Facultad de Ingeniería – Udelar

Departamento de Diseño industrial – IIMPI

MODELADO DE SISTEMAS MECÁNICOS EMPLEANDO EL MÉTODO DE LOS ELEMENTO FINITOS

CLASE N^0 4

FORMULACIÓN DE ELEMENTOS FINITOS TIPO BARRA

PROFESOR

Dr. Henry Figueredo Losada

Montevideo. Uruguay.
Noviembre 2019

TEMA II. FORMULACIÓN DE ELEMENTOS FINITOS 1D-ESTATICOS.

CLASE 4. FORMULACIÓN DE ELEMENTOS FINITOS TIPO BARRA

Sumario.

1. Introducción.

2. Definición de los Elementos Finitos tipo Barras.

3. Derivación de la Matriz de Rigidez para un Elemento Tipo Barra.

4. Transformación de la matriz de rigidez del elemento en el sistema local para el sistema global.

5. Cálculo de la tensión para una barra en el plano x-y.

Objetivos.

Saber usar las formulaciones del método de los elementos finitos para modelar estructuras con elementos de barras.

Bibliografía.

9. Klaus-Jurgen Bathe "Finite Element Procedures", 2da Edición.
10. G.R.Liu “The Finite element Method- A practical course”.
11. The Finite Element Method using MATLAB - Kwon and Bang

Bibliografía opcional portugués

12. Avelino Alves Filho "Elementos Finitos, A base da tecnologia CAE", 5ta Edição.

1. <u>Introducción.</u>

En esta aula inicia el estudio del segundo elemento finito que hará parte de la biblioteca de elementos que estamos construyendo en este curso, o sea el Elemento de Barra (*Truss*) o Barra articulada en las extremidades. En la mecánica estructural una barra es un componente estructural caracterizado por dos propiedades:

1. La dimensión longitudinal o axial es mayor que las otras dimensiones, las cuales son conocidas como dimensiones transversales. La intercepción de un plano normal a la longitud dimensional con la barra define la sección transversal. La dimensión longitudinal define el eje longitudinal.
2. La barra resiste una fuerza interna axial a lo largo de su dimensión longitudinal.

Según el [BEER] consideramos tres categorías amplias de estructuras de ingeniería:

1. *Armaduras:* las cuales están diseñadas para soportar cargas y por lo general son estructuras estacionarias que están totalmente restringidas. Las armaduras consisten exclusivamente de elementos rectos que están conectados en nodos localizados en los extremos de cada elemento. Por tanto, los elementos de una armadura son *elementos sujetos a dos fuerzas*, esto es, elementos sobre los cuales actúan dos fuerzas iguales y opuestas que están dirigidas a lo largo del elemento (Fig 3.2).
2. *Armazones:* los cuales están diseñados para soportar cargas, se usan también como estructuras estacionarias que están totalmente restringidas. Sin embargo, los armazones siempre por lo menos un *elemento sujeto a varias fuerzas*, esto es, un elemento sobre el cual actúan tres o más fuerzas que, en general, no están dirigidas a lo largo del elemento.
3. *Máquinas:* Las cuales están diseñadas para transmitir y modificar fuerzas, son estructuras que contienen partes en movimientos. Las máquinas, al igual que los armazones, siempre contienen por lo menos un elemento sujeto a varias fuerzas.

Figura 3.1 La foto muestra una conexión con junta de pasador sobre el acceso al puente. Permiso (Beer, Johnston, and Mazurek 2019)

Las armaduras constan de elementos rectos que se conectan en nodos. Los elementos de la armadura sólo están conectados en sus extremos; por tanto, ningún elemento continúa más allá de un nodo. La mayoría de las estructuras reales están hechas a partir de varias armaduras unidas entre sí para formar una armadura espacial. Cada armadura está diseñada para soportar aquellas cargas que actúan en su plano y, por tanto, pueden ser tratadas como estructuras bidimensionales.

Los elementos de una armadura, por lo general, son delgados y sólo pueden soportar cargas laterales pequeñas; por eso todas las cargas deben estar aplicadas en los nodos y no sobre los elementos.

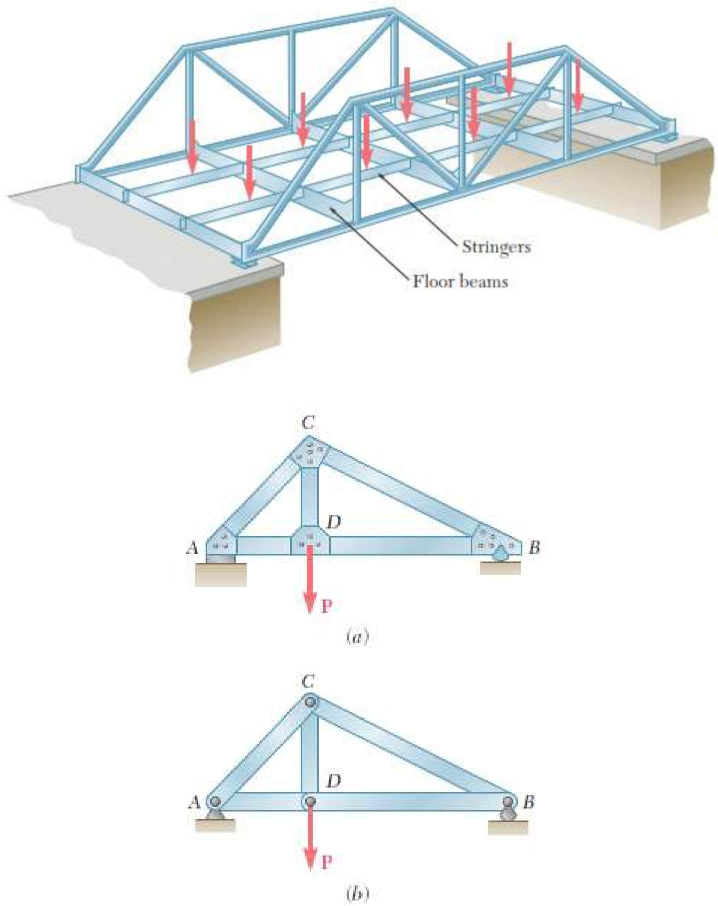

Figura 3.2 Estructura de barras. Permiso (Beer, Johnston, and Mazurek 2019)

2. <u>Definición de los Elementos Finitos tipo Barras.</u>

Muchos de los problemas de la mecánica pueden ser tratados con elementos de barra o de armazón y tratados como problemas lineal elásticos, para esta condición se asume que:

1. Pequeñas deformaciones (el patrón de carga no cambia debido a la forma deformada).
2. El material es elástico (ninguna plasticidad o falla tiene lugar).
3. Las cargas son estáticas (la carga se aplica a la estructura en una forma lenta o estable).

El análisis lineal puede proporcionar la mayoría de la información sobre el comportamiento de una estructura, y puede ser una buena aproximación para muchos análisis.

En el aula anterior fueron establecidos los fundamentos en los cuales se basa el método de rigidez directo, podemos derivar la matriz de rigidez para un elemento lineal elástico de barra o de armazón usando los pasos generales esbozados en la conferencia 2. En este caso introduciremos otro tratamiento diferente que es muy encontrado en libros para derivar la matriz de rigidez de elementos. Como fue visto anteriormente necesitamos transformar del sistema local para el elemento al sistema global de la estructura. En este sentido abordaremos la transformación de un vector del sistema local de coordenadas al sistema global usando el concepto de transformación matricial para expresar la matriz de rigidez de un elemento arbitrariamente orientado en términos de sistema global de coordenadas.

3. Derivación de la matriz de rigidez de un elemento de barra en coordenadas locales.

Consideremos una barra solida simple con 2 nodos de referencia y longitud L, área de sección transversal A y elaborada de un material elástico lineal con el módulo de elasticidad (Young) E como se representa en la figura 3.3 a). Si se aplica una fuerza normal N_1 en el *Nodo 1*, y mantenemos en *Nodo 2* fijo en el espacio, la barra se acorta un u_1 representado por figura 3.3b)

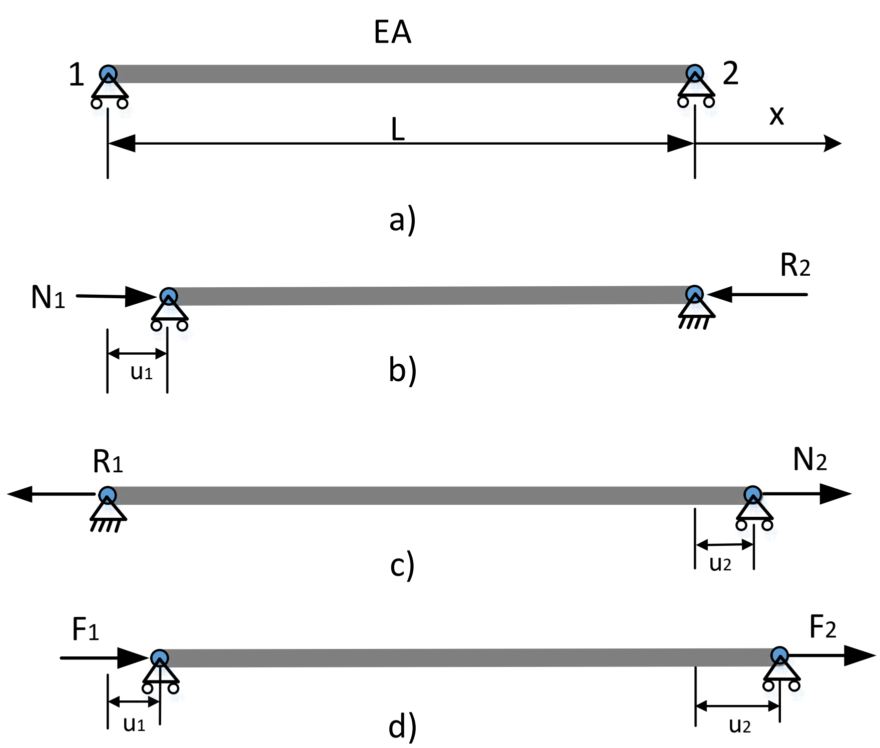

Figura 3.3 Elemento barra: a) geometría, b) fuerza nodal aplicada en el nodo 1, c) fuerza nodal aplicada en el nodo 2, d) fuerzas nodales aplicadas en ambos nodos.

La fuerza N_1 esta relacionada con el desplazamiento u_1 a través de la constante de rigidez k que se comporta de forma similar al resorte de constante elástica $igual\ a\ \frac{AE}{L}$.

<u>Demostración:</u>

La fuerza axial distribuida uniformemente en la sección transversal de la barra da origen al concepto de Tensión Axial o Tensión normal actuante en la sección, la fuerza por unidad de área (tensión σ) es:

$$\sigma = \frac{F}{A} \tag{3.1}$$

La deformación lineal (ε) para la barra puede ser definida por:

$$\varepsilon = \frac{variacion\ de\ la\ longitud}{longitud\ original} = \frac{d}{L} \tag{3.2}$$

Asumiendo para el material un comportamiento Lineal, la tensión es proporcional a la deformación y la constante proporcionalidad es el módulo de Young (E) y la relación es expresada por la <u>*Ley de Hooke*</u> como:

$$\sigma = \varepsilon \cdot E \tag{3.3}$$

Sustituyendo Ec.(3.1-3.2) en Ec.(3.3) obtenemos la relación para la fuerza axial como:

$$F = \frac{EA}{L} \cdot d \quad \therefore \quad k = \frac{EA}{L} \tag{3.4}$$

Por tanto, k define la rigidez axial de la barra, similar a la Ec.(2.1) definida para el resorte.

$$F = k \cdot d \tag{3.5}$$

Retomando la relación entre la fuerza N_1 y el desplazamiento u_1 a través de la constante elástica de la barra como:

$$N_1 = \frac{EA}{L}\, u_1 \tag{3.6}$$

En virtud de la tercera ley de Newton la reacción R_2 en el nodo 2 (Fig 3.3 b) es equivalente en magnitud, pero en sentido opuesto a la fuerza N_1.

$$\mathrm{R}_2 = -\frac{EA}{L}\, u_1 \tag{3.7}$$

Similar si aplicamos la fuerza normal N_2 en el nodo 2 y mantenemos el nodo 1 fijo en el espacio Fig 3.3 c).

$$N_2 = \frac{EA}{L}\, u_2 \tag{3.8}$$

En virtud de la tercera ley de Newton la reacción R_1 en el nodo 2 (Fig 3.3 c) es equivalente en magnitud, pero en sentido opuesto a la fuerza N_2.

$$\mathrm{R}_1 = -\frac{EA}{L}\, u_2 \tag{3.9}$$

Cuando la barra es sometida a ambas fuerzas N_1 y N_2 aplicando el principio de superposición, la fuerza total F_1 y F_2 mostradas en la Fig 3.3 d) puede ser escritas como:

$$\therefore \begin{cases} F_1 = N_1 - \mathrm{R}_1 = \dfrac{EA}{L} u_1 - \dfrac{EA}{L}\, u_2 \\ F_2 = N_2 - \mathrm{R}_2 = -\dfrac{EA}{L}\, u_1 + \dfrac{EA}{L} u_2 \end{cases} \tag{3.10}$$

Reagrupando la Ec.(3.10-3.11) en forma matricial :

$$\begin{bmatrix} \dfrac{EA}{L} & -\dfrac{EA}{L} \\ -\dfrac{EA}{L} & \dfrac{EA}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \tag{3.11}$$

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \tag{3.12}$$

O simplemente como:

$$[K_e]\{u_e\} = \{F_e\} \tag{3.13}$$

Donde

$\{u_e\}$: es el vector de los desplazamientos nodales.

$\{F_e\}$: es el vector de las fuerzas nodales.

$[K_e]$: representa la matriz de rigidez de la barra en el sistema de coordenadas locales.

4. Matriz de rigidez del elemento barra en el sistema coordenadas local y global. Matriz de transformación.

Consideremos la barra de la Fig 3.4 para representar los posibles grados de libertad del elemento en el espacio bidimensional.

Figura 3.4 Grados de libertad de una barra en un espacio 2D.

Tomando los 4 grados de libertad (desplazamientos nodales) de la barra de la Fig 3.4 como:

$$\{d_e\} = \{u_1, v_1, u_2, v_2\}^T \tag{3.14}$$

La correspondiente matriz de rigidez para Ec.(3.14) asumiendo que el desplazamiento transversal es nulo considerando solo el desplazamiento axial.

$$[K_e] = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & -EA/L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -EA/L & 0 & EA/L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.15}$$

$$
\begin{Bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & -EA/L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -EA/L & 0 & EA/L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} \tag{3.16}
$$

Como fue visto en aulas anteriores, fue introducido dos sistemas de coordenadas, el sistema local mediante el cual se oriente el elemento aislado y el sistema de coordenadas globales mediante el cual se orienta la estructura a la que pertenece el elemento.

En la Fig 3.4 el sistema local coincide con el sistema global introducido no siendo necesario realizar ninguna transformación del sistema local, consideremos ahora la barra de la fig 3.5 orientada arbitrariamente.

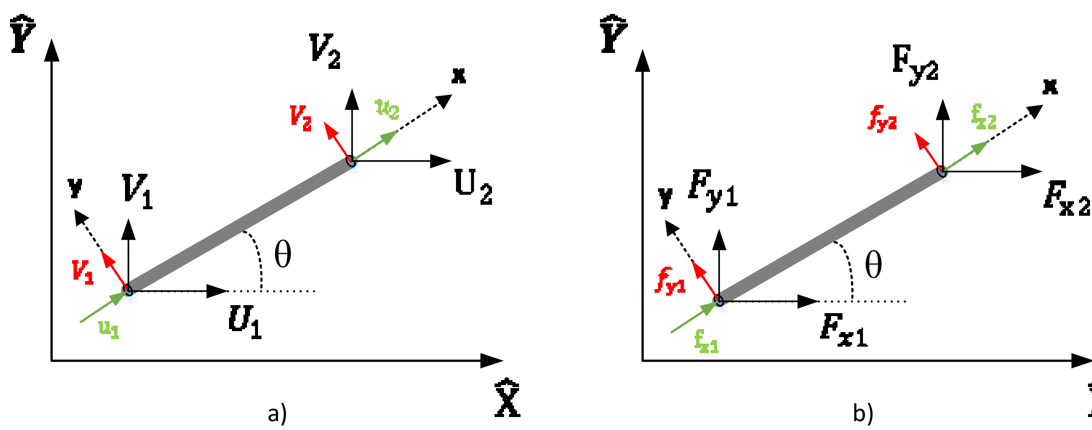

Figura 3.5 Elemento de Barra orientado un ángulo θ con respecto a la horizontal. a) Desplazamientos nodales b) Fuerzas nodales.

Dadas los desplazamientos nodales global del elemento en la Fig 3.5 a) representados por $\boldsymbol{U_1}$ y $\boldsymbol{V_1}$ en función de los términos $u_1\ y\ v_1$ como:

$$
\begin{cases} \boldsymbol{U_1} = u_1 \cos(\theta) - v_1 \sin(\theta) \\ \boldsymbol{V_1} = u_1 \sin(\theta) + v_1 \cos(\theta) \end{cases} \tag{3.17}
$$

Similar para $\boldsymbol{U_2}$ y $\boldsymbol{V_2}$ en función de los términos $u_2\ y\ v_2$ como:

$$\begin{cases} \boldsymbol{U_2} = u_2 \cos(\theta) - v_2 \sin(\theta) \\ \boldsymbol{V_2} = u_2 \sin(\theta) + v_2 \cos(\theta) \end{cases} \tag{3.18}$$

Agrupando las Ec.(3.17-3.18) en forma matricial como:

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{U_1} \\ \boldsymbol{V_1} \\ \boldsymbol{U_2} \\ \boldsymbol{V_2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} \tag{3.19}$$

Expresando Ec.(3.19) en forma más compacta :

$$\{\hat{d}_e\} = [C]\{d_e\} \tag{3.20}$$

La ecuación Ec.(3.20) relaciona los desplazamientos globales $\hat{d}_e$ con los desplazamientos locales d_e . La matriz [C] es llamada de matriz de transformación o rotación.

El vector global de las fuerzas nodales $\{\hat{f}_e\} = \{F_{x1}, F_{y1}, F_{x2}, F_{y2}\}^T$ puede ser obtenido desde el vector local de la fuerzas nodales $\{f_e\} = \{f_{x1}, f_{y1}, f_{x2}, f_{y2}\}^T$ como:

$$\{\hat{f}_e\} = [C]\{f_e\} \tag{3.21}$$

En el sistema de coordenadas locales, la relación fuerzas -desplazamientos Ec.(3.13)

$$[K_e]\{d_e\} = \{f_e\} \tag{3.22}$$

Usando la Ec.(3.20) y Ec.(3.21) y sustituyendo en Ec.(3.22) como:

$$\begin{cases} \{d_e\} = [C]^T\{\hat{d}_e\} \\ \{f_e\} = [C]^T\{\hat{f}_e\} \end{cases} \quad \therefore \quad [K_e][C]^T\{\hat{d}_e\} = [C]^T \{\hat{f}_e\} \tag{3.23}$$

Multiplicando ambos lados de la Ec.(3.23) por $[C]$.

$$[\widehat{K_e}]\{\hat{d}_e\} = \{\widehat{f_e}\} \tag{3.24}$$

Con

$$[\widehat{K_e}] = [C][K_e][C]^T \tag{3.25}$$

La matriz $[\widehat{K_e}]$ es llamada matriz de rigidez del elemento en el sistema de coordenadas globales y relaciona los desplazamientos nodales globales con las fuerzas nodales global para toda la estructura.

<u>5.- Cálculo de las tensiones para una Barra en el plano X-Y.</u>

A continuación, consideremos las tensiones en un elemento de barra (Truss). Para una barra las fuerzas son relacionadas con los desplazamientos locales mediante las Ec.(3.12) o Ec;(3.16) La definición de la tensión Ec.(3.1) para la tensión axial en una barra, por tanto la tensión axial es:

$$\sigma = \frac{f_{2x}}{A} \tag{3.26}$$

Donde f_{2x} es usada por se la fuerza que tracciona la barra como se muestra en la Fig 3.5 de acuerdo a la ecuación Ec.(3.12) tenemos

$$f_{2x} = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \tag{3.27}$$

Por lo tanto, combinando las ecuaciones Ec.(3.26) y Ec.(3.27) tenemos

$$\sigma = \frac{E}{L}\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \tag{3.28}$$

Bibliografía

Beer, Ferdinand P, E Russell Johnston, and David F Mazurek. 2019. *Mecânica Vetorial Para Engenheiros-: Estática*. McGraw Hill Brasil.