# Algoritmos de Aproximación

Clase 8
Bosques de Steiner

Pablo Romero

Lunes 11 de setiembre de 2023. Montevideo, Uruguay.

# Bosques de Steiner

## Bosques de Steiner

Dado un grafo $G = (V, E)$ con costos en sus aristas $c : E \to \mathbb{Q}^+$ y una colección disjunta de vértices $S_1, S_2, \ldots, S_k$ de $V$, hallar el subgrafo $H$ de $G$ de mínimo costo tal que para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ todos los vértices de $S_i$ se hallan en la misma componente conexa.

El problema de Bosques de Steiner es $\Pi_6 = (\mathcal{I}, S_{\Pi_6}, f_6)$, donde

- $\mathcal{I} = \{I = (G, S_1, \ldots, S_k, c), G \in \mathcal{G}, c : E(G) \to \mathbb{Q}^+, \forall i \in \{1, 2, \ldots, k\}\ S_i \subseteq V(G), \forall i \neq j, S_i \cap S_j = \emptyset\}$.
- $S_{\Pi_1}(I) = \{H : H \subseteq G, H = H_1 \cup H_2 \cup \ldots H_t, \forall i \in \{1, 2, \ldots, k\} \exists j \in \{1, 2, \ldots, t\}, S_i \subseteq H_j\}$.
- $f_6(H) = \sum_{e \in E(H)} c(e)$.
- $OPT_{\Pi_6}(I) = \min_{\{H \in S_{\Pi_6}(I)\}} \sum_{e \in E(H)} c(e)$.

# Problema Primal

Sea $I = (G, S_1, \ldots, S_k, c)$ y $r(u, v)$ el *requerimiento de conectividad*, tal que $r(u, v) = 1$ si y sólo $u$ y $v$ pertenecen al mismo conjunto $S_i$. Sea $f : \mathcal{P}(V) \to \{0, 1\}$ tal que $f(S) = 1$ si y sólo si el corte existen $u \in S$, $v \in S^C$ tales que $r(u, v) = 1$. Definamos $x_e \in \{0, 1\}$ tal que $x_e = 1$ si se selecciona la arista $e$, y $x_e = 0$ en caso contrario. El problema primal consiste en relajar $x_e \in \{0, 1\}$ por $x_e \geq 0$, y se expresa como sigue:

$$\min_{x} \sum_{e \in E} c_e x_e$$

$$s.a. \sum_{e \in \delta(S)} x_e \geq f(S), \forall S \subseteq V$$

$$x_e \geq 0 \, \forall e \in E.$$

# Problema Dual - Terminología

$$\max_{y} \sum_{S \subseteq V} f(S) y_S$$

$$s.a. \sum_{s: e \in \delta(S)} y_e \leq c_e \, \forall e \in E$$

$$y_S \geq 0, \, \forall S \subseteq V.$$

## Terminología

- Diremos que *crecemos el corte* $(S, S^c)$ si incrementamos $y_S$.
- Una arista $e$ *siente el dual* $y_S$ si $y_S > 0$ y $e \in \delta(S, S^c)$.
- Una arista está *saturada* si siente tanto dual como su costo.
- Un corte $(S, S^c)$ es *insatisfecho* si $f(S) = 1$ pero no hay aristas $e$ con $x_e = 1$ tales que $e \in (S, S^c)$, y es *activo* si además $< S >$ es una componente conexa.

# Esquema Primal-Dual con sincronización

El cometido del esquema primal-dual con sincronización consiste en mejorar en cada iteración la solución dual y concluir el ciclo con una solución entera primal factible que sea factor 2 del problema de Bosques de Steiner.

Iniciamos con soluciones dual nula (factible) y primal nula (no factible). En cada iteración aumentamos de manera sincronizada $y_S$ para todos los cortes $(S, S^c)$ activos hasta saturar a alguna arista $e$. Dicha arista $e$ debe ser elegida $(x_e = 1)$.

Al final del algoritmo vamos a satisfacer tanto la factibilidad primal como las condiciones de complementariedad primal (con $\alpha = 1$) y las condiciones de complementariedad dual relajadas (con $\beta = 2$):

- $\forall e \in E, (x_e \neq 0 \rightarrow \sum_{S, e \in \delta(S)} y_S = c_e)$;
- $\forall S \in V, (y_S \neq 0 \rightarrow \sum_{e, e \in \delta(S)} x_e \leq 2f(S)$.

# Algoritmo Primal-Dual con sincronización

**Algoritmo 1** $\mathcal{U} = PrimalDualS(G, S_1, \ldots, S_k, c)$

$x \leftarrow 0$
$y \leftarrow 0$
$\mathcal{S} \leftarrow Activos(x, y)$
**while** $x$ **not feasible do**
  $y_S \leftarrow Aumentar(\mathcal{S})$ {hasta que $\sum_{S, e \in \delta(S)} y_S = c_e$}
  $\mathcal{E} \leftarrow Saturados(y)$ {retorna $\{e : \sum_{S, e \in \delta(S)} y_S = c_e)\}$}
  $e \leftarrow Elegir(\mathcal{E})$
  $x_e \leftarrow 1$
  $\mathcal{S} \leftarrow Activos(x, y)$
**end while**
$x^{out} \leftarrow EliminarRedundantes(x)$
**return** $x$

# Estudio de la factibilidad primal

**Lema 1.**

*La salida $x^{out}$ de PrimalDual es primal factible y entera.*

**Prueba.** Sea $I = (G, S_1, S_2, \ldots, S_k, c)$ una instancia de problema de Bosque de Steiner. Como al inicio $x = y = 0$, el grafo nulo es acíclico y tiene tantas componentes conexas como vértices en $S_1, S_2, \ldots, S_k$. Como el grafo tiene una cantidad finita de aristas entonces el ciclo **while** termina. Como se agrega en cada iteración exactamente una arista entre distintas componentes conexas, nunca se agregan ciclos, por lo que el subgrafo recubridor $F$ de $G$ cuyas aristas son $\{e \in E(G) : x_e = 1\}$ es un bosque. Entonces, cualquier par de vértices $u$ y $v$ de $G$ tales que $r(u, v) = 1$ tienen un único camino que los une en $F$, y ninguna de esas aristas son redundantes, por lo que $x^{out}$ es primal factible y entera. ■

# Estudio del grado de los cortes

Sea $F'$ el bosque recubridor cuyas aristas son $\{e \in E : x_e^{out} = 1\}$.

**Lema 2.**

*Si $x$ se obtiene luego de la i-ésima iteración, $G_i = (V(G), \{e \in E(G) : x_e = 1\})$, $C$ es una componente conexa de $G_i$ y $f(C) = 0$ entonces $gr_{F'}(C) \neq 1$.*

**Prueba.** Supongamos por absurdo que $gr_{F'}(C) = 1$. Sea $e = \delta(C, C^c)$. Como $e \in F'$ entonces $e$ no es redundante. Entonces, existen $u \in C$ y $v \in C^c$ tales que $r(u, v) = 1$, y el único camino $u$-$v$ contiene a $e$. Esto implica que $f(C) = 1$, contradiciendo la hipótesis. Luego $gr_{F'}(C) = 1$, como queríamos demostrar. ■

# Rendimiento del algoritmo *PrimalDualS*

**Teorema 1.**
*PrimalDualS es un algoritmo de aproximación de factor 2 para el problema de Bosques de Steiner.*

**Idea de la Prueba.** Por el Lema 1 y la factibilidad del dual, basta con probar que $\sum_{e \in F'} c_e \leq 2 \sum_{S \subseteq V} y_S$. Como las aristas de $F'$ están saturadas entonces $c_e = \sum_{S, e \in \delta(S)} y_S$, y reordenando sumas:

$$\begin{aligned}\sum_{e \in F'} c_e &= \sum_{e \in F'} \sum_{S, e \in \delta(S)} y_S \\ &= \sum_{S \subseteq V} \sum_{e \in \delta(S, S^c) \cap F'} y_S = \sum_{S \subseteq V} gr_{F'}(S) y_S.\end{aligned}$$

Para probar que $\sum_{S \subseteq V} gr_{F'}(S) y_S \leq 2 \sum_{S \subseteq V} y_S$ se usa el Lema 2 y que el grado promedio de todo bosque es menor que 2. $\square$

# Comentarios

1. El factor 2 generaliza al obtenido en el Problema de Steiner.
2. La eliminación de aristas irrelevantes es esencial.
3. La familia de grafos rueda es justa para el algoritmo.
4. El gap de integralidad es igual a 2.