Algoritmos de Aproximación

Clase 7
Redondeo y Aleatorización

Pablo Romero

Lunes 4 de setiembre de 2023. Montevideo, Uruguay.

Redondeo en Programación Lineal

Sea Π un COP que se puede formular mediante programación lineal entera de modo que su relajación es el siguiente *Problema Primal*:

$$\min_{x} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1}$$

$$s.a. \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i,\ i = 1, \ldots, m. \tag{2}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

La técnica de redondeo consiste en hallar la solución óptimo global y luego tomar redondeos asegurando la factibilidad primal.

Redondeo en el Cubrimiento de Conjuntos

Sea $I = (\mathcal{S}, U, c)$ una instancia del cubrimiento de conjuntos con frecuencia máxima f. Consideremos el problema primal:

$$\min_{x_S} \sum_{S \in \mathcal{S}} c(S) x_S \tag{4}$$

$$s.a. \sum_{S : e \in S} x_S \geq 1, \forall e \in U. \tag{5}$$

$$x_S \in \{0,1\}, \forall S \in \mathcal{S}, \tag{6}$$

Sea x^* solución óptima del problema primal, z el redondeo tal que $z_S = 1$ si y sólo si $x^*_S \geq 1/f$ y $\mathcal{U} = \{S \in \mathcal{S} : z_S = 1\}$.

Redondeo en el Cubrimiento de Conjuntos

Teorema 1.

El algoritmo de redondeo que retorna $\mathcal{U} = \{S \in \mathcal{S} : z_S = 1\}$ *es de factor* f *para el cubrimiento de conjuntos.*

Prueba. Sea $I = (\mathcal{S}, U, c)$ una instancia de cubrimiento de conjuntos. Primero veamos que $\mathcal{U}$ es un cubrimiento. Sea $e \in U$. La restricción (5) consiste en no más de f sumandos no negativos que superan 1. Necesariamente debe existir al menos un sumando x_S tal que $x_S \geq 1/f$ que cumple que $e \in S$. Como $S \in \mathcal{U}$ y e es arbitrario entonces $\mathcal{U}$ es un cubrimiento de U. Por último:

$$c(\mathcal{U}) = \sum_{S \in \mathcal{S}} c(S) z_S \leq \sum_{S \in \mathcal{S}} c(S) f x_S^* = fOPT_f(I) \leq fOPT(I).$$

Dado que programación lineal pertenece a $\mathcal{P}$, el algoritmo de redondeo es de tiempo polinomial. ■

Redondeo con aleatorización

Elijamos cada conjunto S con probabilidad x_S^*; sea $\mathcal{C}$ la colección de conjuntos obtenida. Su costo esperado es

$$E(\mathcal{C}) = \sum_{S \in \mathcal{S}} c(S) x_S^* = OPT_f.$$

Sin embargo, $\mathcal{C}$ no es necesariamente un cubrimiento de U...
Vamos a proceder tomando N realizaciones independientes $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots, \mathcal{C}_N$ de colecciones de conjuntos con la ley de $\mathcal{C}$.
Sea $\mathcal{U}_N = \cup_{i=1}^N \mathcal{C}_i$. A continuación vamos a buscar el valor mínimo para N que cumple simultáneamente las siguientes condiciones:

- $\mathbb{P}(\mathcal{U}_N \notin S_{\Pi_2}(I)) \leq 1/4$;
- $\mathbb{P}(c(\mathcal{U}) \geq 4NOPT_f(I)) \leq 1/4$.

Probabilidad de obtener un cubrimiento

Sea $e \in U$ y sean $S_1, S_2, \ldots, S_k$ todos los conjuntos de $\mathcal{S}$ que cubren a e. Las probabilidades de ser seleccionados son $x_{S_1}, x_{S_2}, \ldots, x_{S_k}$ cumplen (5), por lo que $\sum_{i=1}^{k} x_{S_k} \geq 1$. La probabilidad de que e no sea cubrimiento por $\mathcal{C}$ es entonces:

$$\mathbb{P}(e \notin \mathcal{C}) = \prod_{i=1}^{k}(1 - x_{S_i}) \leq (1 - \frac{1}{k})^k \leq \frac{1}{e},$$

y lo anterior no depende del elemento e elegido. Entonces, tomando un entero N tal que $N \geq clog(n)$ donde c satisface $\left(\frac{1}{e}\right)^{clog(n)} \leq \frac{1}{4n}$, aseguramos que $\mathbb{P}(\mathcal{U}_N \notin S_{\Pi_2}(I)) \leq 1/4$.

Acotación del costo esperado

Recordemos que si $X \geq 0$ y $a > 0$ entonces $E(X) \geq aP(X \geq a)$.
Aplicando esta desigualdad a $X = c(\mathcal{U}_N)$ y $a = 4NOPT_f(I)$,

$$\mathbb{P}(c(\mathcal{U}) \geq 4NOPT_f(I)) \leq 1/4.$$

Hemos probado el siguiente:

Teorema 2.

Sea $I = (\mathcal{S}, U, c)$ instancia del cubrimiento de conjuntos y $n = |U|$. Sea N un entero tal que $N > clog(n)$ donde $e^{-clog(n)} \leq 1/(4n)$. Sea x una solución óptima del problema primal y $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots, \mathcal{C}_N$ colecciones independientes de conjuntos seleccionados dentro de $\mathcal{S}$, tales que en cada $\mathcal{C}_i$ se elige el conjunto S_j de $\mathcal{S}$ con probabilidad x_{S_j}. Sea $\mathcal{U}$ la colección dada por $\mathcal{U} = \cup_{i=1}^{N} \mathcal{C}_i$. Entonces, $\mathcal{U}$ es un cubrimiento de U con costo es no mayor que $4NOPT_{\Pi_2}(I)$ con probabilidad mayor que $1/2$.

Comentarios

1. Hemos visto 4 algoritmos de aproximación aplicados al cubrimiento de conjuntos.
2. El ajuste dual permite recuperar el factor logarítmico del algoritmo goloso.
3. El redondeo es muy simple, y provee un factor f para el cubrimiento de conjuntos.
4. El redondeo con aleatorización compromete cubrimiento con costo, y provee distintas soluciones en cada ejecución.
5. El esquema primal-dual mejora paulatinamente la solución del dual y del primal hasta conseguir factibilidad entera del primal.
6. Veremos la aplicación del esquema primal-dual al problema de Steiner y generalizaciones.