Clase 12:

Series geométricas y telescópicas

CDIVV - 2023 - 2sem

Eugenia Ellis

eellis@fing.edu.uy

Series

Sea $\boxed{\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}}$ una sucesión de números reales.

Definimos la sucesión de sumas parciales como

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

A $\boxed{S_n}$ se le denomina serie de término general $\boxed{a_n}$ y se la denota

$$\boxed{\sum a_n}$$

La serie ¿converge? → ¿a qué valor?

¿diverge?

¿oscila?

Serie geométrica

$a_n = \varphi^n \qquad \varphi \in \mathbb{R}^*$

$\sum a_n$ es la sucesión $S_n = \sum_{i=0}^{n} \varphi^n$

$\sum a_n$ converge/diverge/oscila sii

la sucesión $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge/diverge/oscila

$$S_n = 1 + \cancel{\varphi} + \cancel{\varphi^2} + \cancel{\cdots} + \cancel{\varphi^n}$$
$$- \quad \varphi S_n = \cancel{\varphi} + \cancel{\varphi^2} + \cancel{\varphi^3} + \cancel{\cdots} + \varphi^{n+1}$$

$$S_n - \varphi S_n = 1 - \varphi^{n+1}$$

$$S_n(1-\varphi) = 1 - \varphi^{n+1} \Rightarrow S_n = \frac{1-\varphi^{n+1}}{1-\varphi}$$

$\boxed{\varphi \neq 1}$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\varphi} & 0<\varphi<1 \\ +\infty & \varphi \geq 1 \end{cases}$$

$$\parallel$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \varphi^n$$

Si $\varphi = 1$

$S_n = n$

$\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$

Serie telescópica

$a_n = b_n - b_{n-1}$
ó
$b_n - b_{n+1}$

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \begin{array}{l} a_1 \\ + \\ a_2 \\ + \\ a_3 \\ + \\ \vdots \\ + \\ a_n \end{array} = \begin{array}{l} 1 - \cancel{\frac{1}{2}} \\ \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} \\ \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}} \\ \vdots \\ \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1} \end{array}$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = 1}$$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$

$$\log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \log\left(\frac{n+1}{n}\right) = \log(n+1) - \log(n)$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \log(i+1) - \log(i)$$

$$= \cancel{\log(2)} - \log(1) + \quad = 0$$

$$\cancel{\log(3)} - \cancel{\log(2)} +$$

$$\vdots$$

$$\log(n+1) - \cancel{\log(n)}.$$

$$S_n = \log(n+1) \qquad \lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right) \quad \text{diverge}$$

Condición necesaria de convergencia

$$\text{Si } \sum a_n \text{ converge} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

$$\text{Si } S_n \text{ converge} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

Dem:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \qquad \lim_{n\to+\infty} S_n = L$$

$$\Rightarrow \quad a_n = S_n - S_{n-1} \qquad \forall\, n \geq 2$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} S_n - S_{n-1}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} S_n - \lim_{n\to+\infty} S_{n-1}$$

$$= L - L = 0$$

$\lim_{n\to+\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right) = 0$ sin embargo acabamos de ver $\sum \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$ <u>Diverge</u>

Serie de términos positivos

$\sum a_n$ es una serie de términos positivos si $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Criterio de comparación

Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ series de términos positivos tales que $a_n \leq b_n$ para todo $n > n_0$

Entonces:

$$\sum b_n \text{ converge} \Rightarrow \sum a_n \text{ converge}$$

$$\sum a_n \text{ diverge} \Rightarrow \sum b_n \text{ diverge}.$$

$$\left(\text{Si } a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow S_n = \sum_{i=0}^{n} a_i \Rightarrow S_n \text{ es monótona creciente} \right)$$

Dem: Sea

$$A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

$$B_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$$

$$\Rightarrow \quad A_n - A_{n_0} \leq B_n - B_{n_0}$$

$$a_n + a_{n-1} + \cdots + a_{n_0+1} \leq b_n + b_{n-1} + \cdots + b_{n_0+1}$$

$$a_i \leq b_i \quad \forall i > n_0$$

Si $\sum b_n$ converge $\Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} B_n = B \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow B_n$ esta acotada $\quad B_n \leq K \quad \forall n > n_0$

$$\Rightarrow A_n - A_{n_0} \leq B_n - B_{n_0} \leq K$$

$\Rightarrow$ A_n está acotada, A_n monótona creciente $\Big\} \Rightarrow \exists A \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{n \to +\infty} A_n = A$

$\Rightarrow \sum a_n$ converge.

$\Rightarrow$

$\sum a_n$ no converge $\Rightarrow$ $\sum b_n$ no converge.

$+$ (a_n) es de términos positivos $\qquad$ $+$ $\{b_n\}$ es de términos positivos

$\qquad\qquad \parallel \qquad\qquad\qquad\qquad \parallel$

$\sum a_n$ diverge $\Longrightarrow$ $\sum b_n$ diverge

O

$\alpha = 1$ $\qquad$ ¿ $\sum \frac{1}{n^\alpha}$?

$\sum \frac{1}{n}$ diverge :

$a_n = \frac{1}{n}$ $\qquad$ $\sum \frac{1}{n}$ diverge

$\Longleftrightarrow$

$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$ $\qquad$ S_n diverge

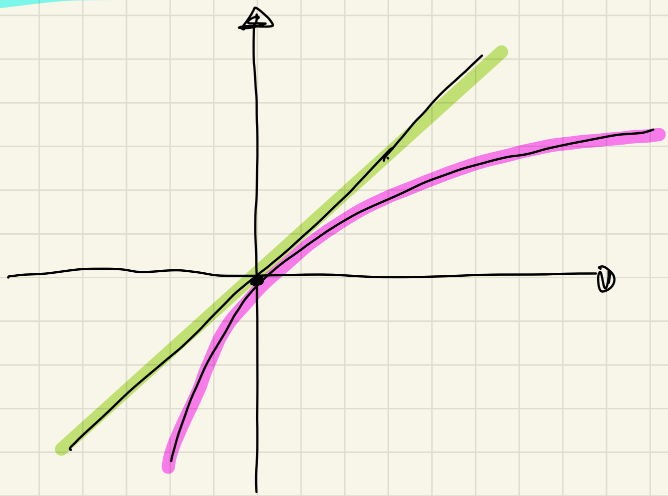
$\log\left(1+\frac{1}{n}\right) \le \frac{1}{n}$

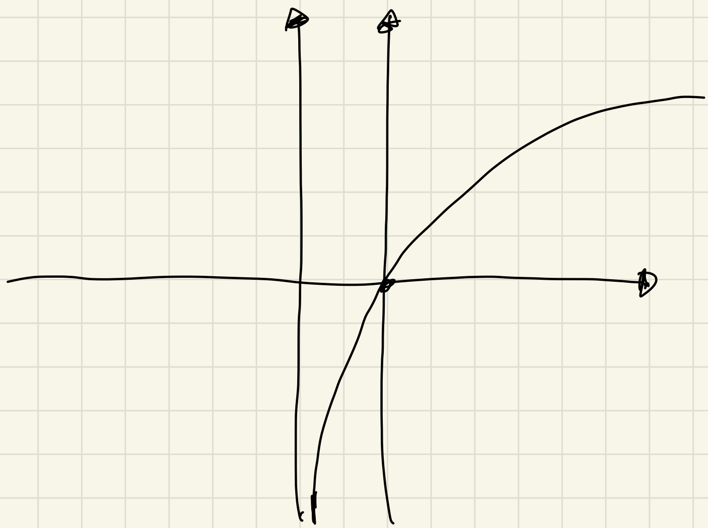
$x = 1/n$

$\sum \log\left(1+\frac{1}{n}\right) \Rightarrow \sum \frac{1}{n}$ diverge

diverge

$$\boxed{\log(1+x) \leq x}$$





Si $0<\alpha<1 \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \boxed{\frac{1}{n^\alpha}}$

$\Rightarrow$ Como $\sum \frac{1}{n}$ diverge

$\Rightarrow$ $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.

criterio de comparación

Criterio de equivalentes.

$\sum a_n$ y $\sum b_n$ series de terminos positivos

- Si $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = L > 0 \Rightarrow$ las dos series convergen o divergen.

- Si $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0 \Rightarrow \sum b_n$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ converge

¿ $\sum \frac{1}{n^2}$?

$\underset{\varphi}{\Longrightarrow}$

criterio de equivalentes

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n(n+1)}}{1/n^2} = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$ converge

ya que $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

converge.

Ejercicio:

Clasificar

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$ con

$\alpha > 2$

Criterio del cociente

$\sum a_n$ serie de terminos positivos

tal que $$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L}$$

$\Rightarrow$

- Si $L < 1 \Rightarrow \sum a_n$ converge
- Si $L > 1 \Rightarrow \sum a_n$ diverge.