Solución Práctico 5

1.1 a. La suma de los vectores da el vector nulo.

b. La suma de todos menos a da el vector d.

c. Sumar c y e da el vector d que es opuesto a a por lo que hacer $a + c + e = a + d$ que es el vector nulo.

2.1 a. La ecuación paramétrica de la recta es $\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 5 + 3\lambda \end{cases}$

Para pasar a la ecuación implícita, podemos despejar λ de una de las ecuaciones y sustituir en las otras. Por ejemplo, tomando la segunda ecuación, tenemos que $\lambda = y - 2$. Sustituyendo en la primera y la tercera, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - 2y = -3 \\ -3y + z = -1 \end{cases}$$

b. A partir de los puntos A y B, podemos encontrar un vector director de la recta: $v = \overrightarrow{BA}$ y entonces la ecuación paramétrica es:

$$\begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$$

De forma análoga a la parte anterior, obtenemos la ecuación reducida:

$$\begin{cases} x + 3z = 4 \\ y - 3z = 3 \end{cases}$$

2.2 a. La ecuación paramétrica es:

$$(x, y, z) = (1, 1, 1) + \lambda(2, -1, 1) + \mu(1, 0, -1)$$

Como en el caso de las rectas, podemos despejar los parámetros λ y μ en función de las variables x, y, z para pasar a la ecuación reducida:

$$x + 3y + z = 5$$

b. La paramétrica es:

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + 2\lambda - 3\mu \end{cases}$$

La reducida es:

$$x - y = 0$$

c. Para esta parte, alcanza encontrar dos puntos de la recta y junto con el $(1, 1, 1)$, estamos en un caso análogo al de la parte anterior. La ecuación paramétrica es:

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda + 1\mu \\ y = 1 + \lambda + 2\mu \\ z = 1 + 3\lambda + 2\mu \end{cases}$$

y la implícita es

$$-4x + y + z = -2$$

2.4 Para hallar la intersección, debemos armar un sistema con las ecuaciones de ambos planos. Para esto, consideramos la ecuación reducida del segundo plano:

$$5x - 3y - z = 15$$

Entonces, la intersección de los planos es:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z = -2 \\ 5x - 3y - z = 15 \end{cases}$$

Dado que el sistema es compatible indeterminado con un gradao de libertad, tenemos que la intersección es una recta.

2.5 Si $\pi_1 : 2x + y + z = 2$ y $r_1 : \begin{cases} x + y - 3z = -6 \\ x + 2y - 4z = -8 \end{cases}$, tenemos que la intersección es

$$\pi_1 \cap r_1 : \begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ x + y - 3z = -6 \\ x + 2y - 4z = -8 \end{cases}$$

Que es un sistema compatible determinado y su solución es $(0, 0, 2)$. Es decir, la recta y el plano se intersectan en un punto.

Si $r_2 : \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 4 + \lambda \\ z = 1 - 3\lambda \end{cases}$

entonces pasando a reducida, tenemos que

$$r_2 : \begin{cases} -x + y = 1 \\ 3x + z = 8 \end{cases}$$

Y su intersección con π_1 es vacía.

2.6 La intersección de estos planos es la recta dada por

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y=3 \end{cases}$$

El vector $(1,1,-2)$ es vector director de esta recta. Teniendo en cuenta que el punto $(10,11,12)$ no está en ninguno de los planos, conseguimos la siguiente recta

$$\begin{cases} x=10+\lambda \\ y=11+\lambda \\ z=12-2\lambda \end{cases}$$

que no corta a ninguno de los planos

2.7 Pasando r a forma reducida, tenemos que la intersección entre la recta y el plano está dada por la solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x-az=0 \\ y-bz=0 \end{cases}$$

Si $a+b\neq -1$, el sistema es compatible determinado y la recta corta al plano en el punto $(\frac{3a}{1+a+b}, \frac{3b}{1+a+b}, \frac{3}{1+a+b})$.
Si $a+b=-1$, el sistema es incompatible y la recta es paralela al plano.