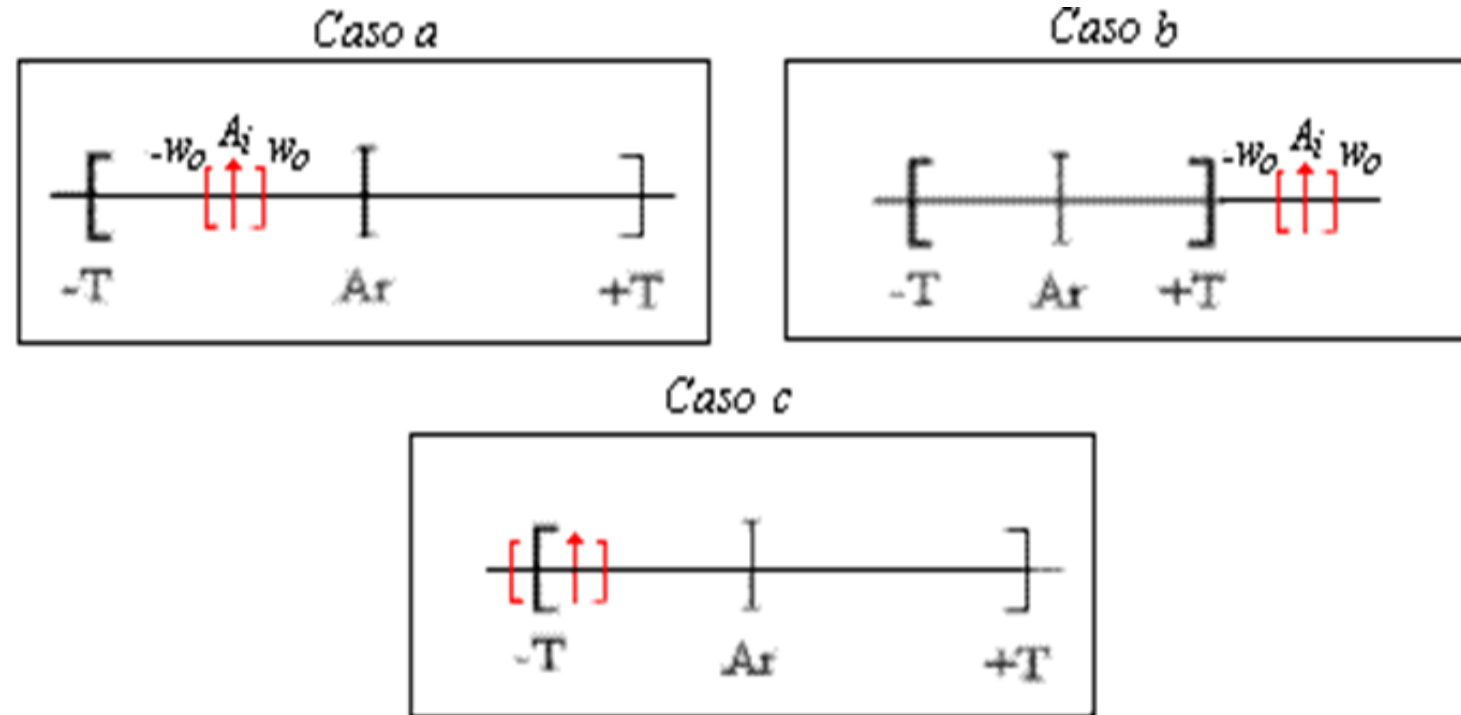


## Igualdad / desigualdad de Intervalos de Incertidumbre

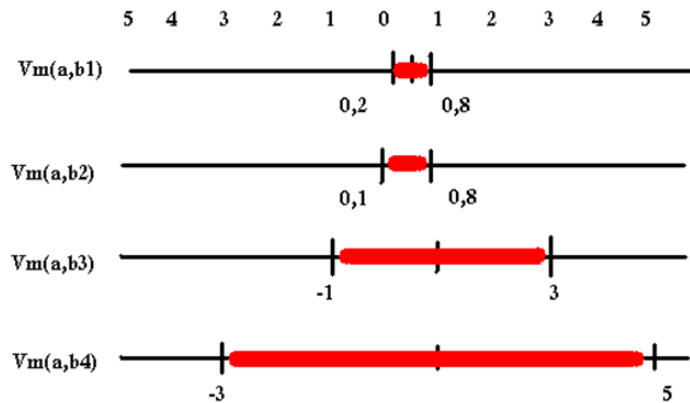


Matemáticamente, todos son **DISTINTOS**

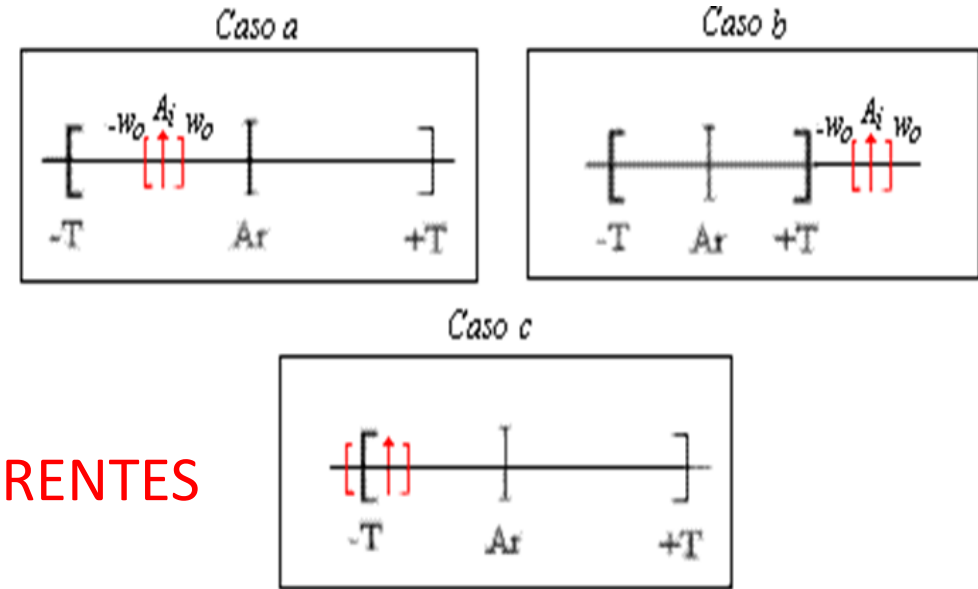
Matemáticamente, todos son **DISTINTOS**



## Igualdad / desigualdad de Intervalos de Incertidumbre



Aunque comparando entre pares,  
**Matemáticamente** todos son **DIFERENTES**



**ARBITRARIAMENTE**, definimos:

**$XL1 = XL2$**  si  $|X_{o1} - X_{o2}| \leq (\Delta X1 + \Delta X2)$  (casos "a" y "c")

Los intervalos de incertidumbre tienen al menos 1 punto en común

**$XL1 \neq XL2$**  si  $|X_{o1} - X_{o2}| > (\Delta X1 + \Delta X2)$  (caso "b")

Los intervalos de incertidumbre no tienen ningún punto en común



## Operaciones algebraicas con Intervalos de Incertidumbre

Dados los intervalos de incertidumbre

$$\mathbf{a} = [a_m; a_M] = (a_o \pm \Delta a)$$

$$\mathbf{b} = [b_m; b_M] = (b_o \pm \Delta b)$$

$$\mathbf{c} = [c_m; c_M] = (c_o \pm \Delta c)$$

donde **c** se obtiene mediante alguna de las siguientes

operaciones entre intervalos:  **$c = a + b$**  ;  **$c = a - b$**  ;  **$c = a * b$**  ;  **$c = a / b$**

**Se trata de calcular**  $c_m$  y  $c_M$  a partir de  $a_m$ ,  $a_M$ ,  $b_m$  y  $b_M$  y finalmente, **obtener**  $c_o$  y  $\Delta c$  a partir de  $a_o$ ,  $\Delta a$ ,  $b_o$  y  $\Delta b$





## Operaciones algebraicas con Intervalos de Incertidumbre

### Ejemplo: Suma de intervalos de incertidumbre

$$\mathbf{a} = [a_m ; a_M] = (a_o \pm \Delta a)$$

$$\mathbf{b} = [b_m ; b_M] = (b_o \pm \Delta b)$$

$$\mathbf{c} = [a + b] = [c_m ; c_M] = (c_o \pm \Delta c)$$

### Procedimiento:

Se calculan los extremos del intervalo c:

$$c_m = a_m + b_m \quad (\text{el valor más pequeño posible})$$

$$c_M = a_M + b_M \quad (\text{el valor más grande posible})$$

A continuación se calculan  $c_o$  y  $\Delta c$ :

$$c_o = \frac{1}{2} (c_M + c_m) = \frac{1}{2}\{(a_M+b_M) + (a_m+b_m)\} = \frac{1}{2}\{(a_M+a_m) + (b_M+b_m)\} = a_o + b_o$$

$$\Delta c = \frac{1}{2} (c_M - c_m) = \frac{1}{2}\{(a_M+b_M) - (a_m+b_m)\} = \frac{1}{2}\{(a_M-a_m) + (b_M-b_m)\} = \Delta a + \Delta b$$

**Es decir:**  $[c_o \pm \Delta c] = [(a_o+b_o) \pm (\Delta a+\Delta b)]$

En la SUMA, se suman los valores y se suman las incertidumbres



## Ejemplo: Suma de intervalos de incertidumbre

### Procedimiento:

Se calculan los extremos del intervalo c:

$$c_m = a_m + b_m \quad (\text{el valor más pequeño posible})$$

$$c_M = a_M + b_M \quad (\text{el valor más grande posible})$$

A continuación se calculan  $c_0$  y  $\Delta c$ :

$$c_0 = \frac{1}{2} (c_M + c_m) = \frac{1}{2} \{(a_M + b_M) + (a_m + b_m)\} = \frac{1}{2} \{(a_M + a_m) + (b_M + b_m)\} = a_0 + b_0$$

$$\Delta c = \frac{1}{2} (c_M - c_m) = \frac{1}{2} \{(a_M + b_M) - (a_m + b_m)\} = \frac{1}{2} \{(a_M - a_m) + (b_M - b_m)\} = \Delta a + \Delta b$$

**Es decir:**  $[c_0 \pm \Delta c] = [(a_0 + b_0) \pm (\Delta a + \Delta b)]$

En la SUMA, se suman los valores y se suman las incertidumbres

## EJERCICIO en CLASE: just now

## Obtener el intervalo de incertidumbre en la RESTA de intervalos



## Incertidumbre **ABSOLUTA** e Incertidumbre **RELATIVA** (según VIM)

Dado un intervalo de incertidumbre  $x = [x_m ; x_M](\text{unidad}) = [x_0 \pm \Delta x](\text{unidad})$

Se define **Incertidumbre ABSOLUTA**:  $\Delta x$  (unidad)

**Incertidumbre RELATIVA**:  $\varepsilon = \Delta x / x_0$  ; ADIMENSIONAL (sin unidades)

**Incertidumbre RELATIVA PORCENTUAL**:  $\varepsilon(\%) = 100 * \varepsilon$  ; ADIMENSIONAL (sin unidades)

$\varepsilon$  y  $\varepsilon(\%)$  indican la “calidad” de la medida

(cuánto “pesa” la incertidumbre  $\Delta x$  respecto del valor representativo  $x_0$ )

**RESUMEN**: (queda por demostrar, \* y /)

Para  $c = a+b$  y  $c = a-b \rightarrow \Delta c = \Delta a + \Delta b$ ;  $\varepsilon_c = \Delta c / c_0 \rightarrow$  se suman las incertidumbres absolutas

Para  $c = a*b$  y  $c = a/b \rightarrow \varepsilon_c = \varepsilon_a + \varepsilon_b$  ;  $\Delta c = \varepsilon_c * c_0 \rightarrow$  se suman las incertidumbres relativas

La incertidumbre **RELATIVA** facilita el cálculo de propagación de incertidumbre en (\*) y en (/)



## Operaciones algebraicas con Intervalos de Incertidumbre

### Ejercicios para después de clase: (tarea para el hogar)

1) Mediante procedimientos análogos a los utilizados para la *suma* (+) y la *resta* (-) de intervalos de incertidumbre, obtener los intervalos de incertidumbre para las operaciones *producto* (\*) y *cociente* (/) de intervalos.

**Dados:**

$$\mathbf{a} = [a_m ; a_M] = (a_o \pm \Delta a)$$

$$\mathbf{b} = [b_m ; b_M] = (b_o \pm \Delta b)$$

**Obtener las expresiones exactas:**

$$\mathbf{c} = [a * b] = [C_m ; C_M] = [C_o \pm \Delta c]$$

$$\mathbf{c} = [a / b] = [C_m ; C_M] = [C_o \pm \Delta c]$$

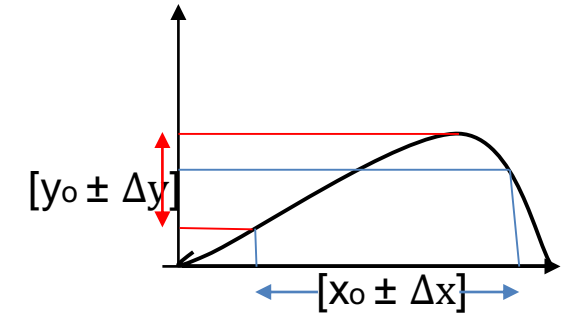
2) Demostrar:  $\varepsilon(a * b) \cong \varepsilon(a) + \varepsilon(b)$

$$\varepsilon(a / b) \cong \varepsilon(a) + \varepsilon(b)$$

**Ayuda:** considere el caso  $a_o \gg \Delta a$  y  $b_o \gg \Delta b$



## Propagación de la incertidumbre en funciones



Dada una función  $y = f(x)$  y el intervalo de incertidumbre de la variable independiente  $\mathbf{x} = [x_0 \pm \Delta x]$

El intervalo de incertidumbre de la función  $y(x)$  es  $\mathbf{y} = [y_m ; y_M] = [y_0 \pm \Delta y]$

donde  $y_M$  e  $y_m$  son los valores **M**áximo y **m**ínimo que toma  $y = f(x)$  dentro del intervalo  $\mathbf{x} = [x_m ; x_M]$

Igual que para  $x$ , son válidas:  $y_M = y_0 + \Delta y$  ;  $y_m = y_0 - \Delta y$

$$y_0 = \frac{1}{2} (y_M + y_m) ; \Delta y = \frac{1}{2} (y_M - y_m)$$

Nótese que no necesariamente se corresponden  $x_m$  o  $x_M$  con  $y_m$  e  $y_M$  ni es  $y_0 = f(x_0)$

DEBEN identificarse  $[y_m ; y_M]$  y luego calcular  $[y_0 \pm \Delta y]$



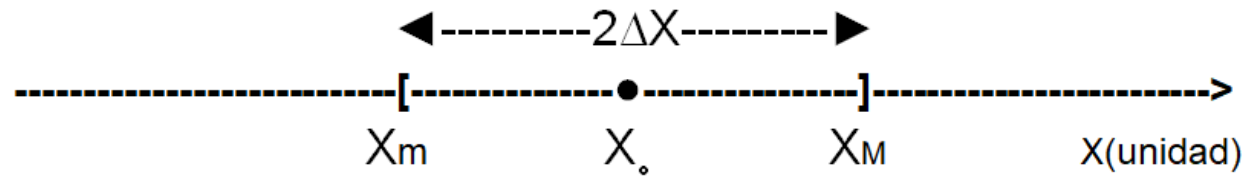
**INTERVALO / DESCANSO**

**$(300 \pm 10) \text{ s}$**



## Terminología Metrológica (según VIM)

i.- El resultado ( $x$ ) de una medición es un **INTERVALO de INCERTIDUMBRE**:  $(u) = (X_0 \pm \Delta x)$  (unidad)



ii.- **No se utiliza el vocablo “error”**, se utiliza el termino **“incertidumbre”**

“error” significa **EQUIVOCACIÓN**

“incertidumbre” significa **insuficiencia (límite) de CONOCIMIENTO CERTERO**

iii.- Para cuantificar (valorar) la incertidumbre se deben considerar las

### **causales de incertidumbre**

a) Incertidumbre de lectura ( $u_L$ ): **NO ES DE NATURALEZA ALEATORIA!!**

b) Incertidumbre por calibración ( $u_{cal}$ ): puede o no, incluir procesos aleatorios

c) Incertidumbre por dispersión ( $u_P$ ): **ES INTRINSECAMENTE ALEATORIA**



## Incertidumbre de lectura ( $u_L$ )



Instrumento **ANALÓGICO**  
(de “escala y aguja”)

## Instrumento **DIGITAL**



## Terminología Metrológica (según VIM)

### Incertidumbre de lectura ( $u_L$ )



#### Instrumento **DIGITAL**

$u_L$  solamente depende del No de DÍGITOS

Ejemplo:

este instrumento es de 3 ½ dígitos

$u_L = \Delta x = \pm 1 \text{ lsd}$  (dígito menos significativo)

*Nótese que cada “dígito” equivale a un determinado “valor” (múltiplos / submúltiplos) en las unidades correspondientes, de acuerdo con la calibración del instrumento*

**Resolución** (según VIM): mínima diferencia reconocible entre dos lecturas

→ la **resolución** resulta ser igual a la **incertidumbre de lectura**

**ATENCIÓN:** todos los valores dentro del **intervalo de incertidumbre de lectura** son igualmente “elegibles” (no hay un valor “mejor” o “más probable”)



## Terminología Metrológica (según VIM)

### Incertidumbre de lectura ( $u_L$ )



#### Instrumento **ANALÓGICO**

#### $u_L$ depende de:

- 1) Características constructivas (aguja / escala)
- 2) Entrenamiento del OBSERVADOR
- 3) Cuidado puesto al efectuar la medición (procedimiento)

$u_L = \Delta x = \pm$  “fracción” de la menor división

Ejemplo:  $\Delta x = \pm 1$  min. div.

$\Delta x = \pm \frac{1}{2}$  min. div.

**Es de buena praxis metrológica asegurar**

**$\frac{1}{3}$  -  $\frac{1}{4}$  -  $\frac{1}{5}$  de división**

Ejemplo:  $\Delta x = \pm \frac{1}{5}$  min. div.

*Nótese que cada “**división**” equivale a un determinado “**valor**” en las unidades correspondientes, de acuerdo con la calibración del instrumento*

**Resolución** (según VIM): mínima diferencia reconocible entre dos lecturas

→ la **resolución** resulta ser igual a la **incertidumbre de lectura**

**ATENCIÓN:** todos los valores dentro del **intervalo de incertidumbre de lectura**

son igualmente “elegibles” (no hay un valor “mejor” o “más probable”)





## Definiciones referidas a instrumentos (de acuerdo con el VIM)

- **Rango (de un instrumento) (*range*):** INTERVALO que abarca desde el **valor mínimo** hasta el **valor máximo** que puede ser registrado. El valor nulo ('0' del instrumento) puede corresponder a un extremo del rango, o estar entre ambos extremos (suele estar en el punto medio)
- **Alcance (de un instrumento) (*span*):** Amplitud (tamaño) del INTERVALO del rango; es la **diferencia** entre el valor máximo y el valor mínimo de la escala

*Ejemplo: un termómetro cuyo rango es  $-5\text{ }^{\circ}\text{C}$  a  $+110\text{ }^{\circ}\text{C}$ , tiene alcance de  $115\text{ }^{\circ}\text{C}$*

- **Resolución (de un instrumento) (*resolution*):** Mínima diferencia reconocible entre dos lecturas posibles

**NO ES "Error" del instrumento**

**NO ES "precisión" del instrumento**

**Referencia:** Vocabulario Internacional de Metrología (VIM), 3ª Edición; BIPM, Sevres, Francia; 2012

(<http://www.bipm.org/en/publications/guides/vim.html>)



## Exactitud (Inexactitud = **ERROR de MEDICIÓN**)

¿A qué hora ( $t_f$ ) fue tomada ESTA fotografía?

$$t_f = [ 0 ; 24 ] \text{ h} = [12 \pm 12] \text{ h}$$



## Exactitud (Inexactitud = **ERROR de MEDICIÓN**)

¿A qué hora ( $t_f$ ) fue tomada ESTA fotografía?

$$t_f = [ 0 ; 24 ] \text{ h} = [ 12 \pm 12 ] \text{ h}$$



$$t_f = [ 3 \text{ h } 7 \text{ min } (3 \pm 1) \text{ s} ]$$



## Exactitud (Inexactitud = **ERROR** de **MEDICIÓN**)

¿A qué hora ( $tf$ ) fue tomada ESTA fotografía?



$$tf = [3 \text{ h } 7 \text{ min } (3 \pm 1)\text{s}]$$

$$tf = [0 ; 24 ] \text{ h} = [12 \pm 12] \text{ h}$$



$$tf = [3 \text{ h } 9 \text{ min } (50 \pm 1)\text{s}]$$

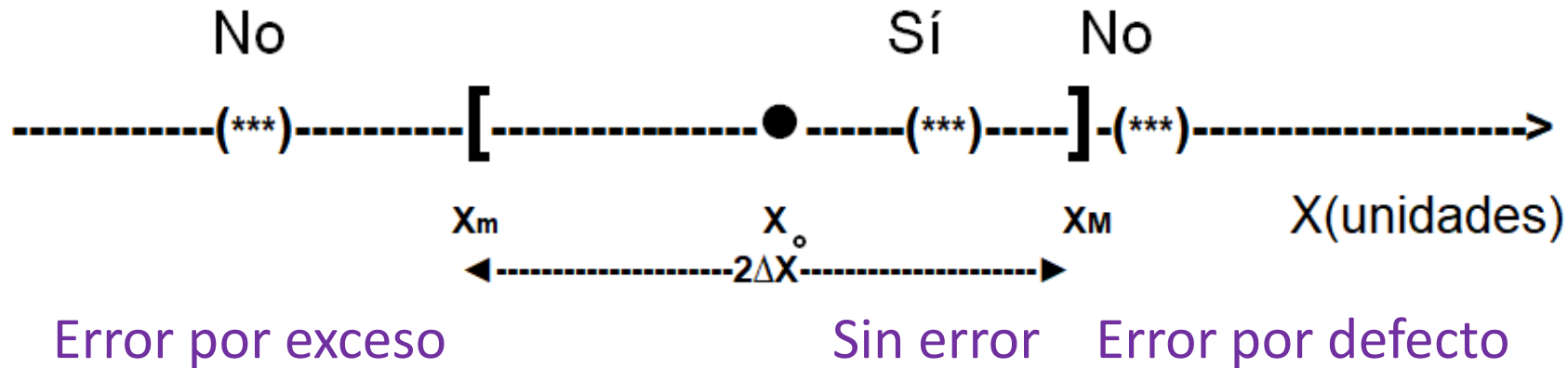
## Exactitud (Inexactitud = ERROR DE MEDICIÓN)

### ERROR DE MEDICIÓN:

diferencia entre la “medida”  $[X_o \pm \Delta X]$  y un “valor de referencia” (\*\*\*)  $[V_p \pm \delta V]$ ,  
NOTA:  $[V_p \pm \delta V]$  suele considerarse como el supuesto “valor real” de la magnitud

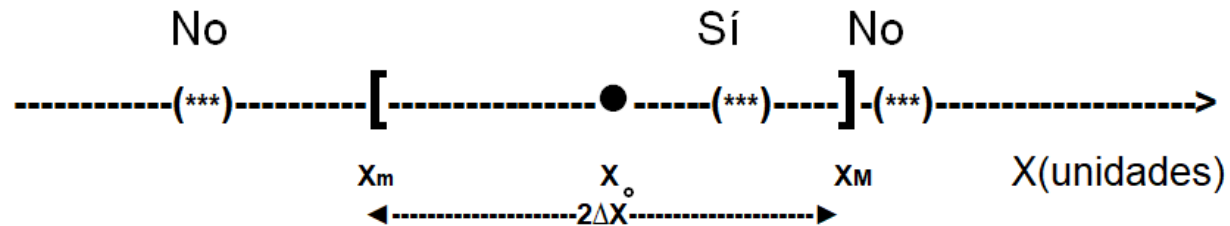
$$E = [X_o \pm \Delta X] - [V_o \pm \delta V] = [(X_o - V_o) \pm (\Delta X + \delta V)] \text{ unidades}$$

Puede resultar en un **Error por Exceso ( $E > 0$ )**, o en un **Error por Defecto ( $E < 0$ )**



## Exactitud → Inexactitud = Error de medición

El intervalo de incertidumbre de la medida, ¿contiene al “valor” de la magnitud,  $V \equiv (***)$ ?



**ERROR DE MEDICIÓN:** diferencia entre la “medida” [ $X_o \pm \Delta X$ ] y un “valor de referencia” [ $V_p \pm \delta V$ ], el supuesto “valor real” de la magnitud

$$E = [X_o \pm \Delta X] - [V_o \pm \delta V]$$

El **ERROR DE MEDICIÓN también** es un **intervalo de incertidumbre.**

$$E = [X_o \pm \Delta X] - [V_o \pm \delta V] = E_o \pm \Delta E$$


Donde

$$E_o = X_o - V_o$$

y la incertidumbre del **ERROR** es  $\Delta E = \Delta X + \delta V$

Exactitud -----> Inexactitud = Error de medición

**Como se corrige?**

- 1) **Ajuste del instrumento:** Se modifican controles (mandos) “de ajuste” en el instrumento de medición hasta que las “lecturas” coincidan con el “valor de referencia”  **se ha eliminado el “ERROR”, no la incertidumbre del “ERROR”**  
El diseño del instrumento debe contemplar la función de “ajuste”
- 2) **Calibración del instrumento:**
  - a) Se realizan pares de comparaciones entre “lecturas”  $X_L = X_o \pm \Delta X$  y “referencias”  $V_o \pm \delta V$
  - b) Para cada par, se calcula el ERROR  $E = [X_o \pm \Delta X] - [V_o \pm \delta V] = [(X_o - V_o) \pm (\Delta X + \delta V)]$
- 3) **Corrección del error de la medición:**
  - c) Para nuevos valores “leídos”  $X_L$ , el ERROR seria  $E = X_L - X^{\text{real}}$
  - d) El valor “corregido” es  $X_c = X_L - E = [(X_{Lo} - E_o) \pm (\Delta X_L + \Delta E)]$   
donde  $\Delta X_c = \Delta X_L + \Delta E = \delta V + 2 \Delta X_L$

**NOTAS:** E puede obtenerse mediante una única medición o como promedio de varias mediciones.  
Debe determinarse E para cada zona del rango del instrumento, puede resultar constante en todo el rango.



## Ejercicio: Corrección del Error de medición mediante Calibración

Tabla de Calibración		
Valor de Referencia $V_r$ (unidad)	Valor de Lectura $X_L$ (unidad)	Error durante la calibración $E = X_L - V_r$ (unidad)
$0,0 \pm 0,1$	$0,3 \pm 0,5$	
$5,0 \pm 0,1$	$5,5 \pm 0,5$	
$10,0 \pm 0,1$	$9,8 \pm 1,0$	
$15,0 \pm 0,1$	$15,0 \pm 1,0$	
$20,0 \pm 0,1$	$19,5 \pm 1,0$	

Tabla para corrección por calibración		
Valor de Lectura $X_L$ (unidad)	Error durante la calibración $E$ (unidad)	Valor corregido $X_c = X_L - E$ (unidad)
$0,0 \pm 0,5$		
$2,3 \pm 0,5$		
$6,5 \pm 0,5$		
$8,2 \pm 0,5$		
$11,2 \pm 1,0$		
$16,0 \pm 1,0$		
$19,7 \pm 1,0$		



Exactitud -----> Inexactitud = Error de medición

**Cómo se obtiene el “valor de referencia” para calibrar un instrumento?**

a) Se dispone de un patrón de medición con trazabilidad  $\rightarrow V_p = V_{po} \pm \delta V_p$   
Se MIDE el patrón y se obtiene el intervalo  $X_L = X_o \pm \Delta X$   
el **ERROR** se calcula como  $E = X_L - V_p = [(X_o - V_{po}) \pm (\Delta X + \delta V_p)]$

b) Se dispone de un instrumento de referencia calibrado (*instrumento de mejor resolución, contrastado con trazabilidad*)  
Se mide un mismo mensurando simultáneamente con ambos instrumentos  
Se obtienen dos lecturas:  $X_L = X_o \pm \Delta X$  y  $V_r = V_{ro} \pm \delta V_r$   
el **ERROR** se calcula como  $E = X_L - V_r = [(X_o - V_{ro}) \pm (\Delta X + \delta V_r)]$

**Precisión** (según el VIM)---> **Repetibilidad de las medidas**  
(lo contrario de “dispersión”)

**Al REITERAR el procedimiento de medición puede suceder**

a) SE REPITEN los “valores”



son intervalos = respecto de la Incertidumbre de Lectura

si son todos iguales no hay dispersión, el “**resultado**” es **UN UNICO INTERVALO**



b) NO SE REPITEN los “valores”



intervalos  $\neq$  respecto de la Incertidumbre de Lectura

al ser “diferentes” hay dispersión

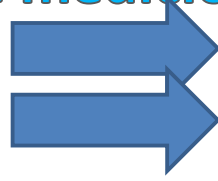
**cuál es el “resultado”?**

## Precisión (según el VIM)

Repetibilidad de las medidas (lo contrario de “dispersión”)

Al REITERAR el procedimiento de medición puede suceder

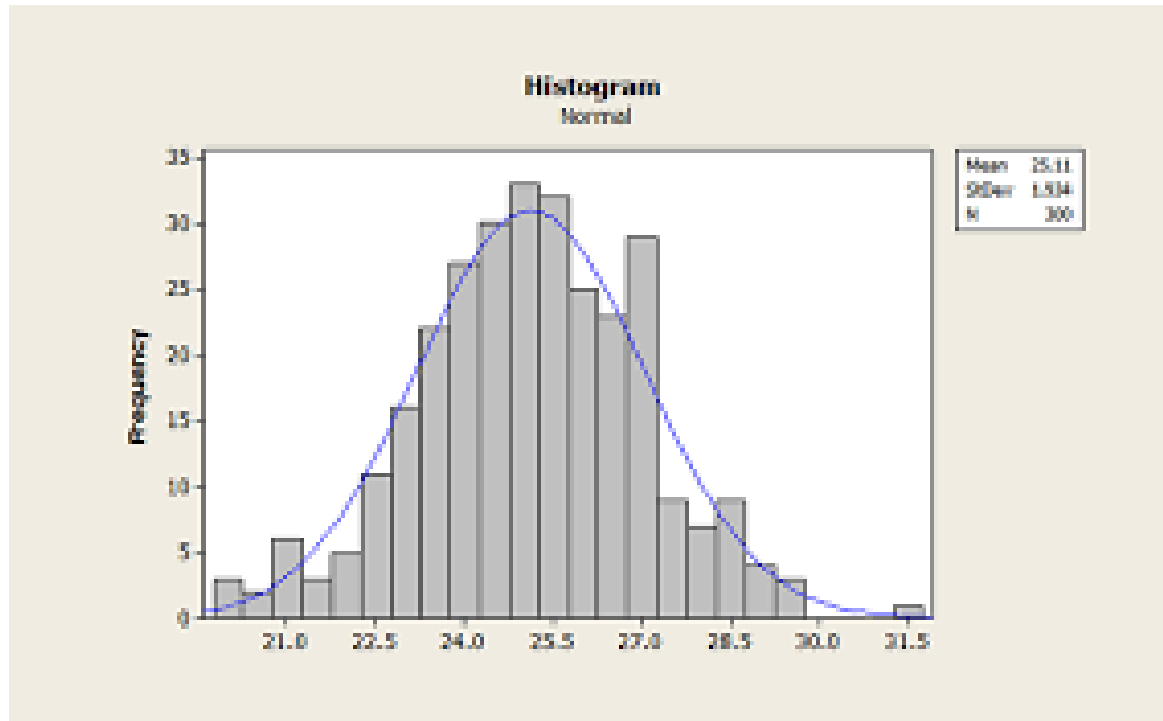
a) SE REPITEN los valores de lectura



Resultan = respecto de la Incertidumbre de Lectura

b) NO SE REPITEN los valores de lectura

Resultan ≠ respecto de la Incertidumbre de Lectura



Modelo estadístico “clásico”

se aplica a “valores”, no a “intervalos”!

$$\langle X \rangle = \int x f(x) dx \cong (1/N) \sum n_i x_i$$

$$\langle X^2 \rangle = \int x^2 f(x) dx \cong (1/N) \sum n_i x_i^2$$

$$\text{Var} = \langle X^2 \rangle - (\langle X \rangle)^2$$

$$\text{DE} = \sqrt{\text{Var}} \quad ; \quad \text{EE} \cong \text{DE} / \sqrt{(N-1)}$$

Finalmente: el “resultado” es

$$X = [\langle X \rangle \pm \text{DE}] \quad \text{o bien} \quad X = [\langle X \rangle \pm \text{EE}]$$

## Incertidumbre Combinada (según el VIM):

Deben considerarse TODAS las causales de incertidumbre

## Teoría de Probabilidades:

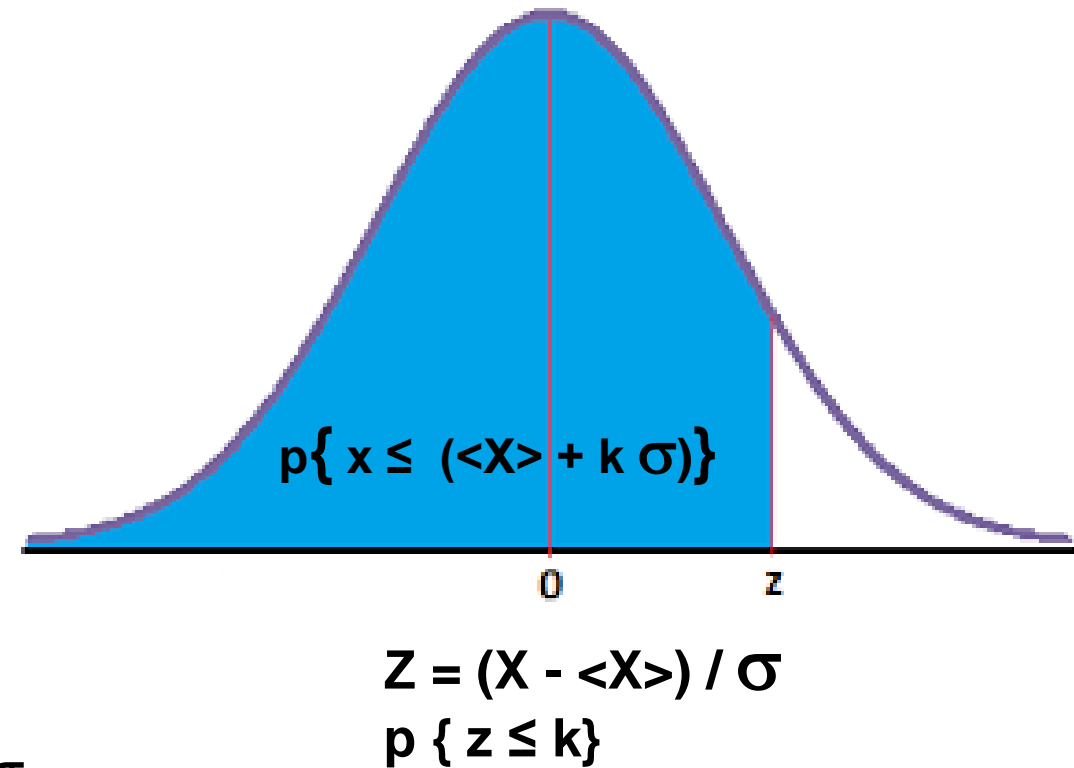
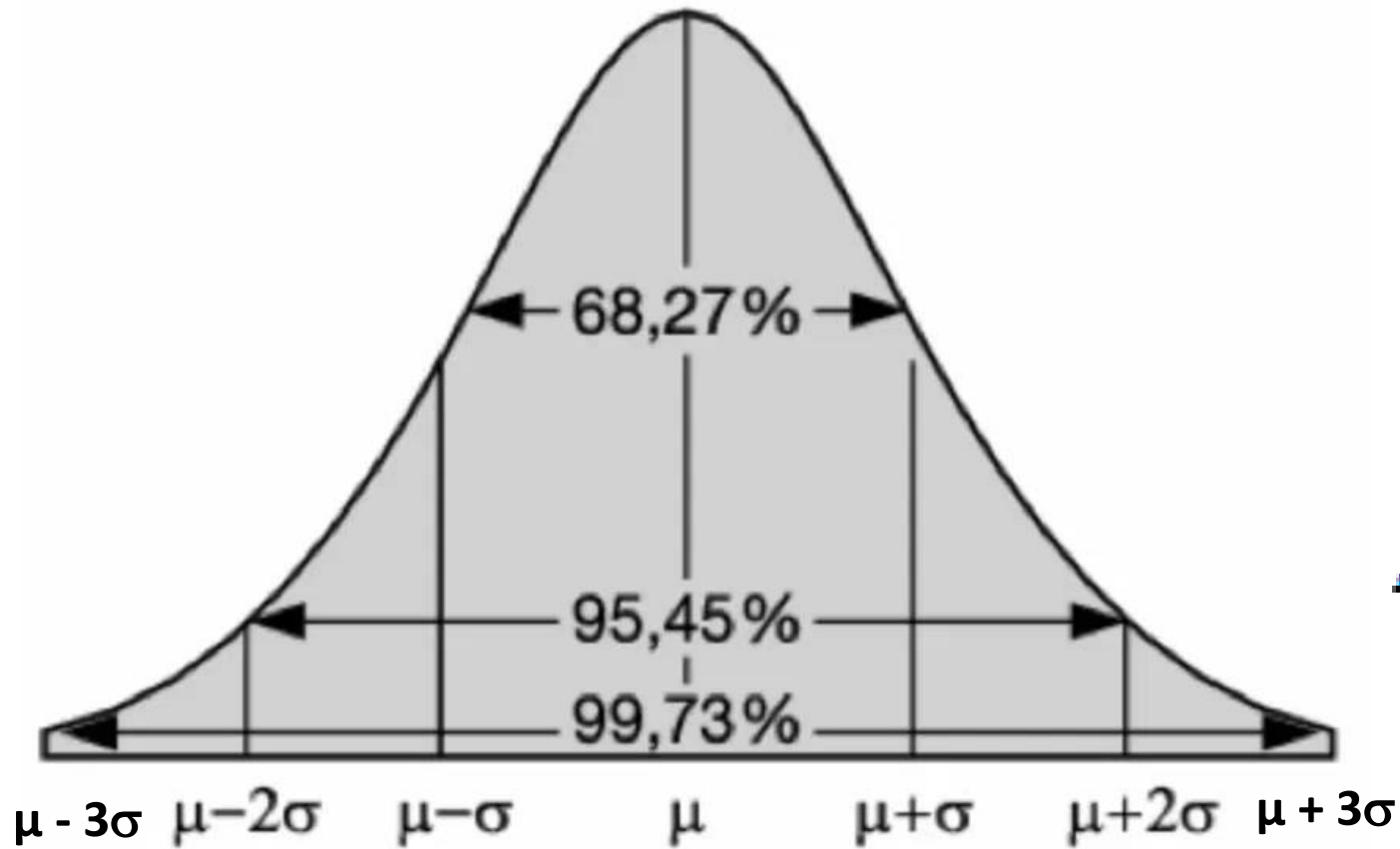
Si en un fenómeno (el proceso de medición) intervienen fuentes causales aleatorias INDEPENDIENTES, la VARIANZA total es la suma de las varianzas individuales de cada fuente causal.

## Fuentes de Incertidumbre:

Incertidumbre de lectura:  $U_L$  de naturaleza *NO ESTOCASTICA*

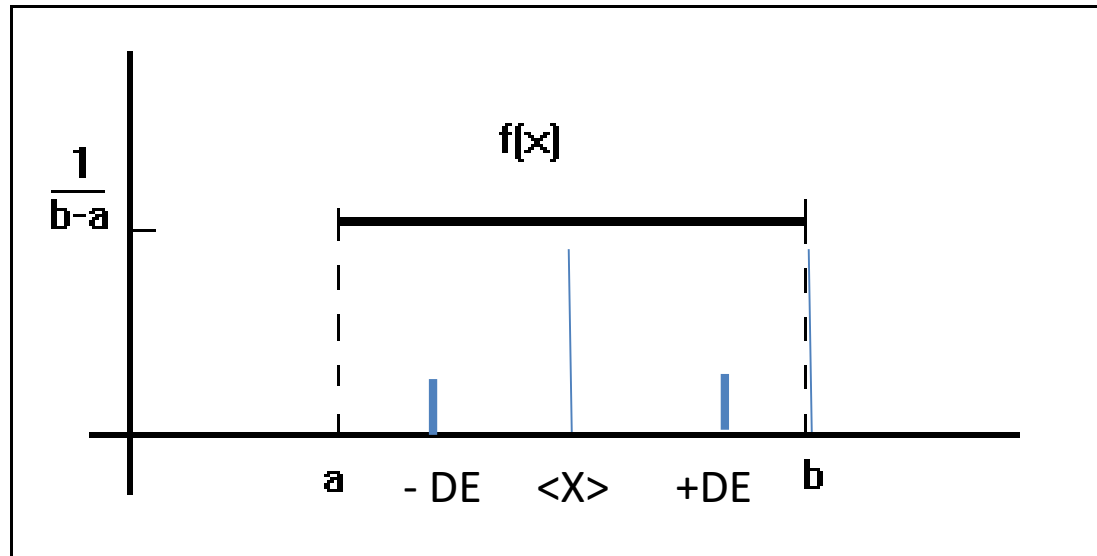
Incertidumbre de calibración:  $U_{cal}$  puede ser o no *ESTOCASTICA*

Incertidumbre por dispersión:  $U_p$  de naturaleza *ESTOCASTICA*



## Incertidumbre Combinada (según el VIM): Cálculo de $U_L$

**Paso I:** En el proceso de “lectura” se genera un intervalo de incertidumbre  $[X_0 \pm \Delta X_L]$  de naturaleza no aleatoria. Se asocia al intervalo de incertidumbre por lectura, una distribución uniforme de probabilidad,  $f(x)$



**Paso II:** Se igualan los extremos de la distribución uniforme, con los extremos del intervalo  $[X_0 \pm \Delta x]$

$$a = X_0 - \Delta X_L, b = X_0 + \Delta X_L \rightarrow (b-a) = 2 \Delta X_L$$

**Paso III:** Se calculan los parámetros de ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA de la distribución uniforme

$$\langle X \rangle = \int x f(x) dx = (b-a) / 2 = 0,5 (b-a)$$

$$\langle X^2 \rangle = \int x^2 f(x) dx = (a^2 + ab + b^2) / 3$$

$$\text{Var} = (\langle X^2 \rangle - (\langle X \rangle)^2) = ((b-a)^2) / 12 = 0,0833 (b-a)^2$$

$$\text{DE} = \sqrt{\text{Var}} = (b-a) / \sqrt{12} = 0,289 (b-a)$$

$$p\{x \in [\langle X \rangle \pm \text{DE}]\} = \int f(x) dx = 1 / \sqrt{3} = 0.577 \rightarrow \mathbf{57,7\%}$$

**Paso IV:** Se define  $U_L = \pm \text{DE}_{\text{dist.unif.}}$ ; el DE por “lectura”

$$\text{Resulta en } U_L = \pm (b-a) / \sqrt{12} = \pm 2 \Delta X_L / \sqrt{12}$$

$$\mathbf{U_L = \pm \Delta X_L / \sqrt{3} = \pm 0,577 \Delta X_L}$$

## Incertidumbre Combinada (según el VIM)

### Incertidumbre de Lectura:

Resolución =  $\pm \Delta X_L$  ; intervalo  $(b-a) = 2 \Delta X_L$

$$(U_L)^2 = \text{Varianza} = ((b-a)^2) / 12 = 0,0833 \times 4 \times (\Delta X_L)^2 = 3,33 (\Delta X_L)^2$$

### Incertidumbre de Calibración:

Incertidumbre del patrón (tolerancia) =  $\pm \delta V$ ; Resolución del instrumento =  $\pm \Delta X_L$

$$(U_{\text{cal}})^2 = \text{Varianza} = ((\delta V + 2 \Delta X_L)^2) / 12 = 0,0833 ((\delta V + 2 \Delta X_L)^2)$$

### Incertidumbre por dispersión (precisión):

$$(U_p)^2 = \text{Varianza} = DE^2$$

### Incertidumbre combinada:

$$UC = \sqrt{ (U_L)^2 + (U_{\text{cal}})^2 + (U_p)^2 }$$

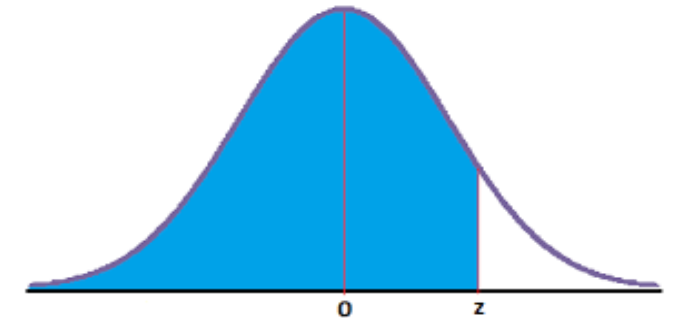
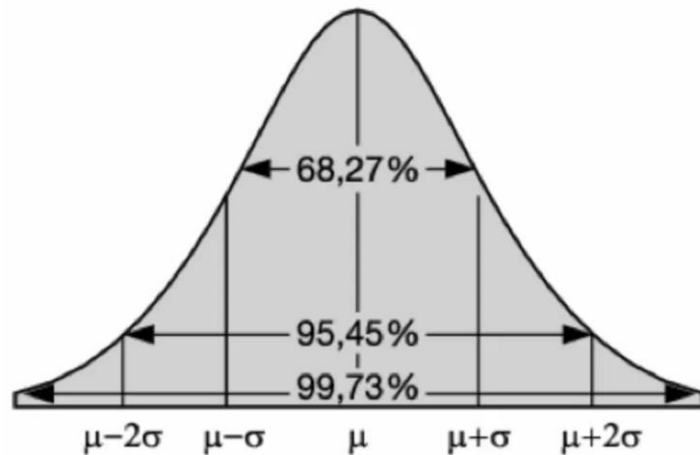


## Incertidumbre Expandida (según el VIM)

Se asume que todo el proceso de medición se describe por una distribución normal con media  $\langle X \rangle$  y  $DE = U_c = \sigma$  (incertidumbre combinada del proceso de medición).

Definiendo la incertidumbre expandida  $U_e = k U_c$ , se sigue que el **intervalo de confianza**  $x = \langle X \rangle \pm U_e$  expresa la la probabilidad  $p(k,x)$  de que el valor del mensurando  $x$  se encuentre en el intervalo  $\langle X \rangle \pm k U_c$ .

Para $k = 1$ , $p(1,x) = 68\%$	$p(k,x) = 90\%$	si $k = 1,64$	$U_e = 1,64 U_c$
Para $k = 2$ , $p(2,x) = 95,5\%$	$p(k,x) = 95\%$	si $k = 1,96$	$U_e = 1,96 U_c$
Para $k = 3$ , $p(3,x) = 99,7\%$	$p(k,x) = 99\%$	si $k = 2,58$	$U_e = 2,58 U_c$



$p(k,x) = p \{x \leq (\langle X \rangle + k U_c)\}$   
Equivale a  $p(z \leq k)$   
El estadístico  $Z = (x - \langle X \rangle) / U_c$   
tiene distribución **Normal (0;1)**

## **Bibliografía específica:**

***VIM - Vocabulario Internacional de Metrología – Conceptos fundamentales y generales, y asociados***

Ed. BIPM (Bureau International des Poids et Mesures) , 1ra edición en español, 2008

***GUM - Evaluation of measurement data — Guide to the expression of uncertainty in measurement (JCGM 100:2008, GUM 1995 with minor corrections)*** - First edition September 2008

Ed. BIPM (Bureau International des Poids et Mesures), JCGM 2008

***Expresión de la incertidumbre de medida en las calibraciones / ensayos; (GUI-LE-01 )***

Ed. OAA Organismo Argentino de Acreditación – 2013

***Units and conversion charts*** – T. Wildi (1981)

Ed. IEEE PRESS, New York, EEUU (1981); ISBN 0-87942-273-4; IEEE Order number: PP0267-5



## Bibliografía complementaria:

*Foundations of Metrology*, - J.A. Simpson – J. Res. Nat. Bureau of Standards (EEUU), Vol. 86, No.3, (1981)

*Las definiciones de las unidades de medida en su nueva etapa* – R.J. Lazos Martínez y J.M. López Romero; Simposio de Metrología 2010, SM2010-S5D1 Ed. Centro Nacional de Metrología (México) (2010)

*Estimación de incertidumbres. Guía GUM*, - Mar PÉREZ HERNÁNDEZ - e-medida. Revista Española de Metrología. Diciembre 2012 - [https://www.uv.es/meliajl/Docencia/WebComplementarios/GuiaGUM\\_e\\_medida.pdf](https://www.uv.es/meliajl/Docencia/WebComplementarios/GuiaGUM_e_medida.pdf)

## Links útiles:

Vocabulario Internacional de Metrología navegable online: <http://jcgm.bipm.org/vim/en/index.html>

CENAM Publicaciones Gratuitas: <http://www.cenam.mx/publicaciones/gratuitas/>

Software Open para Cálculo de Incertidumbre: <http://www.npl.co.uk/science-technology/mathematics-modelling-and-simulation/mathematics-and-modelling-for-metrology/mmm-software-downloads>



**FIN de la CLASE de METROLOGIA**

**Preguntas?**

**Por consultas: Leonardo NICOLA SIRI  
leonardo.nicola@utec.edu.uy**