Facultad de Ingeniería – Udelar

Departamento de Diseño industrial – IIMPI

MODELADO DE SISTEMAS MECÁNICOS EMPLEANDO EL MÉTODO DE LOS ELEMENTO FINITOS

REFERENTE CLASE #4

CLASE PRACTICA 2
FORMULACIÓN DE ELEMENTOS FINITOS TIPO BARRA.

PROFESOR

Dr. Henry Figueredo Losada

Montevideo. Uruguay.
Noviembre 2019

TEMA III. FORMULACIÓN DE ELEMENTOS FINITOS 1D-ESTATICOS.

CLASE PRACTICA 2. FORMULACIÓN DE ELEMENTOS FINITOS TIPO BARRA.

Sumario.

1. Introducción.

2. Ejemplos expositivos.

3. Ejercicios propuestos.

Objetivos.

Ampliar y profundizar los conceptos dados en las clases teóricas con ejemplos expositivos que realicen los pasos principales en el análisis de sistemas discretos MEF.

Bibliografía.

1. G.R.Liu "The Finite element Method- A practical course".
2. Chandrupatla, Tirupathi R.; Belegundu, Ashok D. (1999). "Introducción al estudio del elemento finito en ingeniería". México: Prentice Hall, 1999. ISBN: 978-970-17-0260-4.
3. O.C.Zienkiewicz, R.L.Taylor , J.Z.Zhu. (2010) "El método de los Elementos finitos. Vol 1: Las Bases". Editorial CIMNE. ISBN: 978-84-96736-71-9.
4. Larry J. Segerlind (1984) "Applied Finite Element Analysis", 2nd Edition. published by Wiley. ISBN: 978-0-471-80662-2

1. **Introducción.**

Cada tema estará provisto de algunos problemas que sirven como ejemplos para mejorar la compresión de los temas tratados en las clases teóricas. En la mayoría de las veces el *Ejemplos 1.1* puede ser utilizado para la generación del programa en Octave que será desarrollado en los LABORATORIOS. El estudiante deberá hacer un esfuerzo para resolver los problemas propuestos. Alentamos el uso de sus programas elaborados y paquetes comerciales para evaluar y suplementar el proceso de aprendizaje. En la Bibliografía encontraran libros recomendados.

2. **Ejemplos expositivos.**

Consideremos un ejemplo de un sistema de barras.

Ejemplo 2.1: Dado el sistema mostrado en la Fig. 1, donde dos elementos de barras están sujetos a cargas externas como se muestra. Considerando que los elementos tienen el mismo módulo de elasticidad $E_1 = E_2 = 10x10^6\ lb/in^2$ y el área de la sección transversal $A_1 = A_2 = 1.5\ in^2$.

a) Determine las componentes del desplazamiento del nodo 3 ?.

b) Calcular las fuerzas de reacción en el nodo 1 y 2.

c) Calcular el desplazamiento de cada elemento

d) Fuerza en cada elemento e identifique si está a tracción o compresión.

d) La tensión en cada elemento.

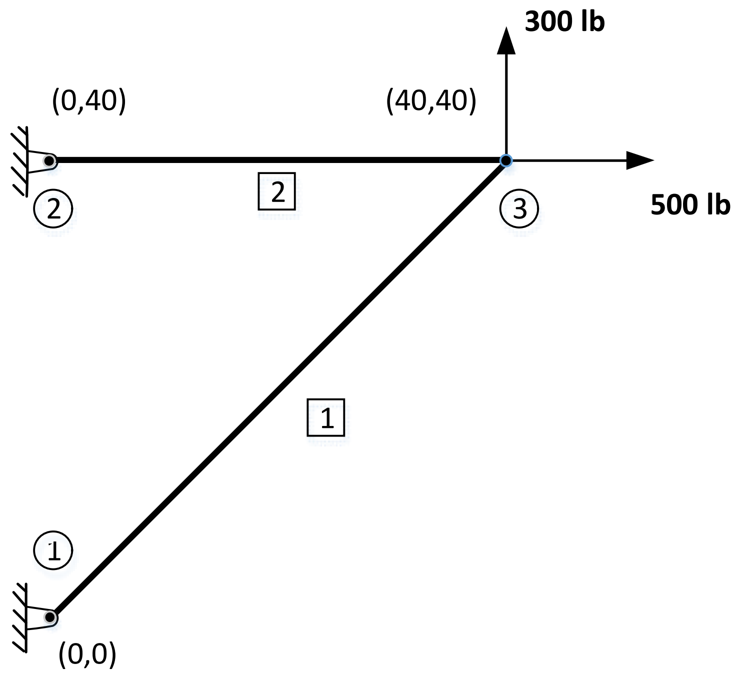

Figura 1. Sistema de Elementos tipo Barra con fuerzas externas.

Solución.

Resultado Analíticos:

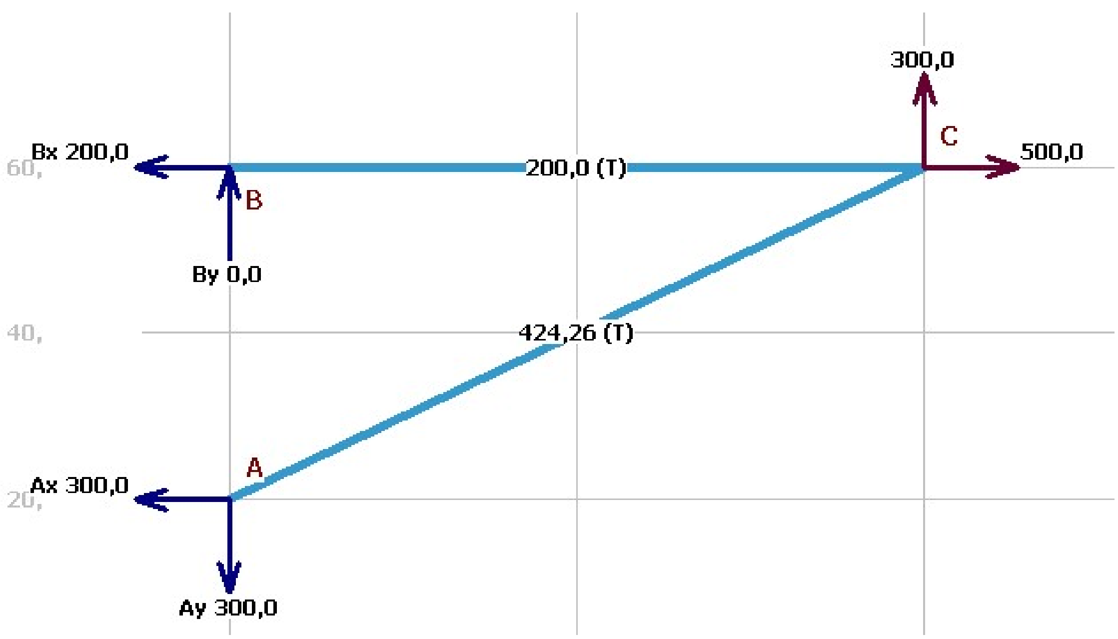

Figura 2. Resolución del problema utilizando el método de los nodos.

Resultados utilizando el método de Elementos Finitos.

Datos

$L_1 = \sqrt{(40^2 + 40^2)} = 56.57\ in.$ y $L_2 = 40\ in.$

$$k_1 = \frac{A_1 E_1}{L_1} = 2.65(10^5)\ lb/in \tag{1.1}$$

$$k_2 = \frac{A_2 E_2}{L_2} = 3.75(10^5)\ lb/in \tag{1.2}$$

Utilizando la Ec. (3.19) y Ec (2.25) que relaciona los desplazamientos nodales globales del elemento con los desplazamientos locales y la matriz de rigidez del elemento en el sistema de coordenadas globales.

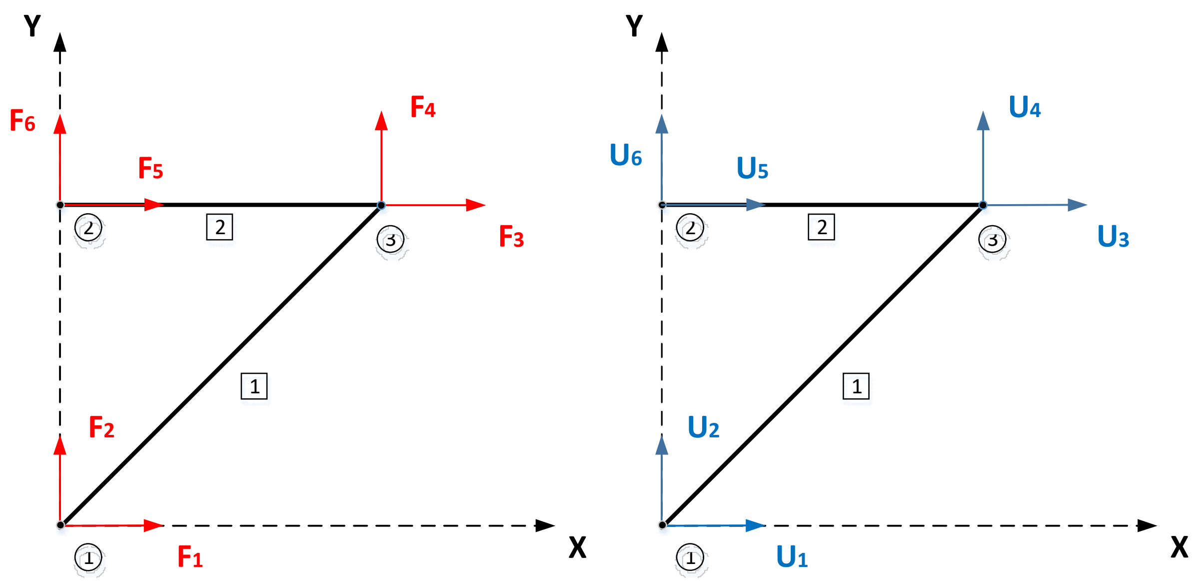

Figura 3 Identificación de los grados de libertad del modelo

Determinar la matriz de rigidez de cada elemento y represéntela en el sistema global.

$$[k^e] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

Tabla 1.1 Ángulos θ entre x y $\hat{X}$ medidos a partir de X

Elemento	θ	Cos (θ)=C	Sen (θ)=S
1	45^0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
2	180^0	-1	0

Elemento 1:

Utilizando la Ec. (3.15) y Ec (3.25)

$$\left[\widehat{K_e}\right] = [C]\left[{K_e}^1\right][C]^T = \begin{bmatrix} c^2 & c\cdot s & -c^2 & -s\cdot c \\ s\cdot c & s^2 & -s\cdot c & -s^2 \\ -c^2 & -s\cdot c & c^2 & s\cdot c \\ -s\cdot c & -s^2 & s\cdot c & s^2 \end{bmatrix} \tag{1.4}$$

$$\left[\widehat{K_e}^1\right] = k_1 \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$= 10^5 \begin{bmatrix} 1.325 & 1.325 & -1.325 & -1.325 \\ 1.325 & 1.325 & -1.325 & -1.325 \\ -1.325 & -1.325 & 1.325 & 1.325 \\ -1.325 & -1.325 & 1.325 & 1.325 \end{bmatrix} \tag{1.5}$$

Elemento 2:

$$\left[\widehat{K_e}^2\right] = k_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= 10^5 \begin{bmatrix} 3.75 & 0 & -3.75 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3.75 & 0 & 3.75 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.6}$$

Cada elemento del modelo está definido por su matriz de rigidez en el sistema global de coordenadas.

La rigidez de la estructura completa depende de la rigidez de cada uno de sus elementos, ahora realizamos el ensamblaje de la matriz de rigidez de la estructura a partir de las matrices de rigidez de cada uno de sus elementos utilizando el método de superposición o Método de Rigidez Directo.

Debemos identificar en cada matriz de rigidez de los elementos su contribución en la matriz de rigidez global de la estructura, los coeficientes i,j (línea , columna) de las matrices $\widehat{K_e}^1, \widehat{K_e}^2$ serán adicionadas en la misma localización i,j de la matriz de la estructura. La estructura analizada tiene 6 DOF, por tanto, su matriz de Rigidez tendrá dimensiones de 6 x 6.

$$[K] = 10^5 \begin{bmatrix} 1.325 & 1.325 & -1.325 & -1.325 & 0 & 0 \\ 1.325 & 1.325 & -1.325 & -1.325 & 0 & 0 \\ -1.325 & -1.325 & 1.325 + 3.75 & 1.325 + 0 & -3.75 & 0 \\ -1.325 & -1.325 & 1.325 + 0 & 1.325 + 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3.75 & 0 & 3.75 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.7}$$

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{pmatrix} = 10^5 \begin{bmatrix} 1.325 & 1.325 & -1.325 & -1.325 & 0 & 0 \\ 1.325 & 1.325 & -1.325 & -1.325 & 0 & 0 \\ -1.325 & -1.325 & 1.325 + 3.75 & 1.325 + 0 & -3.75 & 0 \\ -1.325 & -1.325 & 1.325 + 0 & 1.325 + 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3.75 & 0 & 3.75 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{U_1} \\ \boldsymbol{U_2} \\ \boldsymbol{U_3} \\ \boldsymbol{U_4} \\ \boldsymbol{U_5} \\ \boldsymbol{U_6} \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

Incorporando las condiciones de contorno y fuerzas externas para el modelo en la matriz global de la estructura, la ecuación de equilibrio:

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 500 \\ 300 \\ F_5 \\ F_6 \end{pmatrix} = 10^5 \begin{bmatrix} 1.325 & 1.325 & -1.325 & -1.325 & 0 & 0 \\ 1.325 & 1.325 & -1.325 & -1.325 & 0 & 0 \\ -1.325 & -1.325 & 1.325+3.75 & 1.325+0 & -3.75 & 0 \\ -1.325 & -1.325 & 1.325+0 & 1.325+0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3.75 & 0 & 3.75 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \boldsymbol{U_3} \\ \boldsymbol{U_4} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

Simplificando

$$\begin{pmatrix} 500 \\ 300 \end{pmatrix} = 10^5 \begin{bmatrix} 5.075 & 1.325 \\ 1.325 & 1.325 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{U}_3 \\ \boldsymbol{U_4} \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

Resolviendo la Ec. (1.10) se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{U_3} \\ \boldsymbol{U_4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0005333 \\ 0.0017308 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5.333 \cdot 10^{-4} \\ 1.731 \cdot 10^{-3} \end{Bmatrix} in \quad (1.11)$$

A partir de la Ec. (1.9) y conocidos los desplazamientos $\boldsymbol{U_3}$ y $\boldsymbol{U_4}$, se obtienen:

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 500 \\ 300 \\ F_5 \\ F_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -300 \\ -300 \\ 500 \\ 300 \\ -200 \\ 0 \end{pmatrix} lb \quad (1.12)$$

Para el *elemento 1* el desplazamiento local en el sistema de coordenadas, utilizando la Ec.(3.20) :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.5333 \cdot 10^{-3} \\ 1.73 \cdot 10^{-3} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(45°) & -sen(45°) & 0 & 0 \\ sen(45°) & \cos(45°) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(45°) & -sen(45°) \\ 0 & 0 & sen(45°) & \cos(45°) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

$$\begin{pmatrix} u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0016 \\ 0.00085 \end{pmatrix} \text{in} \quad (1.14)$$

La tensión en el elemento es calculada utilizando la Ec. (3.28).

$$\frac{10 \cdot 10^6}{56.57}\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 \\ 0.00160\end{bmatrix} = 282.90 \ {}^{lb}/_{in^2} \tag{1.15}$$

La fuerza nodal en el *elemento 1* utilizando la Ec. (3.11)

$$k_1\begin{bmatrix}1 & -1 \\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1 \\ u_3\end{Bmatrix} = \begin{pmatrix}f_{1x}{}^1 \\ f_{2x}{}^1\end{pmatrix} \tag{1.16}$$

$$\begin{pmatrix}f_{1x}{}^1 \\ f_{2x}{}^1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-424.10 \\ 424.10\end{pmatrix}\text{lb} \tag{1.17}$$

Para el *elemento 2* el desplazamiento local en el sistema de coordenadas, utilizando la Ec.(3.20) :

$$\begin{pmatrix}0.5333 \cdot 10^{-3} \\ 1.73 \cdot 10^{-3} \\ 0 \\ 0\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\cos(180°) & -sen(180°) & 0 & 0 \\ sen(180°) & \cos(180°) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{c}(180°) & -s(180°) \\ 0 & 0 & s(180°) & \text{c}(180°)\end{bmatrix}^T = \begin{pmatrix}u_3 \\ u_4 \\ 0 \\ 0\end{pmatrix} \tag{1.18}$$

$$\begin{pmatrix}u_3 = -0.0005333333333 \\ u_4 = -0.001730817609\end{pmatrix} in \tag{1.19}$$

La tensión en el elemento es calculada utilizando la Ec. (3.28).

$$\frac{10 \cdot 10^6}{40}\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 \\ 0.0005333333333\end{bmatrix} = 133.33 \ {}^{lb}/_{in^2} \tag{1.20}$$

La fuerza nodal en el *elemento 1* utilizando la Ec. (3.11)

$$k_2\begin{bmatrix}1 & -1 \\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_3 \\ 0\end{Bmatrix} = \begin{pmatrix}f_{2x}{}^2 \\ f_{3x}{}^2\end{pmatrix} \tag{1.21}$$

$$\begin{pmatrix} f_{2x}{}^{2} \\ f_{3x}{}^{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ -200 \end{pmatrix} \text{lb} \tag{1.22}$$

<u>Caso de estudio con un programa de Elementos Finitos.</u>

Considere la Armadura mostrada en la Figura 1, para todos los elementos E=13.1 GPa y v=0.29. La sección presente dimensiones 6 cm x 6cm (ancho x altura).

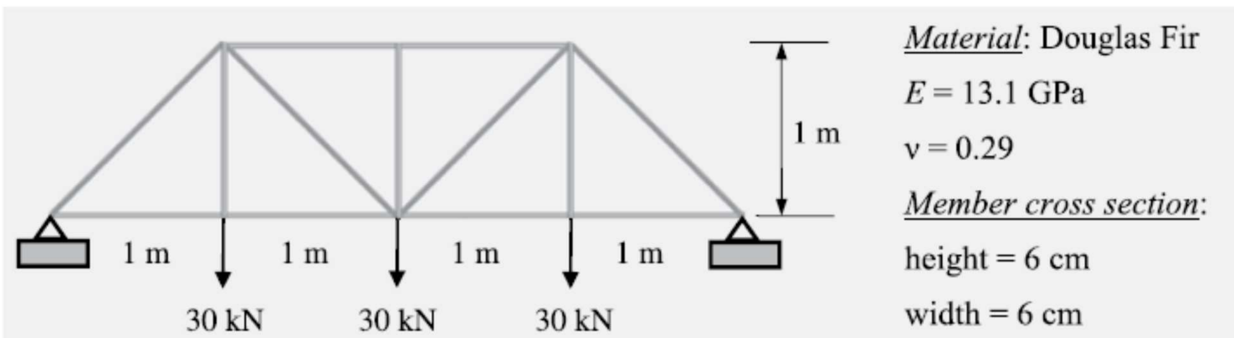

Figura 1. Puente de barras.

Determine los desplazamientos nodales y los esfuerzos en los elementos utilizando FEM.

Resuelva el problema propuesto utilizando **<u>un programa de Elementos Finitos</u>** y utilizando su programa implementado en Octave.

3. <u>Ejercicios Propuestos.</u>

Ejercicio Propuesto 2.1: Considere la armadura mostrada en la figura 11, Determine los desplazamientos, la fuerzas y tensiones en los elementos.

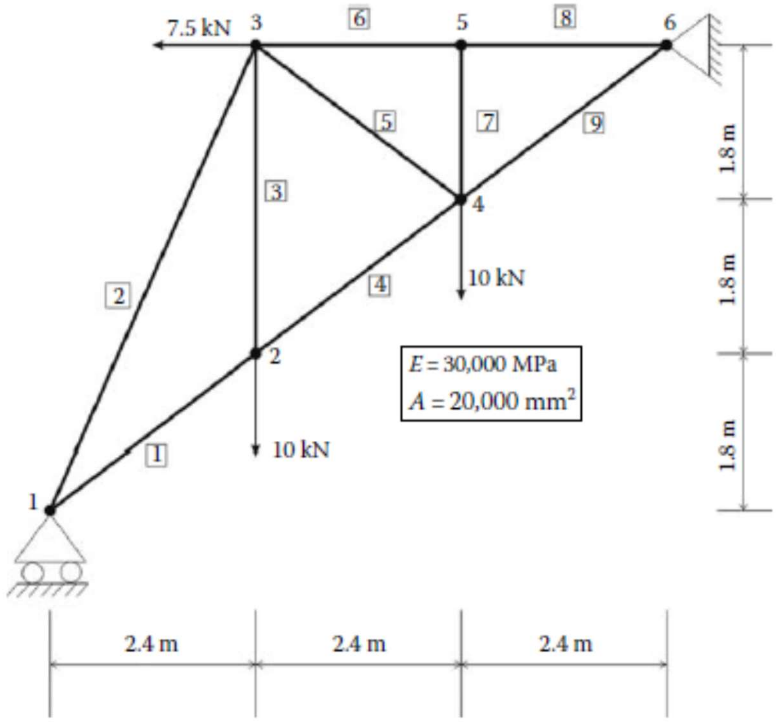

Figura 2.1 Armadura formada con elementos de tipo barra.

Ejercicio Propuesto 2.2: Considere la armadura mostrada en la figura 1.2, Determine los desplazamientos, la fuerzas y tensiones en los elementos. El área de la sección transversal $A = 1.0\ in^2$ y el módulo de elasticidad $15\ \cdot 10^6\ psi$. La fuerza horizontal y vertical aplicada en el nodo 3 son 300 lb y 200 lb respectivamente.

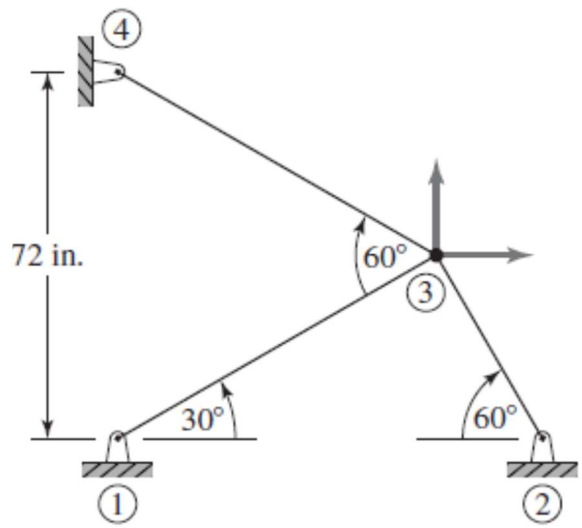

Figura 2.2 Armadura formada con elementos de tipo barra.

Ejercicio Propuesto 2.3: Considere la armadura mostrada en la figura 1.3, de sección transversal 5 mm x 5mm. Determine los desplazamientos y la fuerzas en los elementos.

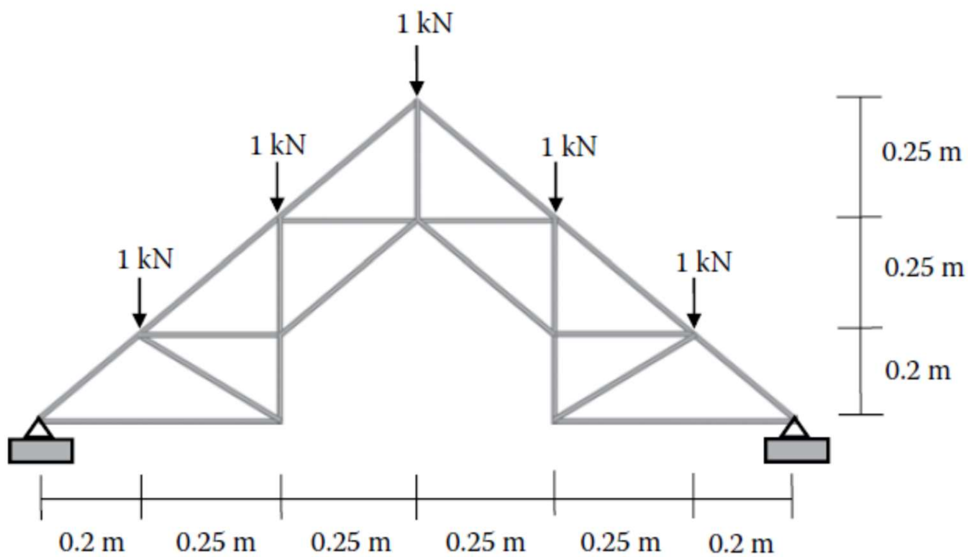

Figura 2.3 Armadura formada con elementos de tipo barra.

Ejercicio Propuesto 2.4: Considere la armadura mostrada en la figura 1.2, de sección transversal 3 mm x 3 mm. Determine los desplazamientos y la fuerzas en los elementos.

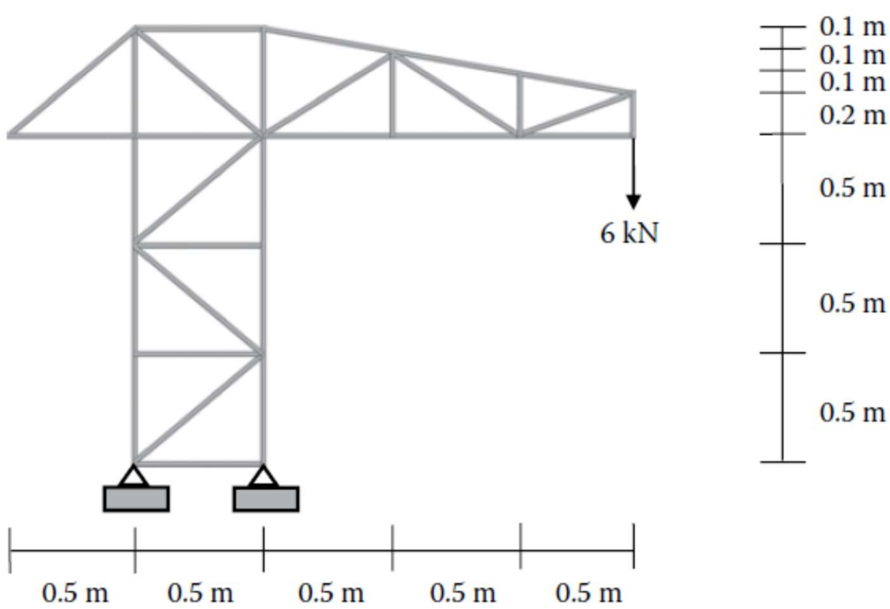

Figura 2.4 Armadura formada con elementos de tipo barra.