

**Facultad de Ingeniería – Udelar**

**Departamento de Diseño industrial – IIMPI**

**MODELADO DE SISTEMAS MECÁNICOS EMPLEANDO EL  
MÉTODO DE LOS ELEMENTO FINITOS**

**CLASE N° 5**

**FORMULACIÓN DE ELEMENTOS FINITOS TIPO VIGA**

**PROFESOR**

**Dr. Henry Figueredo Losada**

**Montevideo. Uruguay.  
Noviembre 2019**

## **TEMA II. FORMULACIÓN DE ELEMENTOS FINITOS 1D-ESTATICOS.**

### **CLASE 5. FORMULACIÓN DE ELEMENTOS FINITOS TIPO VIGA**

#### **Sumario.**

- 1. Introducción.**
- 2. Definición de los Elementos Finitos tipo Vigas.**
- 3. Derivación de la Matriz de Rigidez para un Elemento Tipo Vigas.**
- 4. Transformación de la matriz de rigidez del elemento en sistema local para el sistema global.**
- 5. Cálculo de la tensión para una viga en el plano x-y.**

#### **Objetivos.**

Saber usar las formulaciones del método de los elementos finitos para modelar estructuras con elementos que transmiten flexiones, cizallamiento y torciones.

#### **Bibliografía.**

9. Klaus-Jurgen Bathe "Finite Element Procedures", 2da Edição.
10. G.R.Liu "The Finite element Method- A practical course".
11. The Finite Element Method using MATLAB - Kwon and Bang

#### **Bibliografía opcional portugués**

12. Avelino Alves Filho "Elementos Finitos, A base da tecnologia CAE", 5ta Edição.

#### **1. Introducción.**

En esta aula inicia el estudio del tercer elemento finito que hará parte de la biblioteca de elementos que estamos construyendo en este curso, o sea el Elemento de Viga (BEAM) con la superposición de comportamientos independientes para flexión, cizallamientos y torciones. En la mecánica estructural un elemento viga es un componente estructural caracterizado por dos propiedades:

1. La dimensión longitudinal o axial es mayor que las otras dimensiones, las cuales son conocidas como dimensiones transversales. La intercepción de un plano normal a la longitud dimensional con la barra define la sección transversal. La dimensión longitudinal define el eje longitudinal.
2. La viga resiste además de una fuerza interna axial a lo largo de su dimensión longitudinal también resisten flexiones, cizallamientos y torciones.

Nota: Un elemento viga consiste en una barra recta, de longitud mucho mayor que las dimensiones de su sección transversal y puede transmitir, además de Fuerzas axiales, Momentos Flectores en los planos que contienen sus dos ejes principales del plano de la sección transversal de la viga, fuerzas cortantes en los mismos planos de acción de los momentos flectores y Momentos Torsores con relación al eje de los centros de torsión de la viga.

Recordando del estudio de la *resistencia de materiales* algunos conceptos básicos para utilizar en la formulación del elemento tipo viga con las siguientes hipótesis:

- Las secciones transversales de la viga permanecen planas después de su deformación sobre acciones externas (*hipótesis de secciones planas*).
- La viga será idealizada para los efectos de análisis por el lugar geométrico de los centroides de sus secciones transversales que será el *eje* geométrico representado por un segmento de reta o curva, como elemento unidimensional.
- Considerase que secciones transversales sean perpendiculares a ese *eje*.
- Los apoyos son idealizados como puntuales y la estructura queda modelada como un conjunto de elementos unidimensionales ligados entre sí en puntos y apoyos discretos.

En el estudio de la mecánica del medio continuo, en la idealización tridimensional y proximidad infinitesimal del “*punto material*“, el efecto del material de un lado de una sección infinitesimal sobre el material del otro lado de esta sección es considerado por medio del vector de tensión de componentes normales y cizallamientos.

### ***Esfuerzos seccionales.***

Supongamos una estructura en forma de viga en equilibrio mediante la representación bidimensional de la fig 4.1, con una sollicitación para unas cargas o sistema de fuerzas exteriores. Con la idealización de esta viga en su eje geométrico, esas supuestas fuerzas aplicadas en este *eje* fig 4.1 intermedia, las fuerzas interiores que surgen en la viga son mostradas solamente si la barra es seccionada, imaginariamente, en dos partes.

Llevando en consideración el efecto estático de parte izquierda sobre la parte derecha como se muestra en la parte inferior de la fig 4.1. Ese efecto es expresado por la resultante de esas fuerzas,  $\mathbf{R}$ , y por los momentos resultantes de esas fuerzas en relación a ese punto,  $\mathbf{M}_R$ , aplicando el principio de acción y reacción sobre la sección estas fuerzas interiores siempre

son recíprocas. A este método de representar las fuerzas internas dividiendo en secciones se denomina *Métodos de las secciones*.

Estas fuerzas interiores deben distribuirse en la sección, de tal manera que las superficies deformadas de la sección al juntarse coinciden. Esta condición se denomina condición de continuidad de las deformaciones.

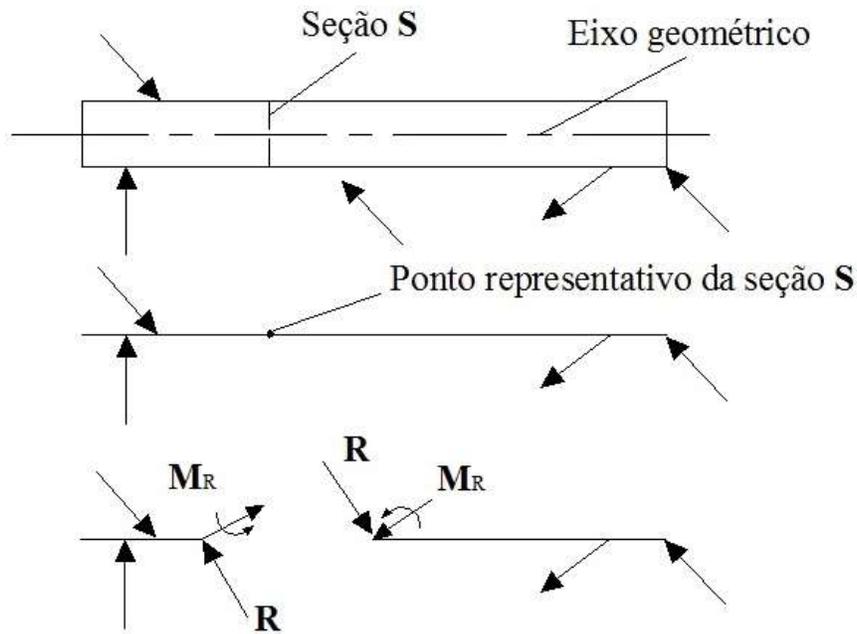


Figura 4.1. Viga recta en equilibrio.

Como mostramos en la parte superior de la fig 4.2, está representado siguiendo el principio de la estática, el sistema de fuerzas interiores y el centro de gravedad de la sección de la viga recta en un comportamiento en el espacio tridimensional. Al proyectar las resultantes de las fuerzas  $R$ , y el momento resultante  $M_R$ , sobre los ejes  $X$ ,  $Y$  y  $Z$ , obtenemos seis componentes: tres fuerzas y tres momentos, las componentes de estas resultantes en ese referencial están representados en la parte inferior de la fig 4.2 y son denominados *esfuerzos seccionales*, *esfuerzos solicitantes internos* o simplemente *esfuerzos internos*.

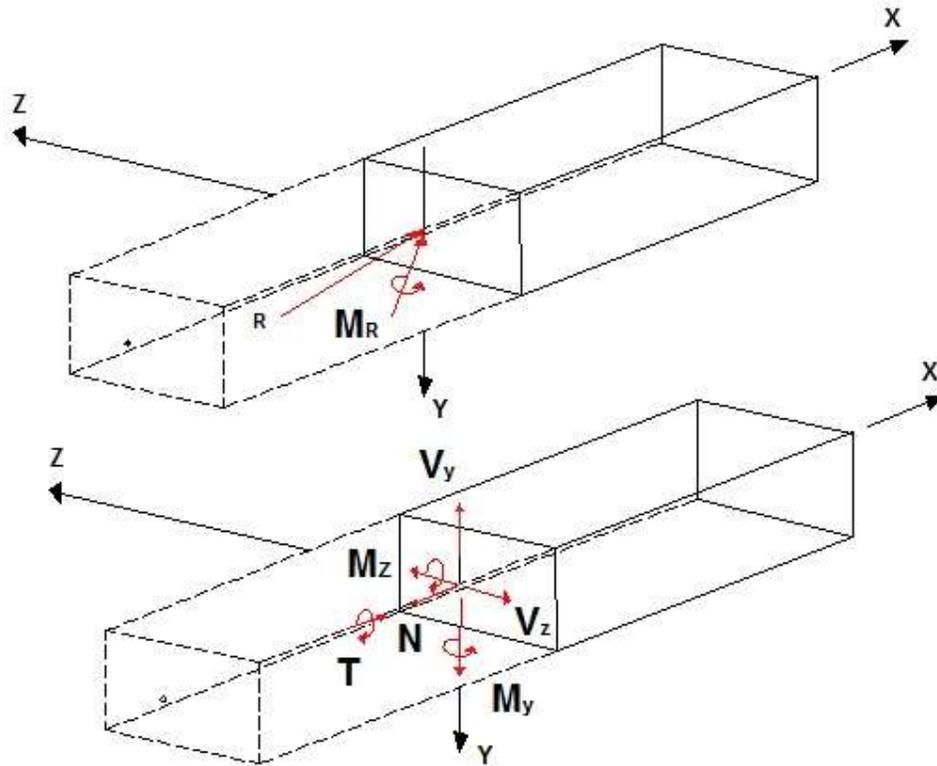


Figura 4.2 Esfuerzos seccionales de una viga recta-comportamiento en el espacio tridimensional.

Los componentes de las fuerzas interiores orientadas por la normal de la sección ( $N$ ) se denominan fuerza normal. Las fuerzas ( $V_y$ ,  $V_z$ ) son denominadas fuerzas cortantes, y momento que se dice con respecto al eje normal ( $T$ ), se denomina momento torsor y los momentos ( $M_z$ ,  $M_y$ ), momentos flectores.

En la fig 4.3, están representadas las deformaciones sobre la sección (rectangular) provocada por los esfuerzos seccionales.

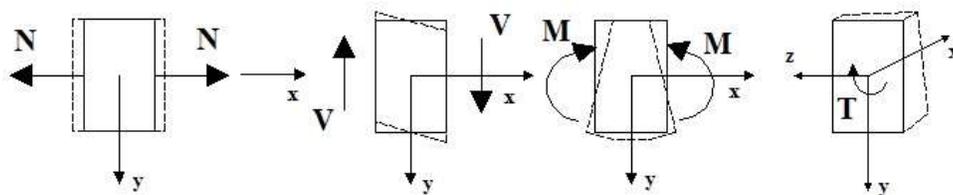


Figura 4.3 Deformaciones provocadas por los esfuerzos seccionales.

### Principio de los desplazamientos virtuales

En la literatura encontramos diversas demostraciones para el principio de los desplazamientos virtuales, aquí vamos a demostrar para el caso particular de estructuras tipo vigas (BEAM) de comportamiento lineal utilizando el principio de la conservación de energía.

En la fig. 4.4 se representa una estructura de viga, en líneas trazadas está representada la configuración anterior a la aplicación de las fuerzas externas y en trazo-continuo, la configuración deformada de equilibrio con esas fuerzas. A partir de la ultima configuración, se supone incrementos infinitesimales de fuerzas  $dP_i$ , que conducen a una nueva deformada de equilibrio representada en trazos/puntos, con incrementos infinitesimales de desplazamientos (transversales)  $d\delta_i$  asociados a los incrementos infinitesimales de deformación  $d\varepsilon_x$  y  $d\gamma_{xy}$ , y a incrementos infinitesimales de tensión  $d\sigma_x$  y  $d\tau_{xy}$ . Genéricamente, esos incrementos de deformación y de tensión son denotados, respectivamente por  $d\varepsilon$  y  $d\sigma$ .

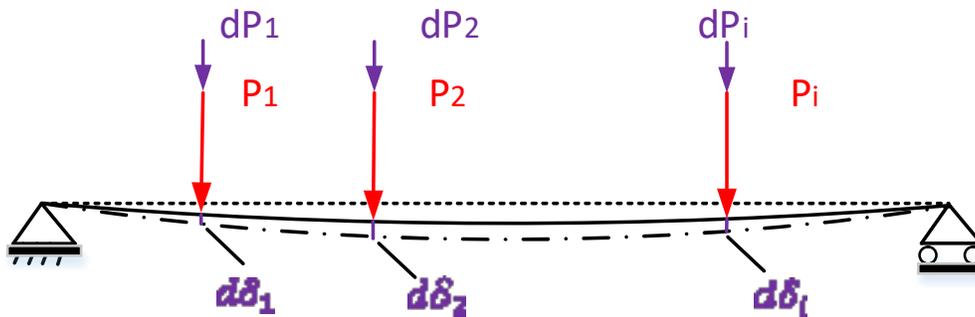


Figura 4.4 Representación unidimensional de una viga sobre fuerzas concentradas.

La fig. 4.5 representa un diagrama de un ensayo de tensión vs deformación que ilustra el incremento  $d\varepsilon$  asociado al incremento  $(\sigma d\varepsilon + \frac{1}{2} d\sigma d\varepsilon)$  de la densidad de energía de deformación. Para un estado tensional se tiene que el incremento de energía de deformación como:

$$\Delta U = \int_V \Delta U^* dV = \int_V \sum_{\sigma, \varepsilon} \left( \sigma d\varepsilon + \frac{1}{2} d\sigma d\varepsilon \right) dV \quad (4.1)$$

Nota: La integración es en el volumen de todas las barras de la estructura.

En forma semejante al incremento de energía Ec (4.1), el trabajo de los incrementos infinitesimales  $dP_i$  de las fuerzas externas se escribe:

$$W_e = \sum_i \left( P_i d\delta_i + \frac{1}{2} dP_i d\delta_i \right) \quad (4.2)$$

Por el principio de la conservación de energía, este trabajo es igual al correspondiente incremento de energía de deformación, despreciando los productos infinitesimales podemos escribir a partir de las Ec (4.1) - Ec (4.2).

$$\sum_i P_i d\delta_i = \int_V \left( \sum_{\sigma, \varepsilon} \sigma d\varepsilon \right) dV \quad (4.3)$$

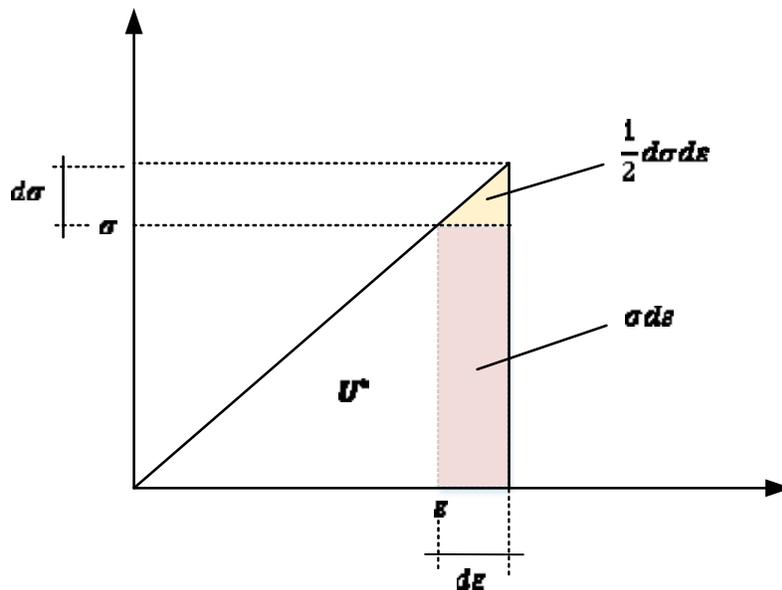


Figura 4.5 Diagrama de tensión-deformación.

La Ec 4.3 expresa el teorema o principio de los desplazamientos virtuales que se enuncia: Suponga en una estructura un campo de desplazamientos virtuales, el trabajo virtual de las fuerzas externas es igual al trabajo virtual de las fuerzas internas, es una condición necesaria y suficiente de equilibrio de la estructura.

Los campos de desplazamiento virtuales implican en un campo de deformaciones virtuales y consecuentemente, en un campo de tensiones virtuales. La resultante de esas tensiones en secciones transversales de las vigas son esfuerzos seccionales virtuales denotados por  $\bar{N}$ ,  $\bar{M}$ ,  $\bar{V}$  y  $\bar{T}$ . Es demostrado que, tratándose de estructuras de barras de comportamiento lineal, el trabajo de los esfuerzos seccionales reales  $N$ ,  $M$ ,  $V$  y  $T$  esta dado Ec (4.4).

$$W_i = \sum_b \int_x \left( \frac{N\bar{N}}{EA} + \frac{M\bar{M}}{EI} + \frac{V\bar{V}}{GA_v} + \frac{T\bar{T}}{GJ} \right) dx \quad (4.4)$$

Siendo Ec 4.4 la ecuación de trabajo virtual interno donde:

- El sumatorio expresa que la integración es a lo largo de la longitud de los ejes geométricos de las barras de la estructura.
- E y G son los módulos de elasticidad longitudinal y transversal, respectivamente
- A, I, J son, respectivamente, área, momento de inercia y el momento de inercia a torsión de la sección transversal.
- $A_v$  es el área de cizallamiento asociada a la fuerza cortante, que es igual al área real de la sección transversal dividida por factor de cizallamiento f.
- La notación M se refiere al momento flector  $M_y$  se adopta el momento de inercia  $I_y$ , y al momento flector  $M_z$  se adopta el momento el momento de inercia  $I_z$ . Semejante, a la notación para V que se refiere a las fuerzas cortantes.
- EA, EI,  $GA_v$ ,  $GJ$  son respectivamente las rigidices axial, flexión, distorsión y de torsión.

El principio de los desplazamientos virtuales sobre la forma de las ecuaciones anteriores Ec. (4.2) -(4.4) como:

$$W_e = W_i$$

$$\sum_i P_i d\delta_i = \sum_b \int_x \left( \frac{N\bar{N}}{EA} + \frac{M\bar{M}}{EI} + \frac{V\bar{V}}{GA_v} + \frac{T\bar{T}}{GJ} \right) dx \quad (4.5)$$

Cuando se trabaja con barras de sección transversal y propiedades elásticas constantes, podemos evitar el desarrollo analítico de la integral que ocurre en la Ec (4.6) del método de Maxwell-Mohr, utilizándose el procedimiento de A. N Vereshchagin.

$$\delta = \sum_b \int_x \left( \frac{N_u N}{EA} + \frac{M_u M}{EI} + \frac{V_u V}{GA_v} + \frac{T_u T}{GJ} \right) dx \quad (4.6)$$

Donde  $N_u$ ,  $M_u$ ,  $V_u$  y  $T_u$  representan los esfuerzos seccionales en la estructura con la fuerza unitaria;  $N$ ,  $M$ ,  $V$  y  $T$  representan los esfuerzos seccionales en la estructura con la carga original, y la integral es a lo largo de todas las barras de la estructura.

En lugar de calcular directamente la integral de Ec (4.6), se puede recurrir al método grafo-analítico, denominado método de multiplicación de los gráficos o método de Vereshchaguin.

**Nota:** *La integral que se calcula es igual al producto del área del gráfico del diagrama de  $M$  (de configuración arbitraria) por la ordenada del gráfico del diagrama  $M_u$ , situada debajo del centro de gravedad del primer gráfico del diagrama.*

El método de Vereshchaguin se puede aplicar a cada una de las seis integrales (caso más general) y la multiplicación de los gráficos se realiza de la misma forma, independientemente de que estos diagramas se hayan construido para los momentos flectores, para los momentos Torsores o para las fuerzas normales o transversales. La diferencia consiste solamente en que el producto de los diagramas no se divide por la rigidez  $EI$  como en el caso de la flexión, sino por  $GJ$  en el caso de la torsión, por  $EA$  en el de tracción y por  $GA_v$ , en la distorsión.

El valor del resultado de la multiplicación de los gráficos se considera positivo, si los dos gráficos se encuentran a un mismo lado de la barra y negativo, en caso contrario. El resultado positivo de la multiplicación indica que la dirección del desplazamiento coincide con la fuerza unitaria (o momento).

### ***Comportamiento de las vigas a Flexión. Cálculo de los desplazamientos***

En los cursos de comportamientos mecánicos de materiales se demostró que una viga prismática sometida a flexión pura, se flexiona en forma de arco y que, dentro del rango elástico, la relación entre el momento flector aplicado y su curvatura de la superficie neutra se obtiene de la siguiente expresión (Beer et al. 2013):

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad (4.7)$$

Siendo  $M$  el momento flector,  $E$  el módulo de elasticidad e  $I$  el momento de inercia de la sección transversal con respecto al eje neutro. Sin embargo, el momento flector y la curvatura de la superficie neutra variarán en las diversas secciones. Si  $x$  es la distancia de la sección al extremo izquierdo de la viga, se tiene:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M(x)}{EI} \quad (4.8)$$

El conocimiento de la curvatura en varios puntos de la viga permitirá extraer algunas conclusiones generales con respecto a la deformación de la viga bajo carga.

En la Ec (4.8) se establece una relación física, ya que matemáticamente la curvatura en un punto de la curva se define como:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \quad (4.9)$$

Donde  $\frac{dy}{dx}$  y  $\frac{d^2y}{dx^2}$  son la primera y segunda derivadas de la función  $y(x)$  representada por esa curva. Para pequeñas deformaciones la pendiente  $\frac{dy}{dx}$  es muy pequeña y su cuadrado puede ser despreciable comparado con la unidad, Entonces la Ec (4.9) puede ser reescrita para pequeños desplazamientos como:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dx^2} \quad (4.10)$$

Sustituyendo la Ec (4.10) en Ec (4.8), se tiene

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \quad (4.11)$$

La Ec (4.11) es una ecuación diferencial ordinaria, lineal, de segundo orden, es la ecuación diferencial de la curva elástica (EDEV).

**Definición de los Elementos Finitos tipo Vigas.**

Un elemento tipo viga (BEAM) generalmente está sometido a cargas transversales que producen significativos efectos de flexión, En estos elementos la longitud es al menos cuatro veces mayor que la mayor de las dimensiones de la sección transversal. En la fig 4.6 se muestra un elemento de viga en su caso más general.

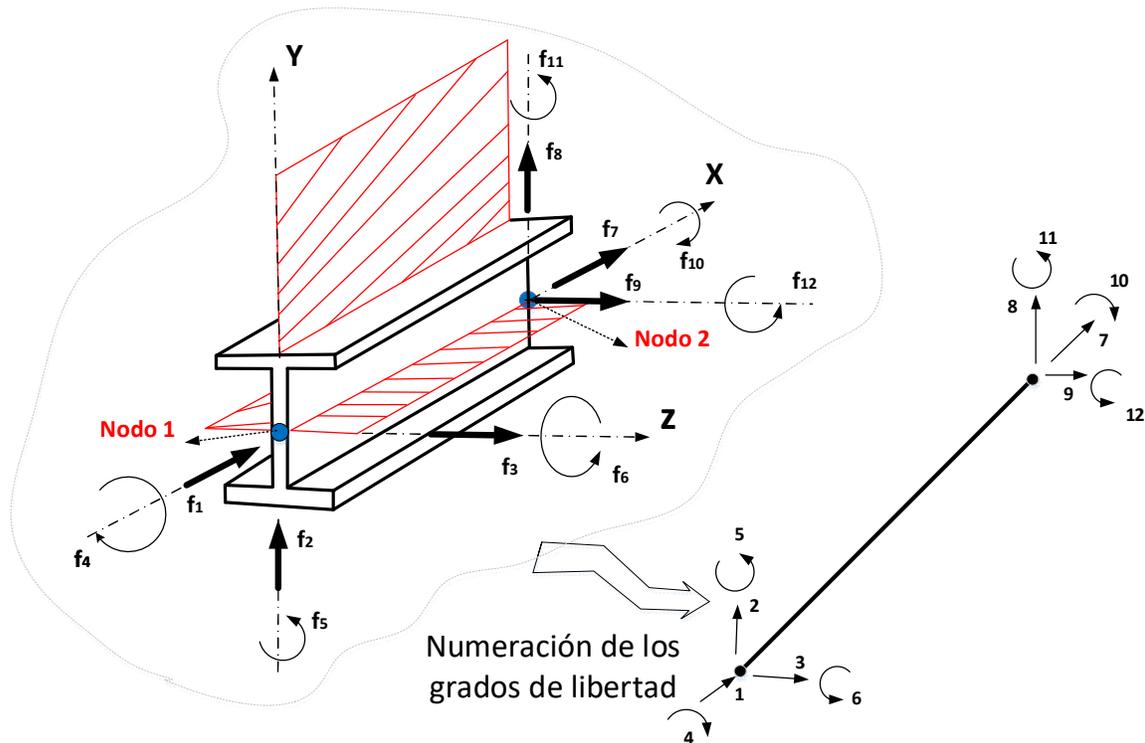


Figura 4.6. Elemento Viga en el caso más general puede transmitir Fuerzas Axiales, Momentos Flectores en dos planos perpendiculares conteniendo sus ejes principales y Fuerzas cortantes y Momentos Torsores.

Para la representación en el plano del elemento tipo viga fig 4.7,

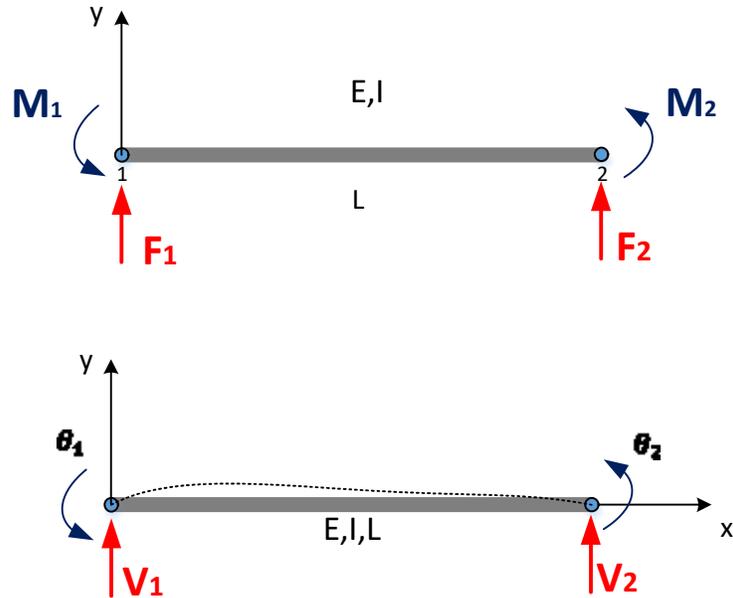


Figura 4.7 Elemento viga en el plano caso Bidimensional. a) Fuerzas b) Desplazamientos

### Derivación de la Matriz de Rigidez para un Elemento Tipo Viga uso del teorema de Castigliano.

Rotación  $\theta_1$

En la fig 4.8a se muestra un elemento de viga, el elemento esta inicialmente recto, si imponemos una rotación en el nodo 1 de valor  $\theta_1$ . Considerando las ecuaciones de equilibrio tenemos como:

$$F_{1y} + F_{2y} = 0 \quad (4.12)$$

Sumatoria de momentos alrededor de z con respecto al nodo 1,

$$M_2 + M_1 + F_{2y}l = 0 \quad (4.13)$$

Momentos alrededor de z con respecto a x mostrada

$$-M(x) + M_1 - F_{1y}x = 0 \quad (4.14)$$

Y el momento  $M(x)$  también puedes ser escrito en función de la fuerza  $F_2$ .

$$M(x) = M_1 + F_{2y}x \quad (4.15)$$

Utilizando la energía de deformación en una viga por flexión dada:

$$\Pi = \int_0^l \frac{M(x)^2}{2EI} dx = \frac{1}{2EI} \int_0^l (M_1 + F_{2y}X)^2 dx \quad (4.16)$$

Usando el teorema de Castigliano y derivando la energía de deformación con respecto a  $F_{2y}$  y  $M_1$  tenemos como:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial F_{2y}} = \frac{F_{2y}l^3}{3EI} + \frac{M_1 l^2}{2EI} = V_1 = 0 \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial M_1} = \frac{F_{2y}l^2}{2EI} + \frac{M_1 l}{EI} = \theta_1 \quad (4.18)$$

Resolviendo el sistema Ec (4.17) y Ec (4.18) para hallar  $F_{2y}$ ,  $M_1$  y  $M_2$  obtenemos:

$$F_{2y} = -\frac{6EI}{l^2} \theta_1 \quad (4.19)$$

$$M_1 = \frac{4EI}{l} \theta_1 \quad (4.20)$$

$$M_2 = \frac{2EI}{l} \theta_1 \quad (4.21)$$

### *Rotación $\theta_2$*

En la fig 4.8b imponemos una rotación en el nodo 2 de valor  $\theta_2$ . Efectuando el mismo procedimiento anterior obtenemos:

$$F_{1y} = \frac{6EI}{l^2} \theta_2 \quad (4.22)$$

$$M_1 = \frac{2EI}{l} \theta_2 \quad (4.23)$$

$$M_2 = \frac{4EI}{l} \theta_2 \quad (4.24)$$

### *Desplazamiento $V_1$*

En la fig 4.8c imponemos un desplazamiento en el nodo 1 de valor  $V_1$ . Efectuando el mismo procedimiento anterior obtenemos:

$$F_{1y} = \frac{12 EI}{l^3} V_1 \quad (4.25)$$

$$M_1 = \frac{6EI}{l^2} V_1 \quad (4.26)$$

$$M_2 = \frac{6 EI}{l^2} V_1 \quad (4.27)$$

### *Desplazamiento $V_2$*

En la fig 4.8d imponemos un desplazamiento en el nodo 2 de valor  $V_2$ . Efectuando el mismo procedimiento anterior obtenemos:

$$F_{2y} = \frac{12 EI}{l^3} V_2 \quad (4.28)$$

$$M_1 = -\frac{6EI}{l^2} V_2 \quad (4.29)$$

$$M_2 = -\frac{6 EI}{l^2} V_2 \quad (4.30)$$

Finalmente agrupando los resultados en forma matricial queda como:

$$\begin{Bmatrix} F_{1y} \\ M_1 \\ F_{2y} \\ M_2 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ \theta_1 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (4.31)$$

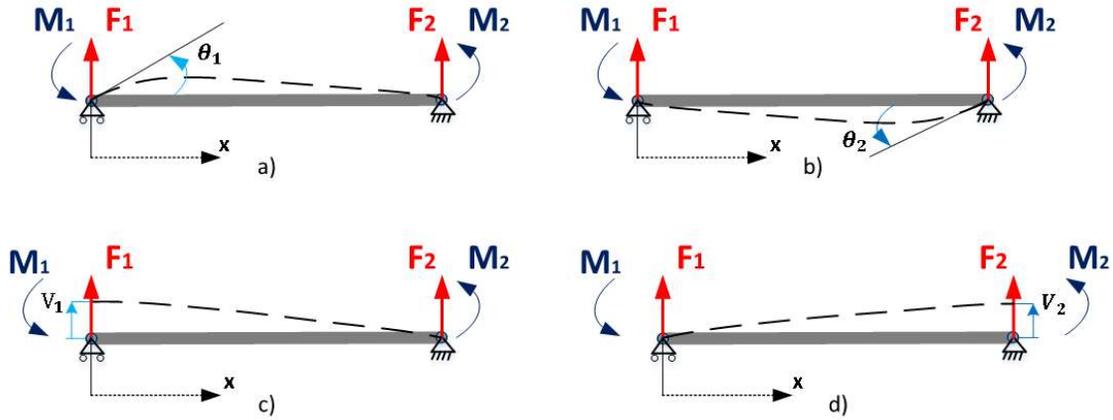


Figura 4.8 Grados de libertad nodales. a) rotación  $\theta_1$  b) rotación  $\theta_2$  , c) desplazamiento  $V_1$ , d) desplazamiento  $V_2$ .

**Derivación de la Matriz de Rigidez para un Elemento Tipo Viga- método de desplazamientos virtuales.**

Considere la fig 4.9, para el sistema de equilibrio del método de los desplazamientos, el pórtico plano con 3 barras y 4 puntos nodales. Considerando la estructura con comportamiento lineal, existe una proporcionalidad entre las fuerzas externas y los correspondientes desplazamientos.

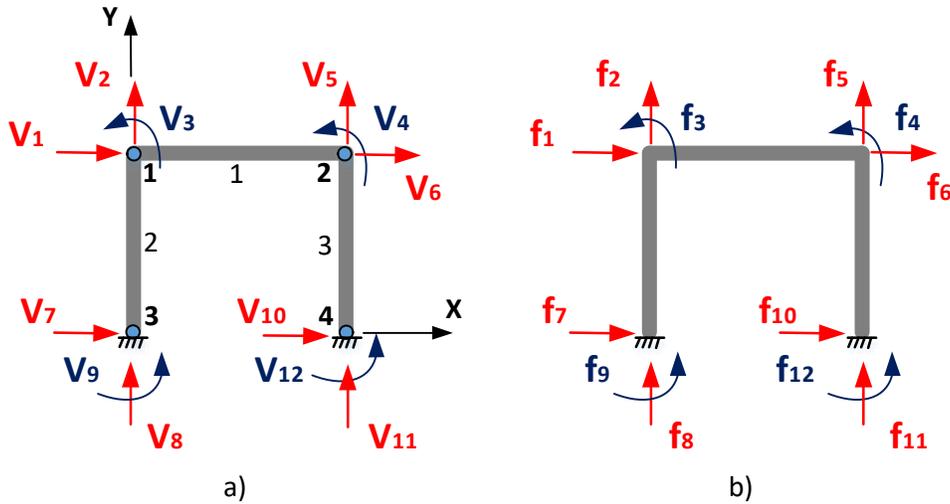


Figura 4.9 Representan los grados de libertad nodales. b) Fuerzas nodales correspondiente a cada grado de libertad.

Considerando inicialmente apenas la aplicación de la fuerza nodal  $F_1$  , tenemos el desplazamiento.

$$V_1 = \delta_{11}F_1 \tag{4.32}$$

Donde  $\delta_{11}$  es un coeficiente de flexibilidad, este coeficiente es función de la geometría de la estructura, de sus condiciones de apoyo y de sus propiedades elásticas, relacionando la fuerza aplicada según el primer grado de libertad con el correspondiente desplazamiento. Suponiendo ahora la aplicación aislada de la fuerza  $F_2$ , obtendremos un nuevo desplazamiento

$$V_1 = \delta_{12}F_2 \quad (4.33)$$

Donde  $\delta_{12}$  es otro coeficiente de flexibilidad, que relaciona la fuerza aplicada en la dirección del segundo grado de libertad con el desplazamiento en la dirección del primer grado de libertad. Repitiendo de manera sucesiva para las demás fuerzas nodales externas en la dirección del primer grado de libertad  $V_1$ , se escribe el desplazamiento total:

$$V_1 = \sum_{n=1}^6 \delta_{1n}F_n \quad (4.34)$$

Repitiendo el procedimiento anterior para los demás grados de libertad obtenemos el sistema de ecuaciones algebraicas lineales que relaciona el conjunto de las fuerzas nodales externas con los desplazamientos nodales libres.

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} & \delta_{14} & \delta_{15} & \delta_{16} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} & \delta_{24} & \delta_{25} & \delta_{26} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} & \delta_{34} & \delta_{35} & \delta_{36} \\ \delta_{41} & \delta_{42} & \delta_{43} & \delta_{44} & \delta_{45} & \delta_{46} \\ \delta_{51} & \delta_{52} & \delta_{53} & \delta_{54} & \delta_{55} & \delta_{56} \\ \delta_{61} & \delta_{62} & \delta_{63} & \delta_{64} & \delta_{65} & \delta_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \end{Bmatrix} \quad (4.35)$$

En forma compacta, este sistema Ec (4.35) se escribe:

$$\delta_{ij}f_j = V_i \quad (4.36)$$

Donde  $\delta_{ij}$  es una matriz de flexibilidad,  $f_j$  es el vector de las fuerzas nodales externas y  $V_j$  es el vector de los desplazamientos nodales libres. Por el teorema de reciprocidad de Betti-Maxwell esa matriz es simétrica con  $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ . Como la matriz de flexibilidad es no singular, a partir de la Ec (4.36) podemos hallar la inversa y es denominada *matriz de rigidez*. Esta matriz es simétrica por ser inversa de una matriz simétrica.

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{Bmatrix} \quad (4.37)$$

La Ec (4.35) expresa el sistema de ecuaciones del método de los desplazamientos. En la fig 4.10 se muestra una viga de sección transversal constante para obtener el sistema de ecuaciones del método de los desplazamientos utilizando para la solución el método de Vereshchagin.

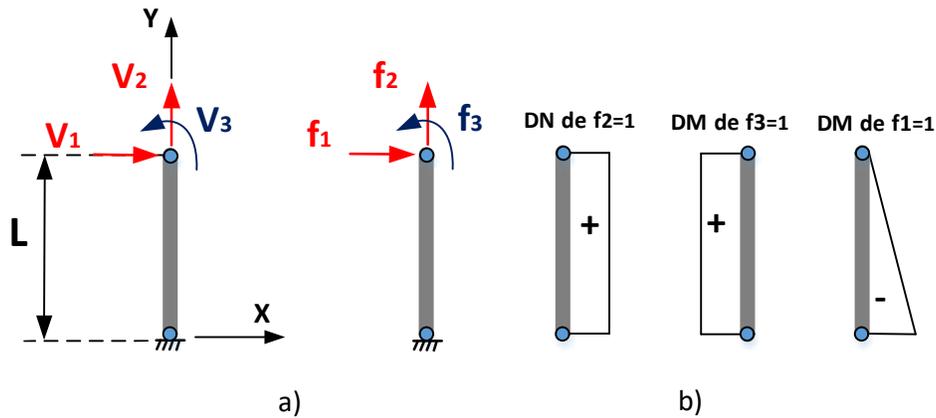


Figura 4.10 Viga con 3 desplazamientos nodales. a) desplazamientos y fuerzas nodales. b) Representación de los diagramas de esfuerzos seccionales.

Despreciando la deformación producida por la fuerza cortante obtenemos los coeficientes de flexibilidad como:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \frac{1}{3} l^3, \quad \delta_{22} = \frac{l}{EA}, \quad \delta_{33} = \frac{l}{EI} \quad (4.38)$$

$$\delta_{12} = 0, \quad \delta_{13} = -\frac{1}{EI} \frac{1}{2} l \cdot l \cdot l, \quad \delta_{23} = 0 \quad (4.39)$$

El sistema de Ec (4.25) se particulariza como:

$$\begin{bmatrix} \frac{l^3}{3EI} & 0 & -\frac{l^2}{2EI} \\ 0 & \frac{l}{EA} & 0 \\ -\frac{l^2}{2EI} & 0 & \frac{l}{EI} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{Bmatrix} \quad (4.40)$$

Por la inversión de la matriz de flexibilidad, obtenemos el sistema de ecuaciones del método de los desplazamientos.

$$\begin{bmatrix} \frac{12EI}{l^3} & 0 & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{EA}{l} & 0 \\ \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} \quad (4.41)$$

Solucionando el sistema para los desplazamientos tenemos:

$$V_1 = \frac{F_1 l^3}{3EI} - \frac{F_3 l^2}{2EI}, \quad V_2 = \frac{F_2 l}{EA}, \quad V_3 = -\frac{F_1 l^2}{2EI} + \frac{F_3 l}{EI} \quad (4.42)$$

### Matriz de rigidez del elemento de viga con Rigidez a Flexión y Rigidez Axial.

En los apartados precedentes se estudió como determinar los esfuerzos en elementos prismáticos sometidos a cargas axiales, en esta sección vamos a formular la derivación de la matriz de rigidez para elementos tipo viga sometidos a flexión pura y una carga axial centrada.

Manteniendo las consideraciones de las hipótesis de pequeñas deflexiones, o comportamiento axial de la viga es independiente del comportamiento a flexión. Por tanto, la acción del momento flector o fuerza cortante en la viga no genera fuerzas axiales en el elemento y viceversa, permitiendo estudiar esos comportamientos de forma independientes.

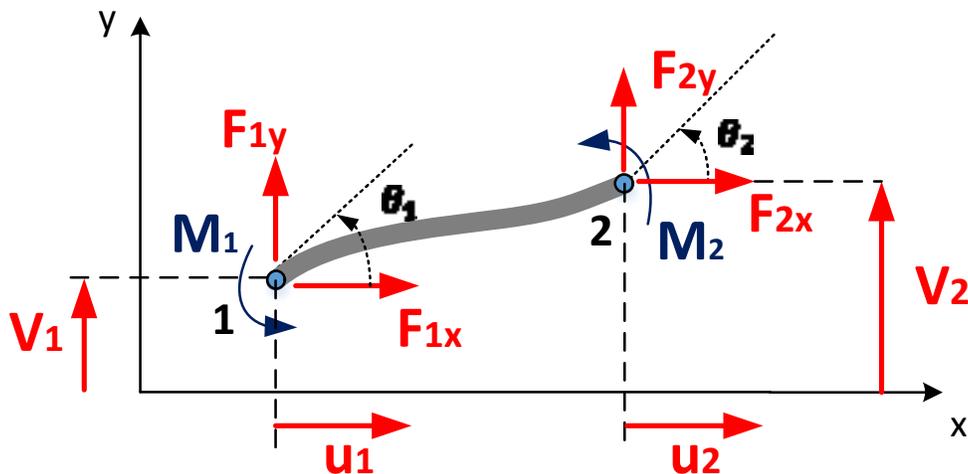


Figura 4.11 Elemento de tipo viga con Rigidez axial y Rigidez a flexión con la identificación de las componentes de fuerzas y grados de libertad del elemento.

Para una facilidad de representación llamamos de  $a = \frac{EA}{L}$  y  $b = \frac{EI}{L^3}$  en resumen la Matriz de Rigidez del elemento tipo viga con Rigidez Axial y Rigidez a Flexión será dado en el sistema local de coordenadas del elemento como:

$$[k^e] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 12b & 6bl & 0 & -12b & 6bl \\ 0 & 6bl & 4bl^2 & 0 & -6bl & 2bl^2 \\ -a & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & -12b & -6bl & 0 & 12b & -6bl \\ 0 & 6bl & 2bl^2 & 0 & -6bl & 4bl^2 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (4.43)$$

### Matriz de rigidez del elemento tipo viga con solamente rigidez a torsión.

Considerando el caso de las condiciones mostradas en la fig 4.12, asumiendo dentro de las mismas limitaciones anteriores definidas para la superposición de la matriz de rigidez con el comportamiento independiente a la flexión y carga axial de la viga. De forma semejante será tratada la contribución de la rigidez torsional de la viga.

La fig 4.12 muestra un eje de longitud  $L$  y sección transversal uniforme de radio  $r$  sujeto a un par de torsión  $T$  en su extremo libre.

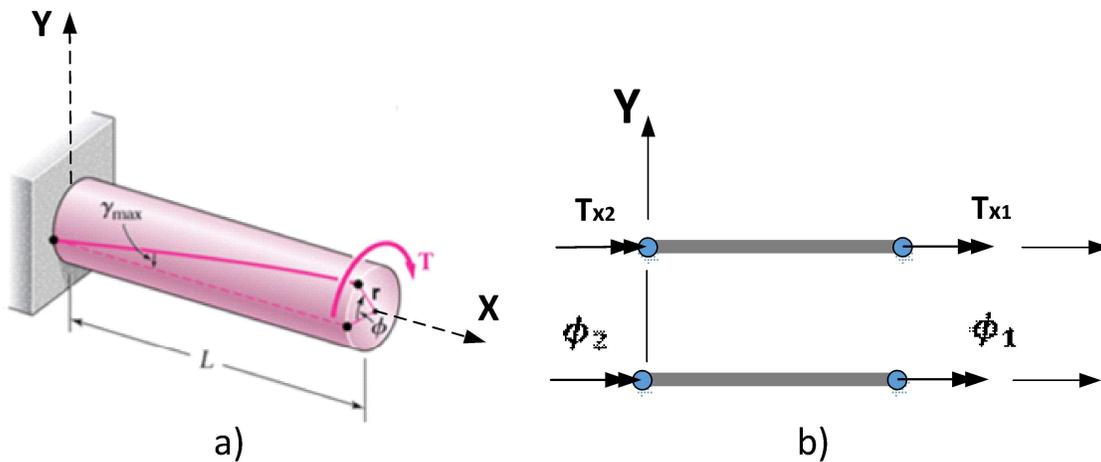


Figura 4.12 Eje de longitud  $L$  sujeto a un par de torsión (Beer et al. 2013). b) Grados de libertad y fuerzas consideradas en el elemento de tipo viga.

La relación entre el ángulo de giro  $\phi$  y el par de torsión  $T$ , de acuerdo con las hipótesis de la resistencia de materiales, la torsión de Saint-Venant es gobernada por la siguiente ecuación:

$$\phi = \frac{T L}{JG} \quad \therefore \quad T = \frac{JG}{L} \phi \quad (4.44)$$

$J$ : momento polar de inercia de la sección transversal,  $G$ : módulo de rigidez, donde  $\phi$  es expresada en radianes.

La expresión Ec (4.44) relaciona el Momento Torsión aplicado en la extremidad libre de la viga y el correspondiente ángulo  $\phi$  y es semejante aquella que relacionaba la fuerza en la extremidad libre de una barra articulada y el correspondiente desplazamiento.

En la barra articulada, el coeficiente de proporcionalidad es  $\frac{EA}{L}$  en la cual está presente la característica del material, por intermedio del Módulo de Elasticidad  $E$ , y las características geométricas de la barra. En la barra a torsión el coeficiente de proporcionalidad es  $\frac{JG}{L}$  en la cual está presente la característica del material, por intermedio del Módulo de Elasticidad en cizallamiento  $G$ , y las características geométricas de la barra en torsión y el momento polar de inercia  $J$  y longitud de la viga. La expresión de la matriz de rigidez de una barra sujeta apenas a torsión será dada de forma semejante a Matriz de rigidez de una barra articulada. Por tanto, todo el desenvolvimiento analítico efectuado para la barra articulada en la clase No 3, podría ser íntegramente utilizado a partir del conocimiento de la relación Ec (4.44).

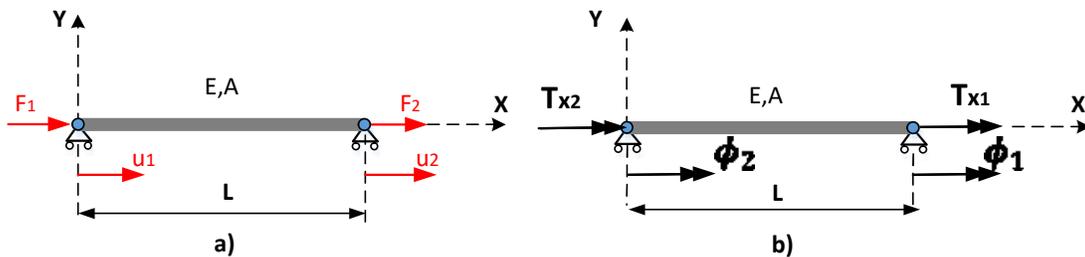


Figura 4.13 Comparación entre los elementos de barras con solamente rigidez axial b) Elemento de tipo viga solamente con rigidez a torsión

Recordando el desarrollo para barra articulada la ecuación en forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad \therefore \quad \begin{Bmatrix} T_{x1} \\ T_{x2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{GJ}{L} & -\frac{GJ}{L} \\ -\frac{GJ}{L} & \frac{GJ}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} \quad (4.45)$$

Destacando la matriz de rigidez a torsión tiene dimensiones 2x2 y los coeficientes estarán dados por  $\frac{GJ}{L}$ .

$$[k]^e = \begin{bmatrix} \frac{GJ}{L} & -\frac{GJ}{L} \\ -\frac{GJ}{L} & \frac{GJ}{L} \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

**Matriz de rigidez del elemento en los sistemas locales y globales. Matriz de transformación.**

Consideremos la viga de la fig 4.11 para representar los posibles grados de libertad del elemento viga en un espacio bidimensional. La relación entre las coordenadas locales  $(x,y)$  y el sistema global de coordenadas  $(\hat{X},\hat{Y})$  es mostrada en la fig. 4.14.

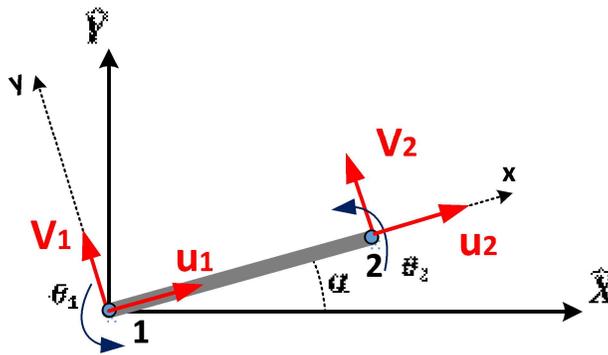


Figura 4.14 Elemento de viga orientado un ángulo  $\alpha$  con respecto al sistema Global de Coordenadas.

Como tenemos 3 grados de libertad asociados con cada nodo, la matriz de rigidez para el elemento será de dimensiones 6x6.

Los grados de libertad del sistema local son relacionados con el sistema Global por la Ec. (4.47).

$$\begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \text{sen } \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \text{sen } \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}_i \\ \hat{v}_i \\ \hat{\theta}_i \\ \hat{u}_j \\ \hat{v}_j \\ \hat{\theta}_j \end{pmatrix} \quad (4.47)$$

Retomando el procedimiento visto anteriormente *Clase No.4* para transformar a Matriz de Rigidez de un elemento del sistema local al sistema global, representando la Ec. (4.48) como:

$$[\hat{K}]^e = [C]^T [k]^e [C] \quad (4.48)$$

Aplicando la Ec. (4.47) para el Elemento de Viga con Rigidez Axial y Rigidez a Flexión, obtenemos la Matriz de Rigidez del Elemento en el sistema global de coordenadas como:

$$[K^e] = \begin{bmatrix} ac^2 + 12bs^2 & & & & & & \\ (a - 12b)cs & as^2 + 12bc^2 & & & & & \\ -6bLs & 6bL & 4bL^2 & & & & \\ -ac^2 - 12bs^2 & -(a - 12b)cs & 6bLs & ac^2 + 12bs^2 & & & \\ -(a - 12b)cs & -as^2 - 12bc^2 & -6bLc & (a - 12b)cs & as^2 + 12bc^2 & & \\ -6bLs & 6bLc & 2bL^2 & 6bLs & -6bLc & 4bL^2 & \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

Donde para una representación compacta llamamos de  $a = \frac{EA}{L}$ ,  $b = \frac{EI}{L^3}$ ,  $c = \cos(\alpha)$  y  $s = \sin(\alpha)$ .

#### **Matriz de Rigidez del elemento tipo viga en el espacio.**

El procedimiento empleado anteriormente para formular la Matriz de Rigidez en elemento de tipo viga considerando independientemente la contribución de su Rigidez Axial, Rigidez a Flexión y Rigidez a Torsión, también puede ser usado para formular la matriz de Rigidez en un espacio 3D (Figura 4.15).

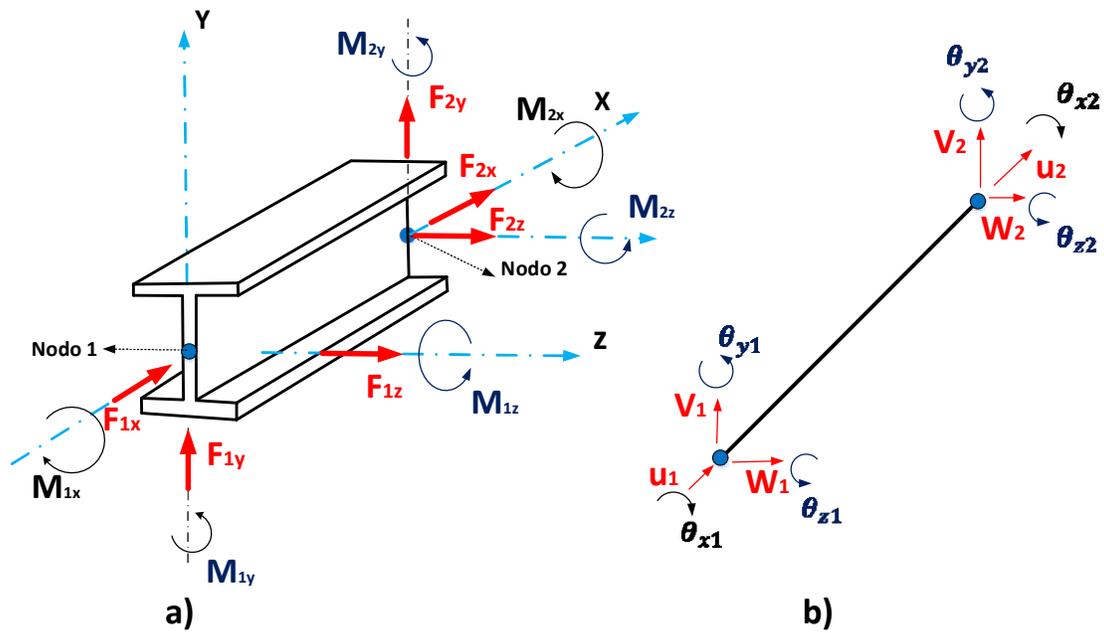


Figura 4.15 Elemento de viga orientado en el espacio a) Representación de las fuerzas Nodales acción simultanea de Fuerzas Axiales, Momentos Flectores en planos perpendiculares que contienen los ejes principales y Momentos Torsores b) 12 Grados de libertad en el espacio.

La matriz de Rigidez en elemento de tipo viga, en el caso más general con 12 grados de libertad puede ser montada considerando todos los componentes de rigidez correspondientes a la flexión en cada uno de los planos perpendicular que contienen los ejes centrales principales debido a la acción de momentos flectores y fuerzas cortantes actuantes, rigidez correspondiente a torsión y fuerzas axiales.

$$[k]^e = \begin{bmatrix} a & \dots \\ 0 & 12b_z & \dots \\ 0 & 0 & 12b_y & \dots & \dots & \dots & \dots & \textit{Simétrica} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & t & \dots \\ 0 & 0 & -6b_y L & 0 & 4b_y L^2 & \dots \\ 0 & 6b_z L & 0 & 0 & 0 & 4b_z L^2 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -12b_z & 0 & 0 & 0 & -6b_z L & 0 & 12b_z & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & -12b_y & 0 & -6b_y L & 0 & 0 & 0 & 12b_y & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t & \dots & \dots \\ 0 & 0 & -6b_y L & 0 & 2b_y L^2 & 0 & 0 & 0 & 6b_y L & 0 & 4b_y L^2 & \dots \\ 0 & 6b_z L & 0 & 0 & 0 & 2b_z L^2 & 0 & -6b_z L & 0 & 0 & 0 & 4b_z L^2 \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

Donde para una representación compacta llamamos de  $a = \frac{EA}{L}$ ,  $b_z = \frac{EI_z}{L^3}$ ,  $b_y = \frac{EI_y}{L^3}$  y  $t = \frac{GJ}{L}$ .

### Bibliografía

Beer, Ferd, Russ Johnston, John T DeWolf, and David F Mazurek. 2013. *Mecánica de Materiales (6a.* McGraw Hill Mexico.