Solución Práctico 4

1.1
a. El determinante es 1.
b. El determinante es $sen(\theta)$
c. El determinante es 0
d. El determinante es 0
e. El determinante es 3003. Recomendación: escalerizar la matriz para calcular el determinante como el producto de la diagonal.

1.2 $\begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix} = 5$, $\begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ 2d & 2e & 2f \\ -g & -h & -i \end{vmatrix} = 10$, $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d-3a & e-3b & f-3c \\ 2g & 2h & 2i \end{vmatrix} = 10$, $\begin{vmatrix} a+5c & 3b & c \\ d+5f & 3e & f \\ 2g+10i & 6h & 2i \end{vmatrix} = 30$

1.3 Para que las matrices sean invertibles, el determinante debe ser no nulo. Por lo tanto, calculamos el determinante de cada una y discutimos según k.

a.

$$\begin{vmatrix} k & -k & 3 \\ 0 & k+1 & 1 \\ k & -8 & k-1 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} k+1 & 1 \\ -8 & k-1 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} -k & 3 \\ k+1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$k(k^2 - 1 + 8 - k - 3k - 3) = k(k^2 - 4k + 4).$$

Esto se anula si $k = 0$ o $(k-2)^2 = 0$, es decir, los valores de k que anulan el determinante son $k = 0$ y $k = 2$. Por lo que la matriz es invertible para todo $k \neq 0, 2$

b.

$$\begin{vmatrix} k-4 & 0 & 0 \\ 1 & k & 2 \\ 3 & 3 & k-1 \end{vmatrix} = (k-4) \begin{vmatrix} k & 2 \\ 3 & k-1 \end{vmatrix} = (k-4)(k^2 - k - 6)$$

Este determinante se anula si $k = 4, 3$ o -2, es decir, la matriz es invertible para todo $k \neq 4, 3, -2$

1.4
a. $\det(-AB) = (-1)^n \det(A) det(B) = (-1)^{n+1} 6$
b. $\det(A^2) = \det(A)^2 = 9$
c. $\det(B^{-1}A) = \frac{1}{\det(B)} \det(A) = -3/2$
d. $\det(2A) = 2^n \det(A) = 2^n 3$
e. $\det(3B^T) = 3^n \det(B^T) = 3^n \det(B) = 3^n(-2)$
f. $\det(AA^T) = \det(A)\det(A^T) = \det(A)^2 = 9$

1.5 Escalerizando la matriz sin alterar el determinante, obtenemos lo siguiente

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}$$

Donde la última igualdad es resultado hacer el producto de los elementos de la diagonal.

1.6 Una forma de encarar este ejercicio es hacer inducción en n, es decir, en el tamaño de A.

2.1 Recordar que la regla de Cramer dice lo siguiente: si $|A| \neq 0$ entonces el sistema $AX = b$ es compatible determinado y la solución es $x_j = |A_j|/|A|$, donde A_j es la matriz que se obtiene de cambiar la columna j de A por el vector b.

En este caso, tenemos que $\det(A) = 6$, por lo que sabemos que $AX = b$ tiene una única solución. Calculamos entonces al vector $X = (x_1, x_2, x_3)$ de la siguiente forma:

$$x_1 = \begin{vmatrix} 14 & 2 & -4 \\ 19 & 6 & -2 \\ 12 & 2 & -3 \end{vmatrix} /6 = 6/6 = 1$$

$$x_2 = \begin{vmatrix} 6 & 14 & -4 \\ 5 & 19 & -2 \\ 5 & 12 & -3 \end{vmatrix} /6 = 12/6 = 2$$

$$x_3 = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 14 \\ 5 & 6 & 19 \\ 5 & 2 & 12 \end{vmatrix} /6 = -6/6 = -1$$

2.2 a. Para que el sistema tenga infinitas soluciones debe cumplirse que $\det(T) = 0$, para no estar en las hipótesis de la regla de Cramer. Igualmente esto no es suficiente pues el sistema podría ser incompatible. Por lo tanto, encontramos los valores de α que anulan el determinante y luego, sustituyendo en el sistema, lo clasificamos.

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 4 \\ 3 & \alpha^2 & 2 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & \alpha^2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -4(2\alpha^2+6)+2(10+6) = -8\alpha^2+8$$

Este determinante se anula si $\alpha = 1$ o -1.

- si $\alpha = 1$, escalerizando obtenemos que el sistema es compatible indeterminado, es decir, tiene infinitas soluciones.
- Si $\alpha = -1$ el sistema es incompatible, es decir, no tiene solución.

b. Por la parte anterior, el sistema tiene solución única si $\alpha \neq 1, -1$. Para estos valores de α, usando la regla de Cramer, calculamos la solución como

$$x_1 = \begin{vmatrix} -2\alpha & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 4 \\ 0 & \alpha^2 & 2 \end{vmatrix} /(-8\alpha^2 + 8)$$

$$x_2 = \begin{vmatrix} 2 & -2\alpha & 0 \\ 3 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} /(-8\alpha^2 + 8)$$

$$x_3 = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -2\alpha \\ 3 & 5 & 3 \\ 3 & \alpha^2 & 0 \end{vmatrix} /(-8\alpha^2 + 8)$$

c. Para que exista T^{-1}, debe cumplirse que $\alpha \neq 1, -1$. Además, usando propiedades de determinantes, tenemos que

$$\det(4T^{-1}) = 4^3 \det(T^{-1}) = 4^3 \frac{1}{det(T)} = \frac{4^3}{-8\alpha^2 + 8}$$

Entonces $\det(4T^{-1}) = 8$ si $\frac{4^3}{-8\alpha^2+8} = 8$, es decir, si $\alpha = 0$.