

Facultad de Ingeniería – Udelar

Departamento de Diseño industrial – IIMPI

**MODELADO DE SISTEMAS MECÁNICOS EMPLEANDO EL
MÉTODO DE LOS ELEMENTO FINITOS**

REFERENTE CLASE #5

**CLASE PRACTICA 3
FORMULACIÓN DE ELEMENTOS FINITOS TIPO VIGAS.**

PROFESOR

Dr. Henry Figueredo Losada

**Montevideo. Uruguay.
Noviembre 2019**

TEMA III. FORMULACIÓN DE ELEMENTOS FINITOS 1D-ESTATICOS.

CLASE PRACTICA 3. FORMULACIÓN DE ELEMENTOS FINITOS TIPO VIGA.

Sumario.

1. Introducción.

2. Ejemplos expositivos.

3. Ejercicios propuestos.

Objetivos.

Ampliar y profundizar los conceptos dados en las clases teóricas con ejemplos expositivos que realicen los pasos principales en el análisis de sistemas discretos MEF.

Bibliografía.

1. G.R.Liu "The Finite element Method- A practical course".
2. Chandrupatla, Tirupathi R.; Belegundu, Ashok D. (1999). "Introducción al estudio del elemento finito en ingeniería". México: Prentice Hall, 1999. ISBN: 978-970-17-0260-4.
3. O.C.Zienkiewicz, R.L.Taylor , J.Z.Zhu. (2010) "El método de los Elementos finitos. Vol 1: Las Bases". Editorial CIMNE. ISBN: 978-84-96736-71-9.
4. Larry J. Segerlind (1984) "Applied Finite Element Analysis", 2nd Edition. published by Wiley. ISBN: 978-0-471-80662-2

1. Introducción.

Cada tema estará provisto de algunos problemas que sirven como ejemplos para mejorar la comprensión de los temas tratados en las clases teóricas. En la mayoría de las veces el *Ejemplos 1.1* puede ser utilizado para la generación del programa en Octave que será desarrollado en los LABORATORIOS. El estudiante deberá hacer un esfuerzo para resolver los problemas propuestos. Alentamos el uso de sus programas elaborados y paquetes comerciales para evaluar y suplementar el proceso de aprendizaje. En la Bibliografía encontrarán libros recomendados.

2. Ejemplos expositivos.

Consideremos un ejemplo de una viga doblemente empotrada como se muestra en la figura 1.

Ejemplo 3.1: Dado el sistema mostrado en la Fig. 1, donde un elemento de viga está sujeto a cargas externas como se muestra.

- Determine la deflexión y rotación en el nodo 2?
- Calcular las fuerzas de reacción y momentos en el nodo 1 y 2.
- La tensión en cada elemento.

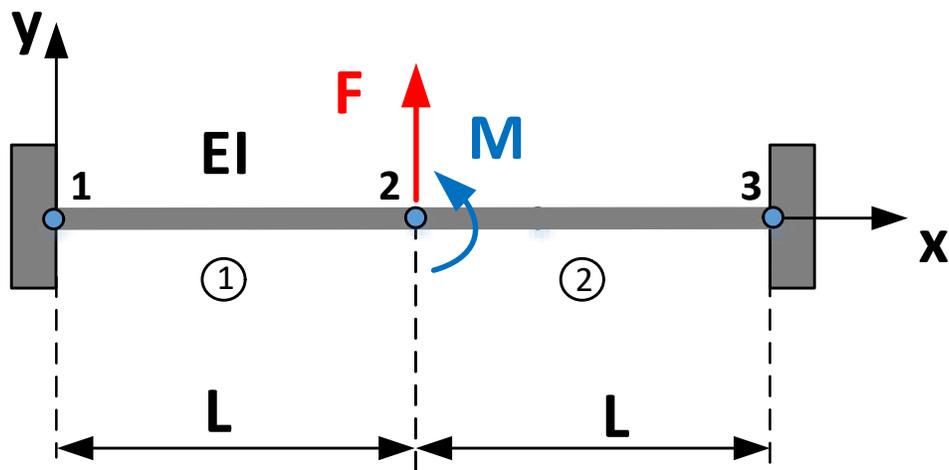


Figura 1. Elementos tipo viga con fuerzas externas.

Solución.

Resultados utilizando el método de Elementos Finitos.

Determinar la matriz de rigidez de cada elemento y representarla en el sistema global.

Utilizando la Ec. (4.31) para el elemento de tipo viga:

$\begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ \theta_1 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$	(4.1)
---	-------

Elemento 1:

$[k^1] = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} V_1 & \theta_1 & V_2 & \theta_2 \\ 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix}$	(4.2)
--	-------

Elemento 2:

$[k^2] = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} V_2 & \theta_2 & V_3 & \theta_3 \\ 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix}$	(4.3)
--	-------

Cada elemento del modelo está definido por su matriz de rigidez en el sistema global de coordenadas.

La rigidez de la estructura completa depende de la rigidez de cada uno de sus elementos, ahora realizamos el ensamblaje de la matriz de rigidez de la estructura a partir de las matrices de rigidez de cada uno de sus elementos utilizando el método de superposición o Método de Rigidez Directo.

Debemos identificar en cada matriz de rigidez de los elementos su contribución en la matriz de rigidez global de la estructura, los coeficientes i,j (línea , columna) de las matrices $\widehat{K}_e^1, \widehat{K}_e^2$ serán adicionadas en la misma localización i,j de la matriz de la estructura. La estructura analizada tiene 6 DOF, por tanto, su matriz de Rigidez tendrá dimensiones de 6 x 6.

$$\frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} V_1 & \theta_1 & V_2 & \theta_2 & V_3 & \theta_3 \\ 12 & 6l & -12 & 6l & 0 & 0 \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6l & 24 & 0 & -12 & 6l \\ 6l & 2l^2 & 0 & 8l^2 & -6l & 2l^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6l & 12 & -6l \\ 0 & 0 & 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ \theta_1 \\ V_2 \\ \theta_2 \\ V_3 \\ \theta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{1y} \\ M_1 \\ F_{2y} \\ M_2 \\ F_{3y} \\ M_3 \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

Incorporando las condiciones de contorno y fuerzas externas para el modelo en la matriz global de la estructura, la ecuación de equilibrio:

$$F_{2y} = -P, \quad M_2 = M, \quad V_1 = V_3 = \theta_1 = \theta_3 = 0 \quad (1.5)$$

Simplificando:

$$\frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 8l^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} V_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -P \\ M \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

Resolviendo la Ec. (1.6) se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} V_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \frac{l}{24EI} \begin{Bmatrix} -Pl^2 \\ 3M \end{Bmatrix} \quad (1.7)$$

A partir de la Ec. (1.7) y conocidos los desplazamientos V_2 y θ_2 , se obtienen:

$$\begin{pmatrix} F_{1y} \\ M_1 \\ F_{3y} \\ M_3 \end{pmatrix} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l \\ -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l \\ 6l & 2l^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} V_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{Bmatrix} 2P + 3M/l \\ Pl + M \\ 2P - 3M/l \\ -Pl + M \end{Bmatrix} \quad (1.8)$$

La tensión en el elemento es calculada utilizando la Ec.

$\sigma = \sigma_x = \frac{My}{I}$	(1.9)
------------------------------------	-------

Caso de estudio con un programa de Elementos Finitos

Considere la Armazón de la bicicleta mostrada en la Figura 1, para todos los elementos considere tubos huecos con diámetro exterior 24 y 2 mm de espesor) y están elaborados de una aleación de aluminio. Determinar las deformación y tensión de los elementos utilizando FEM.

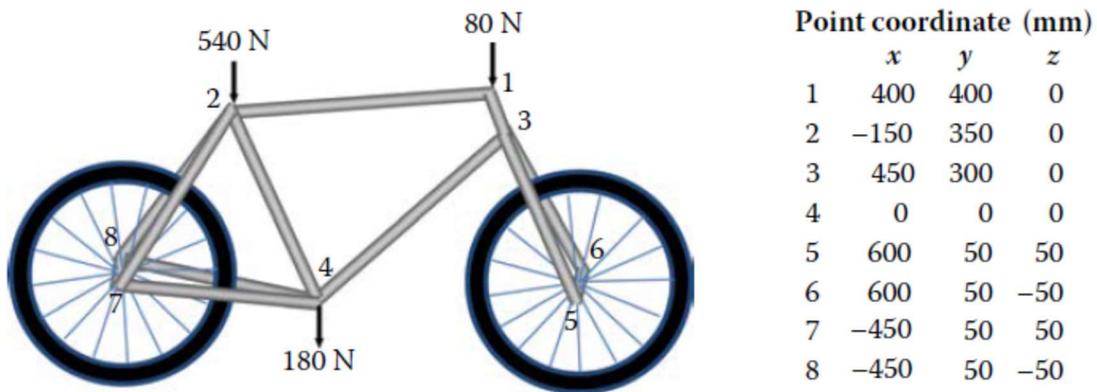


Figura 1. Armazón de la bicicleta.

Resuelva el problema propuesto utilizando un programa de Elementos Finitos.

3. Ejercicios Propuestos.

Ejercicio Propuesto 3.1: Considere una viga en empotrada soportada por un resorte en el extremo derecho como se muestra en la figura 1.1, Determine la deflexión, rotación y las fuerzas de reacción con los siguientes datos P=50kN, k=200 kN/m , L=3 m , E=210 GPa, I=2*10⁻⁴ m⁴.

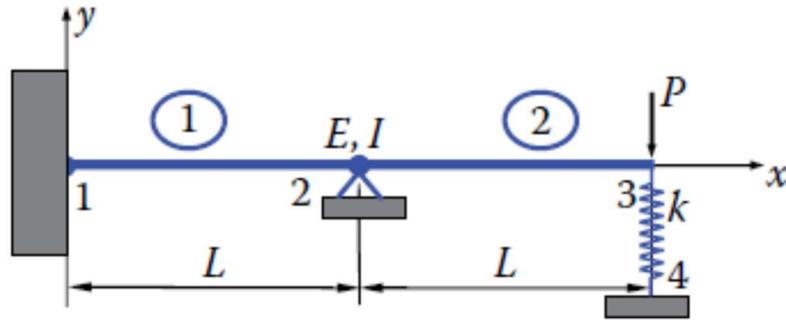


Figura 4.1 Viga en empotrada soportada por un resorte.

Ejercicio Propuesto 3.2: Considere una viga en cantilever mostrada en la figura 1.2, resuelva utilizando un solo elemento. Determine la deflexión y pendiente en el punto C. Los datos $E=20 \times 10^6$ lb/in², $\text{área}=10.3$ in², $I=510$ in⁴.

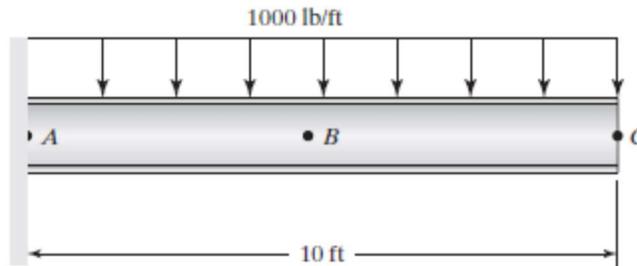


Figura 4.2 viga en cantilever con una carga distribuida uniforme.

Ejercicio Propuesto 3.3: Considere la armadura mostrada en la figura 1.3, de sección transversal $A=6.8$ in², $I=65$ in⁴, $E=30 \times 10^6$ psi. Determine los desplazamientos y las rotaciones de las 2 uniones 1 y 2.

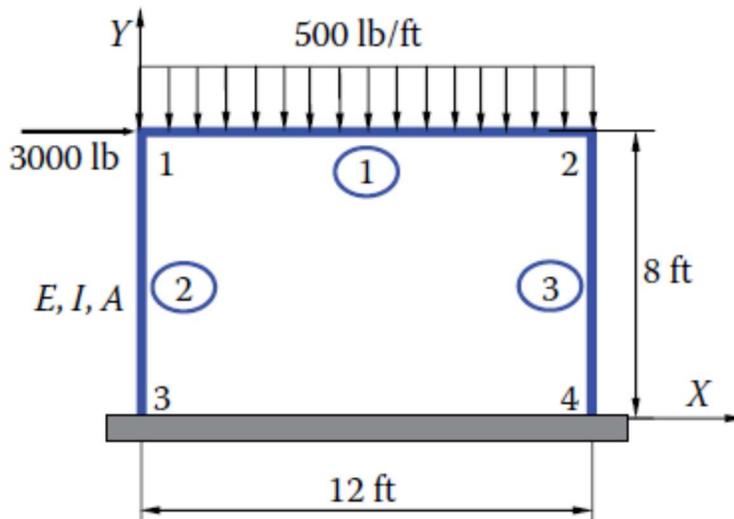


Figura 1.3 Armadura formada con elementos de tipo viga.

Ejercicio Propuesto 3.4: Considere la armadura mostrada en la figura 1.4, de sección transversal y momento de inercia mostrada en la figura. $E = 30 \times 10^6 \text{ lb/in}^2$. Determine los desplazamientos y la fuerzas en los elementos.

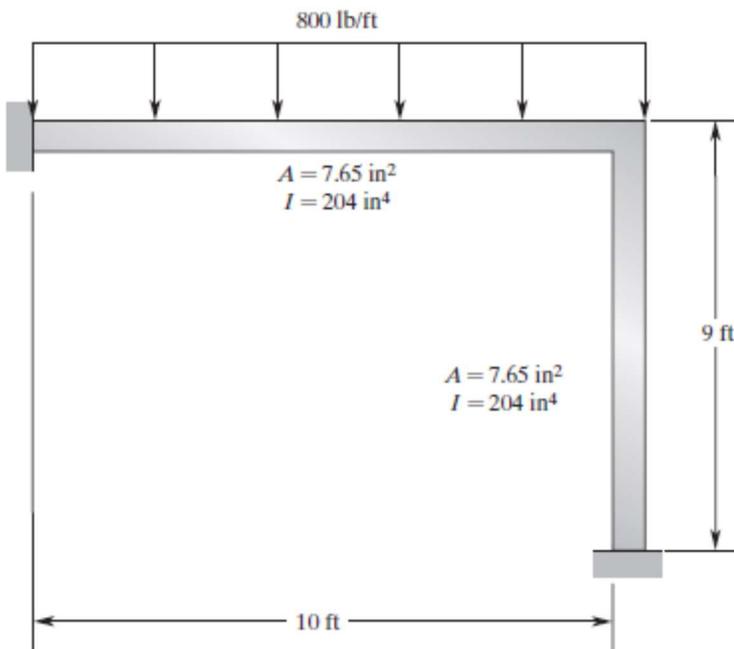
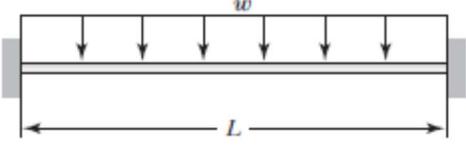
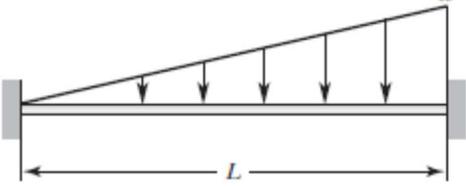
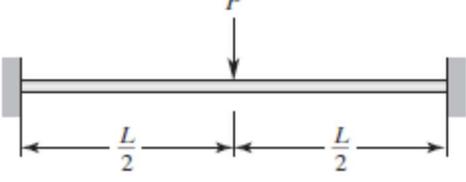


Figura 4.4 Armadura formada con elementos de tipo viga.

Anexo A

TABLE 4.2 Equivalent nodal loading of beams

Loading	Equivalent Nodal Loading
 <p>A horizontal beam of length L is shown, fixed at both ends. A uniformly distributed load w is applied downwards along the entire length of the beam.</p>	 <p>The equivalent nodal loading consists of two vertical forces and two moments at the ends of the beam. At the left end, there is a downward force of $\frac{wL}{2}$ and a counter-clockwise moment of $\frac{wL^2}{12}$. At the right end, there is a downward force of $\frac{wL}{2}$ and a clockwise moment of $\frac{wL^2}{12}$.</p>
 <p>A horizontal beam of length L is shown, fixed at both ends. A triangular load is applied downwards, starting at 0 at the left end and increasing linearly to w at the right end.</p>	 <p>The equivalent nodal loading consists of two vertical forces and two moments at the ends of the beam. At the left end, there is a downward force of $\frac{3wL}{20}$ and a counter-clockwise moment of $\frac{wL^2}{30}$. At the right end, there is a downward force of $\frac{7wL}{20}$ and a clockwise moment of $\frac{wL^2}{20}$.</p>
 <p>A horizontal beam of length L is shown, fixed at both ends. A point load P is applied downwards at the center of the beam, which is at a distance of $\frac{L}{2}$ from each end.</p>	 <p>The equivalent nodal loading consists of two vertical forces and two moments at the ends of the beam. At the left end, there is a downward force of $\frac{P}{2}$ and a counter-clockwise moment of $M = \frac{PL}{8}$. At the right end, there is a downward force of $\frac{P}{2}$ and a clockwise moment of $M = \frac{PL}{8}$.</p>