Algoritmos de Aproximación

Clase 9
Redes de Steiner

Pablo Romero

Miércoles 13 de setiembre de 2023. Montevideo, Uruguay.

Redes de Steiner

Problema

Dado un multigrafo no dirigido $G = (V, E, u)$ con cantidad de aristas entre pares $u : E \to \mathbb{Z}^+$ y respectivos costos $c : E \to \mathbb{Q}^+$, hallar el subgrafo de mínimo costo que cumple con requerimientos de arista-conectividad r_{ij} para cada par de vértices $v_i, v_j \in V$.
El problema de Redes de Steiner es $\Pi_7 = (\mathcal{I}, S_{\Pi_7}, f_7)$, donde

- $\mathcal{I} = \{(G, R, c), G \in \mathcal{MG}, R = (r_{ij})_{v_i, v_j \in V(G)}, c : E \to \mathbb{Q}^+\}$.
- $S_{\Pi_7}(I) = \{H \subseteq G, \forall S \subseteq V(G), |\delta(S, S^c)| \geq \max_{i,j}\{r_{ij}\}\}$.
- $f_7(I, H) = \sum_{e \in E(H)} c(e)$.
- $OPT_{\Pi_7}(I) = \min_{\{H \in S_{\Pi_7}(I)\}} \sum_{e \in E(H)} c(e)$.

Problema Primal

Dada una instancia $I = (G, R, c)$ del problema de redes de Steiner, consideremos $f : \mathcal{P}(V) \to \mathbb{N}$ tal que $f(S) = \max_{v_i \in S, v_j \in S^c}\{r_{ij}\}$, y sea $x_e \in \mathbb{N}$ la cantidad de copias seleccionadas de la arista e en el subgrafo H. El problema primal se formula de la siguiente manera:

$$\min_x \sum_{e \in E} c_e x_e$$

$$s.a. \sum_{e \in \delta(S)} x_e \geq f(S), \forall S \subseteq V(G)$$

$$x_e \leq u_e, \forall e \in E.$$

Ausencia de Integralidad

Lema 1.

El problema primal no es $1/2$ integral.

Prueba. Sea $I = (P, R, c)$, donde P es el grafo de Petersen, $r_{ij} = 1$ para todo $i \neq j$ y $c(e) = 1$ para cada $e \in E(P)$. Sea x tal que $x_e = 1/3$ para toda $e \in E(P)$. Como P es 3-arista conexo, x es factible. Como P es 3-regular entonces la suma del costo de tres aristas incidentes a un vértice fijo de $V(P)$ nunca es menor que 1. Como P tiene 10 vértices entonces el costo global de cualquier solución factible es al menos 5. Como el costo de x es igual a 5 entonces x es óptimo global. Toda solución factible z tal que $z_e = 1$ para alguna arista e excede el costo de 5, puesto que va a requerir agregar aristas incidentes a los extremos de e. Por último, si tomáramos 10 aristas con costo $1/2$ entonces deberían formar un ciclo hamiltoniano, lo que es imposible. ■

Ausencia de Integralidad

Lema 2.

La solución x tal que $x_e = 1/3$ antes obtenida no es extremal.

Prueba. El grupo de automorfismos de P es arista-transitivo. Sea x_1 la solución dada en la Figura 1 y $x_2, \ldots, x_{15}$ obtenidas tras aplicar automorfismos a x_1. Se cumple que $x = \frac{\sum_{i=1}^{15} x_i}{15}$. ■

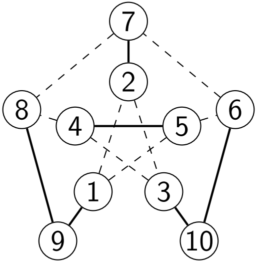

Figure: x_1 asigna $1/2$ a las 6 aristas llenas y $1/4$ a las 8 punteadas.

Submodularidad

Defінción 1.

Una función $f : \mathcal{P}(V) \to \mathbb{N}$ *es submodular si* $f(V) = 0$ *y para cada* $A, B \subseteq V$ *se cumplen simultáneamente las dos condiciones siguientes:*

- $f(A \cup B) + f(A \cap B) \leq f(A) + f(B)$,
- $f(A - B) + f(B - A) \leq f(A) + f(B)$.

Submodularidad

Lema 3.

Si (G, u) es multigrafo entonces la función $f_G : \mathcal{P}(V) \to \mathbb{N}$ dada por $f_G(S) = |\delta(S, S^C)|$ es submodular.

Idea de la Prueba. Como $\delta(V.V^c) = \emptyset$ entonces $f_G(V) = 0$.
Sean $A, B \subseteq V(G)$:

- Si $A \cap B = \emptyset$ entonces $f_G(A \cup B) + f_G(A \cap B) = f_G(A \cup B) = f_G(A) + f_G(B) - 2|\delta(A, B)| \leq f_G(A) + f_G(B)$, y $f_G(A - B) + f_G(B - A) = f_G(A) + f_G(B)$.
- Si $A \subseteq B$ entonces $f_G(A \cup B) + f_G(A \cap B) = f_G(B) + f_G(A)$. Además $B = A \cup (B - A)$ es unión disjunta, por lo que $f_G(A - B) + f_G(B - A) = f_G(B - A) = f_G(A) + f_G(B) - 2|\delta(A, B^c)| \leq f_G(A) + f_G(B)$.
- Si $A \cap B \neq \emptyset$, $A - B \neq \emptyset$ y $B - A \neq \emptyset$, el razonamiento es similar. Se deja como ejercicio.

□

Supermodularidad débil

Definción 2.

Una función $f : \mathcal{P}(V) \to \mathbb{N}$ *es débilmente supermodular si* $f(V) = 0$ *y para cada* $A, B \subseteq V$ *se cumplen al menos una de las dos condiciones siguientes:*

- $f(A \cap B) + f(A \cup B) \geq f(A) + f(B)$,
- $f(A - B) + f(B - A) \geq f(A) + f(B)$.

Definción 3.

La función de corte residual de $f : \mathcal{P}(V) \to \mathbb{N}$ *para* H *es* $f'(S) = f(S) - \delta_H(S)$.

Función de Corte Residual

Ejercicio

Probar que la función de requerimientos $f(S)$ para el Problema de Redes de Steiner siempre es débilmente supermodular.

Lema 4.

Si f es débilmente supermodular entonces f' también lo es.

Lema 5.

Si x es solución óptima con requerimientos f y x_H se obtiene de x tomando $\lceil x_e \rceil$ veces cada arista e con $x_e \geq 1/2$, entonces $x - x_H$ es solución del problema primal con requerimientos f'.

Teorema 1.

Si f es débilmente supermodular, todo punto extremal de la formulación relajada verifica $x_e \geq 1/2$ para alguna arista.

Algoritmo

Vamos a asumir que los requerimientos f son débilmente supermodulares.

Algoritmo 1 $H = \mathit{IteratedRounding}(G, R, c)$

$f \leftarrow \mathit{Requirements}(R)$
$x \leftarrow \mathit{SolveLP}(G, f, c)$
$H \leftarrow \mathit{RoundUp}(x)$ $\{\lceil x_e \rceil$ veces cada e con $x_e \geq 1/2\}$
$f' \leftarrow \mathit{Residual}(f, H)$
while $f' \neq 0$ **do**
    $x' \leftarrow \mathit{SolveLP}(G - H, f', c)$
    $H \leftarrow \mathit{RoundUp}(x')$
    $H \leftarrow H' \cup H$
end while
return H

Eficiencia del Algoritmo

Teorema 2.

El algoritmo es de factor 2 para Redes de Steiner.

Idea de la Prueba. Por inducción en la cantidad de iteraciones. Sea H el conjunto de aristas obtenidas en la primera iteración. Si el algoritmo termina en una iteración entonces tenemos un redondeo común cuyo costo no supera el doble de OPT. La clave del paso inductivo es notar que si x es solución óptima de la primera iteración y $\hat{x}$ se obtiene de anular las coordenadas de x tales que $x_e < 1/2$, entonces $x - \hat{x}$ es solución para el requerimiento residual f' luego de la primera iteración. Sea H' las aristas adicionadas a H. Notemos que $c(H') \leq 2c(x - \hat{x})$. Luego $H \cup H'$ es factible y:

$$c(H \cup H') \leq c(H) + c(H') \leq 2c(\hat{x}) + 2c(x - \hat{x}) \leq 2c(x).$$

$\square$

Comentarios

1. La construcción de solución extremal eficiente utiliza flujos.
2. La existencia de variables que superan $1/2$ se deduce de teoría de conteo.
3. El factor 2 generaliza al obtenido en Bosques de Steiner.
4. Las ruedas son una familia justa para el algoritmo.
5. El gap de integralidad del problema relajado es 2.