Clase 10 _ Integrales (Parte 4)

- $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada

Probamos que: $S_*(f,P) \leq S^*(f,Q)$ $\forall$ part. P, Q.

$$\Rightarrow \underbrace{\sup\{S_*(f,P) : P \text{ part.}\}}_{= I_*(f)} \leq \underbrace{\inf\{S^*(f,Q) : Q \text{ part}\}}_{= I^*(f)}$$

Definimos "f integrable" cuando $I_*(f) = I^*(f)$
y en ese caso definimos

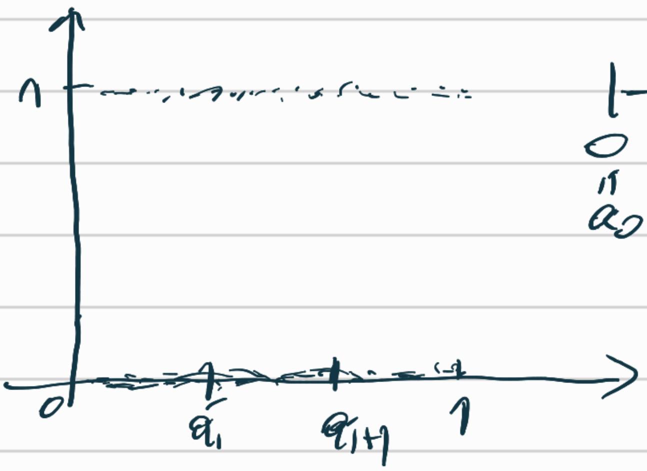
$$\int_a^b f(x)\,dx = I_*(f) = I^*(f)$$

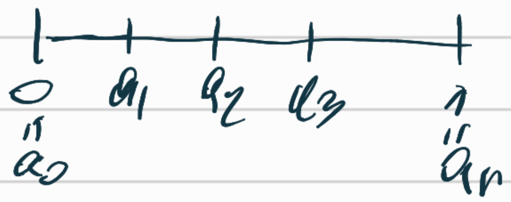
- Ejemplo de función no integrable:

$$f : [0,1] \to \mathbb{R} \ / \ f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Propiedad: En todo intervalo no vacío $[a_i, a_{i+1}]$ siempre hay infinitos racionales e infinitos irracionales.

Si $P = \{a_0 = 0, a_1, a_2, \ldots, a_n = 1\}$





$$S_*(f,P) = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) \cdot \underbrace{\inf(f, [a_i, a_{i+1}])}_{\overset{\|}{0}} = 0$$

$\to$ pues $\exists\, x \in [a_i, a_{i+1}]$ con $x \in \mathbb{Q}$ $\Rightarrow f(x) = 0$.

$$\Rightarrow I_*(f) = \sup\{0\} = 0$$

$$S^*(f,P) = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) \cdot \underbrace{\sup(f, [a_i, a_{i+1}])}_{\overset{\|}{1}}$$

$\to$ pues $\exists\, x \in [a_i, a_{i+1}]$ con $x \notin \mathbb{Q}$ $\Rightarrow f(x) = 1$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) = 1$$

$$\Rightarrow I^*(f) = \inf\{1\} = 1$$

$$\therefore \; I_*(f) = 0 \neq 1 = I^*(f)$$

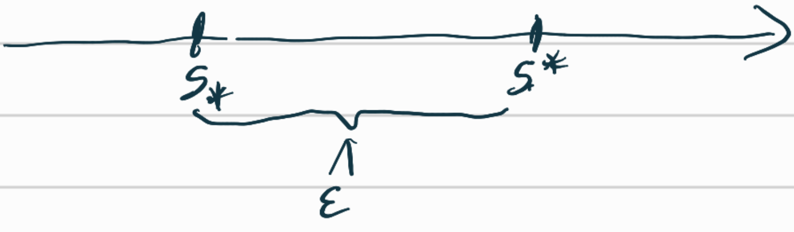
$\Rightarrow f$ no es integrable.

(Prop. 23, 25 de las notas)

<u>teorema</u>: Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada.

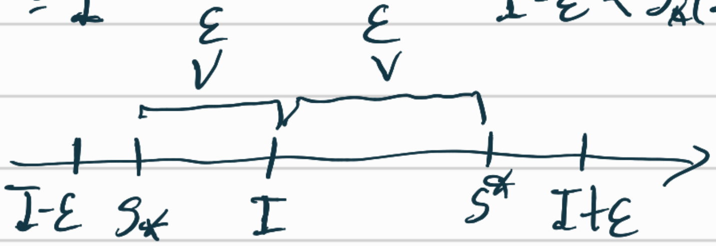
i) (Criterio de integración débil)

f es integrable en $[a,b] \iff \forall \varepsilon > 0, \exists$ partición P / $S^*(f,P) - S_*(f,P) < \varepsilon$



iii) (Criterio de integración fuerte)

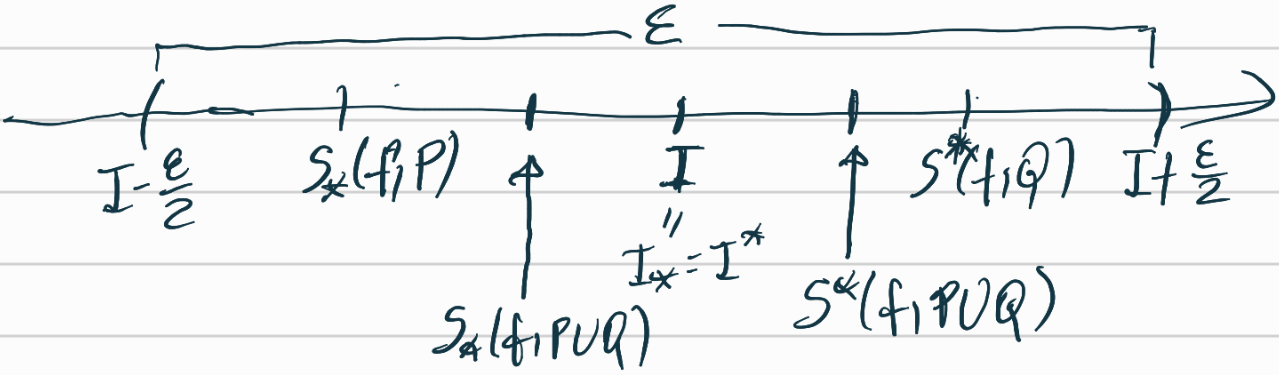
f es integrable en $[a,b]$ y $\int_a^b f(x)\,dx = I$ $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ partición P / $I-\varepsilon < S_*(f,P) \leq S^*(f,P) < I+\varepsilon$



$$I - \varepsilon < S_* \leq S^* < I + \varepsilon$$

$\boxed{\text{Dem iii}}$ ($\Rightarrow$) Llamamos $I = \int_a^b f(x)\,dx$,
se cumple $I_*(f) = I^*(f) = I$.
$\rightarrow$ $I_*(f)$ = supremo de sumas inferiores
$I^*(f)$ = ínfimo de sumas superiores.

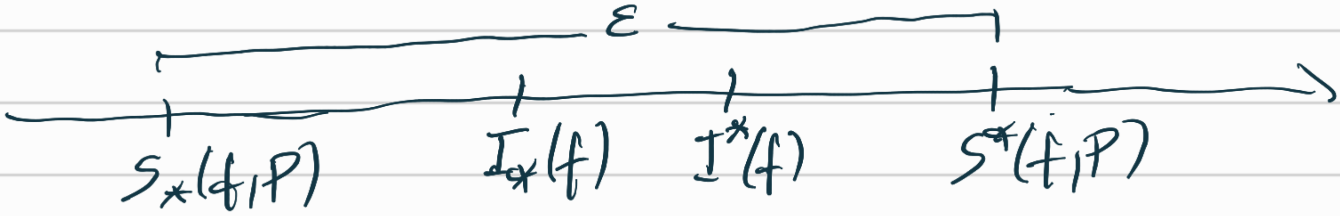
Sea $\varepsilon > 0$.
Por propiedad del supremo, $\exists$ suma inferior
$S_*(f,P) \in (I_*(f) - \varepsilon/2,\ I_*(f)] = (I - \varepsilon/2,\ I]$ $\leftarrow$
Por propiedad del ínfimo, $\exists$ suma superior
$S^*(f,Q) \in [I^*(f),\ I^*(f) + \varepsilon/2) = [I,\ I + \varepsilon/2)$



$\Rightarrow$ $S^*(f, P\cup Q) - S_*(f, P\cup Q) < \left(I + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \left(I - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon$.

($\Leftarrow$) Queremos probar que $I_*(f) = I^*(f)$.
Sea $\varepsilon > 0$. Por hipótesis, existe

una partición P / $S^*(f,P) - S_*(f,P) < \varepsilon$



$\Rightarrow$ Como $S_*(f,P) \leq I_*(f) \leq I^*(f) \leq S^*(f,P)$

$\Rightarrow 0 \leq I^*(f) - I_*(f) \leq S^*(f,P) - S_*(f,P) < \varepsilon$

$\Rightarrow 0 \leq I^*(f) - I_*(f) < \varepsilon \quad , \forall \varepsilon > 0$

$\Rightarrow I^*(f) - I_*(f) = 0 \Rightarrow \boxed{I^*(f) = I_*(f)}$

$\Rightarrow f$ es integrable en $[a,b]$ $\square$

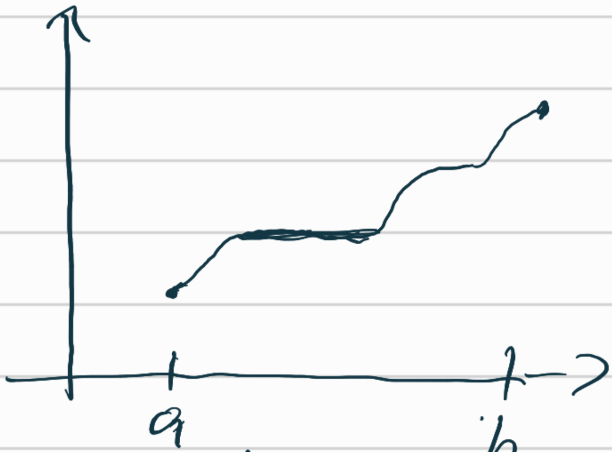
$\boxed{\text{Dem ii}}$ Se puede usar la parte i
(no lo vamos a hacer, se puede
leer las notas).

—//—

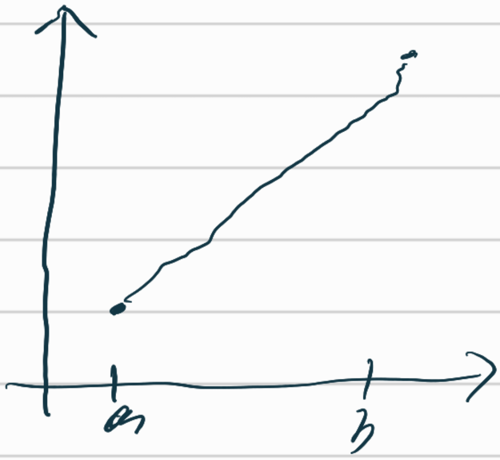
Vamos a usar el criterio (débil) para
para probar que monótona $\Rightarrow$ integrable.

Def. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ decimos que

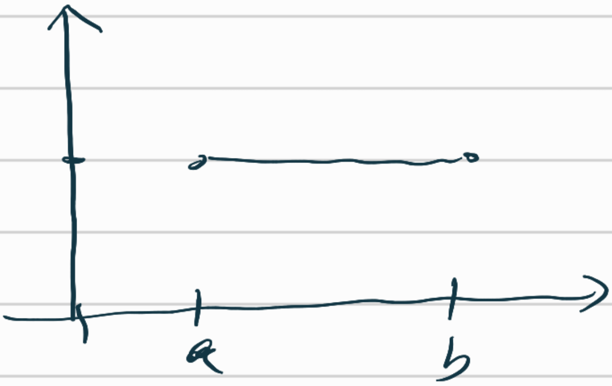
- f es monótona creciente si
  $x < y$ implica $f(x) \leq f(y)$, $\forall x, y \in [a,b]$
- f es monótona decreciente si
  $x < y$ implica $f(x) \geq f(y)$, $\forall x, y \in [a,b]$
- f es monótona si es monótona creciente
  o monótona decreciente.



monótono creciente



monótono estrictamente creciente



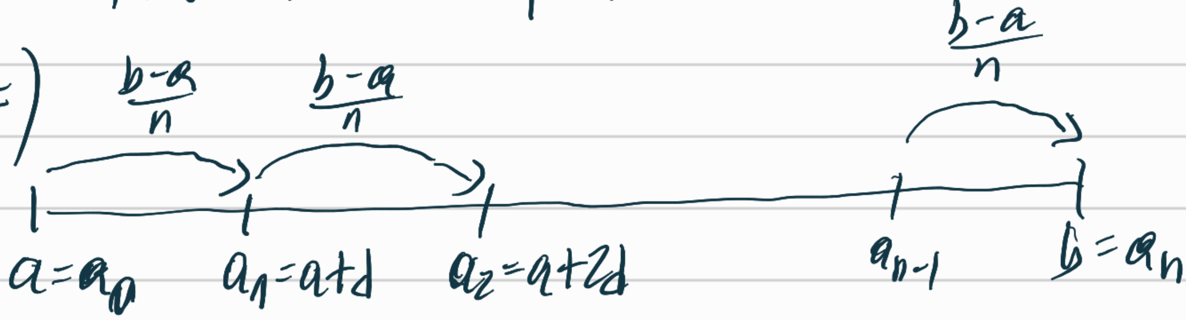
funciones constantes son monótonas crecientes y decrecientes.

Teo. Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es una función monótona $\Rightarrow$ f es integrable.

Dem. Sea $\varepsilon>0$, alcanza probar que existe alguna partición P tal que $S^*(f,P)-S_*(f,P)<\varepsilon$ (por criterio).

Para cada $n\in\mathbb{Z}^+$ sea P_n = partición equiespaciada de $[a,b]$ con $n+1$ puntos

$\left(d=\frac{b-a}{n}\right)$



$P_n = \{ a_0 = a,\ a_1 = a+d,\ a_2 = a+2d, \dots, a_n = b \}$

donde $a_i = a + id$ para $i = 0, 1, \dots, n$

donde $d = \frac{b-a}{n}$.

Para probar que f es integrable en $[a,b]$ basta probar que $\exists n \in \mathbb{Z}^+ / S^*(f, P_n) - S_*(f, P_n) < \varepsilon$

Caso en que f es monótona creciente:

$$S^*(f, P_n) = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) . \sup(f, [a_i, a_{i+1}])$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{b-a}{n}\right) . f(a_{i+1})$$

$$= \left(\frac{b-a}{n}\right) . (f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n))$$

$$S_*(f, P_n) = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) . \inf(f, [a_i, a_{i+1}])$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{b-a}{n}\right) . f(a_i)$$

$$= \left(\frac{b-a}{n}\right) . (f(a_0) + f(a_1) + \dots + f(a_{n-1}))$$

$$\Rightarrow S^*(f, P_n) - S_*(f, P_n) = \left(\frac{b-a}{n}\right) (f(a_n) - f(a_0))$$

$$= \frac{(b-a)(f(b) - f(a))}{n} < \varepsilon$$

Para que $S^*(f, P_n) - S_*(f, P_n) < \varepsilon$ alcanza tomar

$n\in\mathbb{Z}^+ \,/\, n > \dfrac{(b-a)(f(b)-f(a))}{\varepsilon}$.

Caso en que f es monótona decreciente: ejercicio.

$\square$

Ejemplo: Sea $f:[0,1]\to\mathbb{R} \,/\, f(x)=x^2$

1) Probar que f es integrable.
2) Calcular $\int_0^1 x^2\,dx$.

Solución: 1) Si $x,y\in[0,1] \,/\, x<y \Rightarrow x^2<y^2$

Luego f es monótona creciente

$\Rightarrow f$ es integrable.

2) $P_n=\{0, 1/n, 2/n, \ldots, n/n=1\}$

$$S_*(f,P_n)=\frac{1}{n}\cdot\left(0^2+(1/n)^2+\ldots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right)$$

$$=\frac{0^2+1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2}{n^3} < \frac{1}{3}$$

(Próximo clase)