



FACULTAD DE
INGENIERÍA
UDELAR



APUNTES DE CARTOGRAFÍA MATEMÁTICA

Prof. Adj. Ing. Agrim. Ricardo Martínez
2023

I – INTRODUCCIÓN A LA CARTOGRAFÍA MATEMÁTICA

La cartografía surge en tiempos remotos como una necesidad de la humanidad de representar en entorno físico donde se asienta como forma de conservar para recordar y transmitir las rutas de acceso fundamentalmente a los recursos naturales necesarios para la subsistencia: áreas de caza, zonas de recolección de frutos, aguadas, recursos líticos, etc.

Con el tiempo, y en la medida en que se ensanchan las fronteras del accionar de las civilizaciones, la representación cartográfica resulta esencial para la navegación marítima.

En los albores de la civilización, la navegación se realizaba en la modalidad de cabotaje, vale decir teniendo tierra a la vista; tal es el caso de los Fenicios siglos antes de Cristo, que llegaron a dominar el comercio en el mar Mediterráneo.

Ya en el siglo X después de Cristo, los Vikingos se aventuraron a cruzar el océano Atlántico y existen evidencias arqueológicas que confirman la presencia vikinga en las costas de Terranova al este de Norteamérica. En ese entonces, la navegación se realizaba por latitud. Los navegantes de entonces sabían que la altura de la Estrella Polar (alfa de la Osa Mayor) indicaba la latitud del lugar. Por lo tanto, sabiendo la latitud del puerto de partida, y la del destino de llegada, podían tanto regresar al punto de partida como volver a ubicar el lugar conquistado. Lo que no conocían era la longitud, o distancia este – oeste recorrida.

No es sino hasta fines del siglo XV en que se perfeccionan los cronómetros portátiles, que los navegantes pueden saber cuánto se han desplazado en longitud. Para ello es necesario conocer las efemérides de determinados acontecimientos astronómicos en el puerto de partida, y determinar a qué hora se producen en el lugar de destino. Por ejemplo, si sabemos que la culminación superior de Sirio en cierta fecha del año, se produce en Barcelona a la una de la madrugada, y al observar dicha culminación desde otro lugar, ésta se produce a las cuatro de la madrugada, hora de Barcelona, el fenómeno observado se ha retrasado en tres horas, lo que significa que el nuevo lugar de observación se encuentra a tres horas de longitud hacia el oeste respecto de Barcelona.

CONCEPTOS BASICOS

Una proyección cartográfica es una correspondencia biunívoca entre los puntos de dos superficies en la que a cada punto de una, llamada “superficie objetiva”, le corresponde uno y sólo uno de la otra, llamada “superficie subjetiva”, y viceversa. A los puntos correspondientes se los denomina puntos homólogos.

En general esta correspondencia se expresa por una relación matemática denominada Ley de la Proyección, que vincula las coordenadas de los puntos homólogos de ambas superficies.

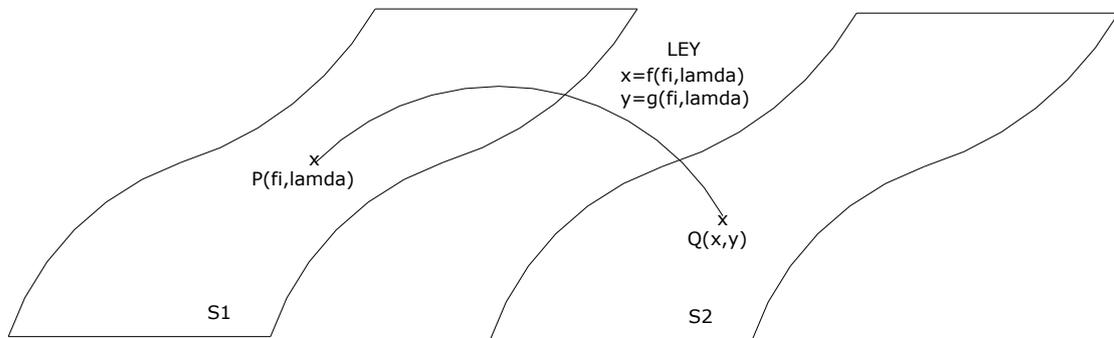


Fig. I - 1

POSTULADO DE GAUSS

Si consideramos un punto genérico P en una superficie S, y la recta normal N a la misma por el punto, el haz de planos que tiene como charnela a dicha normal intersectado con la superficie genera una familia de curvas denominadas “normales” en el punto P. Cada una de estas curvas tiene en un entorno de P una determinada curvatura C que es la inversa del radio de curvatura: $C=1/R$. Considerando los infinitos valores de las curvaturas en P, se obtiene una función continua que presenta un máximo y un mínimo denominados *curvatura máxima* CM y *curvatura mínima* Cm. Eventualmente pueden ser todas las curvaturas iguales y por tanto $CM=Cm$. Al producto de la curvatura máxima por la mínima se lo denomina *curvatura total* $CT=CM \times Cm$

Dos superficies son desarrollables o aplicables una sobre la otra cuando, considerando a una de ellas como flexible, se puede envolver con ella totalmente a la otra sin que se produzcan desgarros, estiramientos o pliegues.

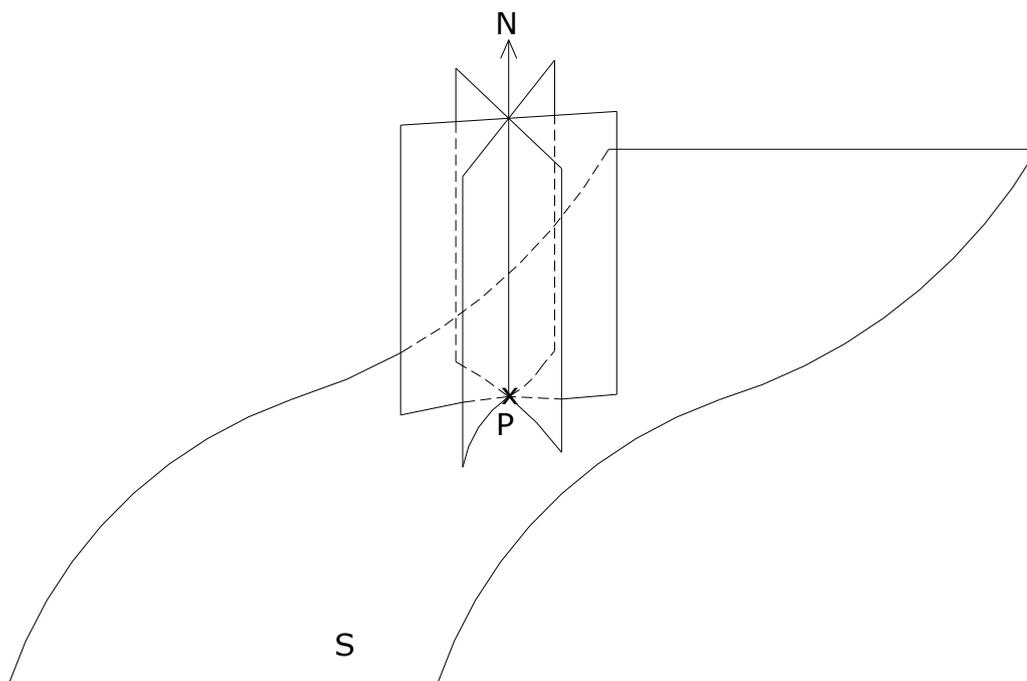


Fig. 1 - 2

El Postulado de Gauss expresa: *“Dos superficies son aplicables o desarrollables una sobre la otra cuando la curvatura total CT en cada uno de los puntos homólogos es la misma”*.

A modo de ejemplo, vemos que el plano tiene curvatura total nula para todos sus puntos puesto que las curvas normales son en todos los casos rectas, por lo que $CM=Cm=CT=0$

El cono también tiene curvatura total nula en todos sus puntos pues siempre, una de las curvas normales será una generatriz, o sea una recta, por lo que, $CM=C$ y $Cm=0$, o sea $CT=Cx0=0$

En el caso del cilindro, también la curvatura total es nula pues el cilindro se puede considerar como un caso límite de un cono con el vértice en el punto impropio, por lo que la $CT=0$

En cambio, tanto el elipsoide como la esfera tienen curvatura total distinta de cero en todos sus puntos; en el caso de la esfera es $CT=1/(RxR)$ y en el del elipsoide, $CT=1/(roxN)$

De este análisis se concluye que tanto el cono como el cilindro son aplicables o desarrollables en el plano, pero no la esfera ni el elipsoide.

PLANO

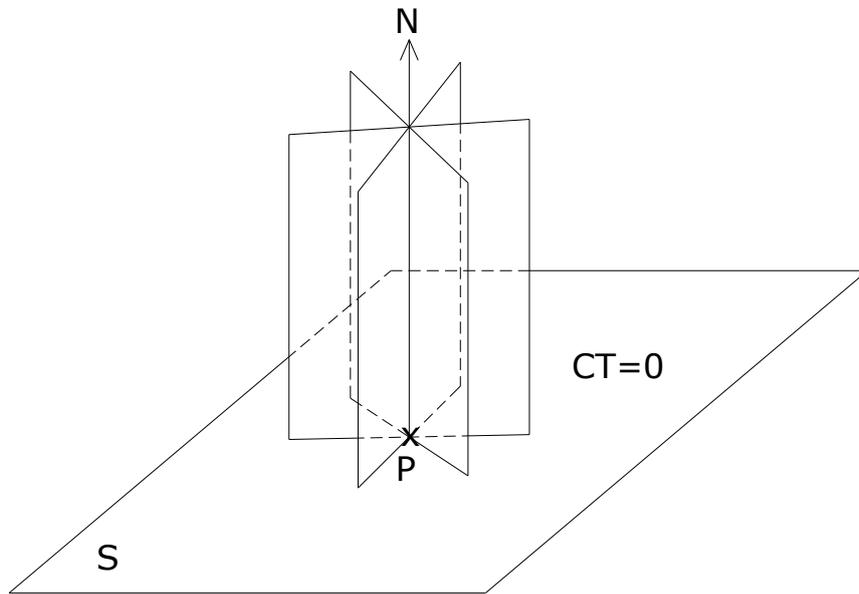


Fig. 1 - 3

CONO

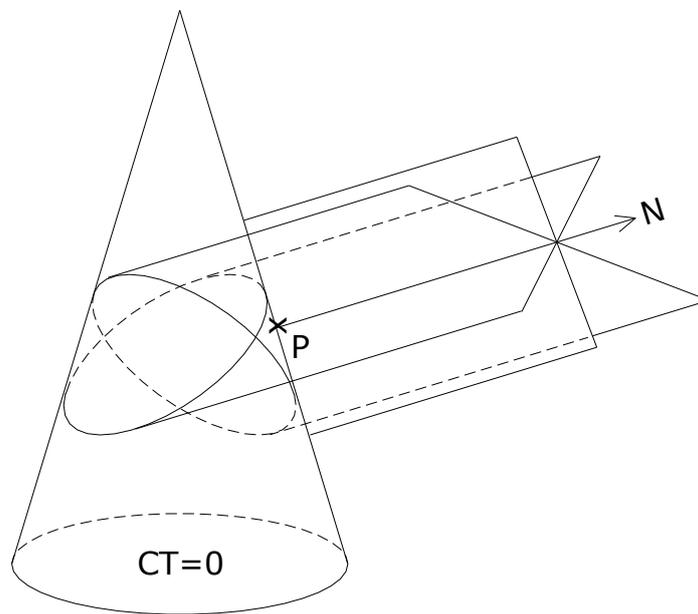


Fig. 1 - 4

CILINDRO

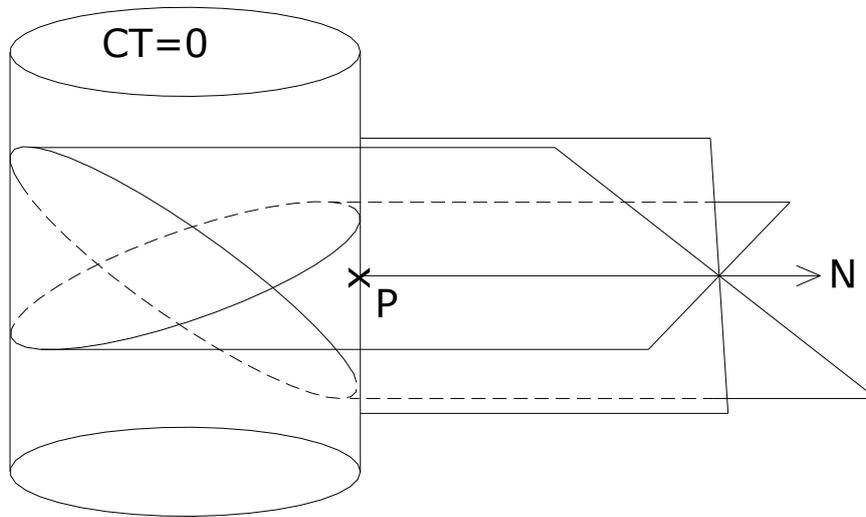


Fig. 1 - 5

ELIPSOIDE

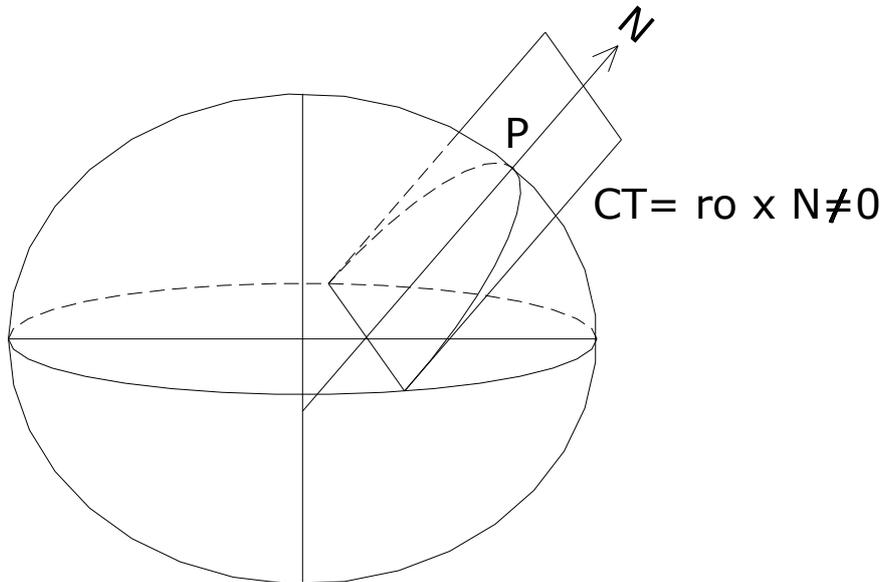


Fig. 1 - 6

Cuando no es posible desarrollar o aplicar una superficie sobre otra, se producen alteraciones o anamorfosis en las distancias, los ángulos y las áreas.

Las proyecciones cartográficas pueden condicionarse para que conserven alguna de las características geométricas mencionadas, pero sólo pueden conservar sin deformación, una de ellas a la vez.

CLASIFICACION DE LAS PROYECCIONES CARTOGRAFICAS

Las proyecciones cartográficas se pueden clasificar en función de diversos criterios:

Según la naturaleza de la superficie subjetiva

- proyecciones planas
- proyecciones cilíndricas
- proyecciones cónicas
- proyecciones poliédricas

Según la naturaleza de la Ley de la proyección

- proyecciones geométricas o propiamente proyecciones (si existe una construcción geométrica o proyectividad que vincula los puntos homólogos)
- proyecciones analíticas (si la Ley de la proyección sólo tiene expresión analítica y no geométrica)

Según la posición de la superficie subjetiva respecto de la objetiva

- polares en el caso de las planas o directas en el caso de las cilíndricas y de las cónicas (cuando el plano es tangente en el polo, o el eje del cilindro o del cono coincide con el eje polar terrestre respectivamente)
- ecuatoriales en el caso de las planas o transversas en el caso de las cónicas o cilíndricas (cuando el plano es tangente en el ecuador, o el eje del cilindro o del cono pertenece al plano del ecuador respectivamente)
- acimutales u oblicuas (cuando el plano es tangente a la superficie objetiva en un punto de latitud intermedia, o el eje del cilindro o del cono forma un ángulo de latitud intermedia, respectivamente)

Según se intersecten o no las superficies subjetiva y objetiva

- externas (si la superficie subjetiva es externa a la objetiva)
- tangentes (si la superficie subjetiva es tangente a la objetiva)
- secantes (si la superficie subjetiva es secante a la objetiva)

Según la naturaleza de la característica geométrica que se conserva

- equidistantes o automecoicas (cuando conservan las distancias)
- conformes (cuando conservan los ángulos)
- equivalentes (cuando conservan las áreas)
- afilácticas (cuando no conservan ninguna de las características)

II – PARÁMETROS Y SISTEMAS

INTRODUCCION

Para establecer la relación entre los levantamientos geodésicos basados en la utilización de equipos GPS (Global Positioning System) y las diferentes proyecciones cartográficas, es necesario definir algunos conceptos.

SISTEMAS DE REFERENCIA GEODESICOS

Los sistemas de referencia geodésicos, tanto geocéntricos como locales, permiten referenciar las posiciones espaciales de los puntos con relación a la superficie terrestre.

SISTEMA DE REFERENCIA GEODESICO GEOCENTRICO

Un sistema de referencia geocéntrico queda definido por tres ejes cartesianos XYZ, fijando el origen en el centro de masas de la Tierra, y de tal forma que el plano XOZ contiene al meridiano origen (Greenwich), el eje OZ es muy cercano al eje instantáneo de rotación terrestre, y el eje Y define un triedro trinormal directo.

SISTEMAS DE REFERENCIA GEODESICOS LOCALES

Un sistema de referencia local queda definido por la elección de un elipsoide de referencia, un punto origen conocido como punto Datum donde coinciden las coordenadas astronómicas y geodésicas y el acimut astronómico de partida.

De esta forma se establece su ubicación en relación con la forma física de la tierra, el geoide

SISTEMAS DE REFERENCIA CONVENCIONALES EN NUESTRO PAIS

- Sistemas de referencia geodésicos geocéntricos
 - WGS 84
 - ITRS
- Sistemas de referencia geodésicos locales
 - ROU-USSAMS
 - CDM

MARCOS DE REFERENCIA

Los marcos de referencia están constituidos por los elementos que materializan el sistema de referencia, por ejemplo los vértices geodésicos, las estaciones de rastreo continuo de GPS, etc.

A estos elementos físicos, se les determinan las coordenadas según el sistema de referencia que estén materializando.

Es a través de ellos que se hacen tangibles los sistemas de referencia teóricos definidos por las relaciones físicas y matemáticas.

PROYECCIONES CARTOGRAFICAS

Las proyecciones cartográficas como ya se ha expresado, son las que proporcionan una representación en un plano, de la Tierra o una región de esta.

Es por lo tanto una relación biunívoca entre coordenadas de un sistema de referencia terrestre (XYZ o latitud, longitud y altura según sea el caso) y coordenadas *Este, Norte* de una cuadrícula de un plano

MODOS DE MEDICION GNSS

Modo absoluto

En las mediciones absolutas, el receptor GPS recibe las efemérides transmitidas (parámetros orbitales) de los satélites, de las que surgen las coordenadas X,Y,Z y el tiempo GPS de los mismos en el sistema de referencia geocéntrico WGS84 (1984.0). Mediante algoritmos de medición de fase y/o código, el receptor calcula la distancia a cada satélite. En principio alcanzaría con la recepción de tres satélites, pues la posición del receptor estaría en la intersección de las tres esferas que tienen como centro a cada satélite, y como radio la distancia calculada (de esta forma se obtienen dos puntos de intersección, pero se asume el más cercano al origen de coordenadas, es decir el que está sobre la Tierra, y se descarta el otro). No obstante, como existe un desfase entre el tiempo cronométrico de los satélites y el del receptor, es necesario observar como mínimo un cuarto satélite para resolver esta ambigüedad. En definitiva, se trata de un sistema de cuatro incógnitas (X, Y, Z, t), por lo que se requiere un mínimo de cuatro observaciones.

En la práctica, se observa un número superabundante de satélites y en múltiples épocas, por lo que el sistema de ecuaciones es superabundante y el software asociado al GPS lo resuelve por ajustes.

Las coordenadas entonces que entrega el receptor trabajando en este modo son X, Y, Z cartesianas o φ, λ, h elipsoidicas, en el sistema de referencia WGS84.

Modo absoluto pos calculado

Es posible calcular las posiciones del receptor utilizando las efemérides precisas o pos calculadas de los satélites. Esta información está diferida en el tiempo unos 15 días, que es el tiempo que demanda a los centros de control el recálculo de las efemérides de los satélites para llegar a las efemérides precisas. El formato de estas efemérides es el IGS.SP3, y el sistema de referencia se denomina IGS2000 o ITRF2000. Es similar al WGS84, pero más preciso. Es utilizado con fines geodésicos o científicos.

Modo diferencial

En determinadas condiciones, es posible obtener precisiones equivalentes a las de pos cálculo, realizando un relevamiento GPS en modo diferencial, sin necesidad de acceder a las efemérides pos calculadas. Para ello es necesario trabajar con dos receptores: uno de base y el otro como móvil. Cuando en un radio del entorno de los 20km del área a relevar con GPS, se tiene acceso a un vértice geodésico de coordenadas precisas conocidas, se instala allí una base GPS, y el relevamiento se realiza con el GPS móvil. Como la distancia entre la base y el móvil es relativamente pequeña, los "errores atmosféricos" producidos por las diferencias de conductividad en las altas capas de la ionosfera, tienen un comportamiento similar para la base y el móvil. Asimismo, como se realizan registros simultáneos en la base y en el móvil, las indeterminaciones en la posición de los satélites por variaciones en sus órbitas, también son las mismas para la base y el móvil. Como se conoce la posición precisa de la base, es posible corregir instante a instante las posiciones del móvil con el opuesto del vector de error de la base. Esta operación se realiza en gabinete pues es necesario descargar los registros de la base y del móvil para realizar el cálculo.

Modo diferencial en tiempo real

Cuando se dispone de una conexión radial entre la base y el receptor, la corrección diferencial se va haciendo en tiempo real, obteniendo las coordenadas precisas del móvil en el momento. Este modo permite por tanto no sólo hacer relevamientos, sino también replanteos.

TRANSFORMACIONES ENTRE SISTEMAS DE REFERENCIA

La transformación de coordenadas (Fig. II - 1), permite pasar de las coordenadas (X, Y, Z) de un sistema de referencia geodésico geocéntrico **A** a las coordenadas (x, y, z) de un sistema **a**. Esta operación no debe ser confundida con la de *conversión* de coordenadas donde lo que se hace es pasar de coordenadas (X, Y, Z) a (φ, λ, h) o viceversa, pero dentro de un mismo sistema.

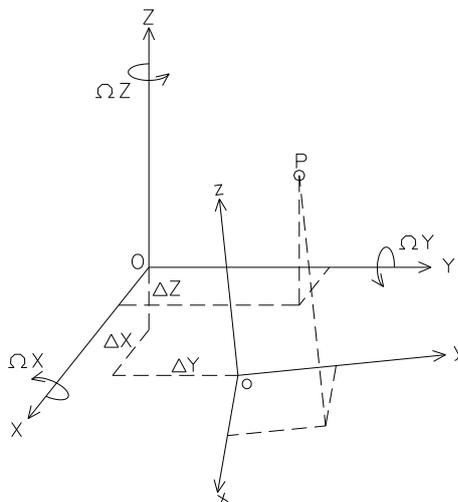


Fig. II - 1

Transformación de 7 parámetros

Si se considera la relación de semejanza espacial de Helmert, la transformación de coordenadas es una operación geométrica que requiere de siete movimientos que constituyen los parámetros de transformación:

- tres traslaciones: ΔX ; ΔY ; ΔZ
- tres rotaciones: Ω_X ; Ω_Y ; Ω_Z
- un cambio de escala: μ

De este modo se llega al modelo de transformación conocido como Bursa-Wolf o Molodetsky-Badekas. En este modelo, los siete movimientos se traducen en una sola operación matricial:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_a = \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} + (1 + \mu) \begin{bmatrix} 1 & \Omega_Z & -\Omega_Y \\ -\Omega_Z & 1 & \Omega_X \\ \Omega_Y & -\Omega_X & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_A$$

PARAMETROS DE TRANSFORMACION

A los efectos de ejemplificar, analizaremos los parámetros de transformación correspondientes a la nueva base cartográfica adoptada para el departamento de Montevideo.

A partir de la década del '60, la cartografía oficial de Montevideo se refirió al Sistema de Referencia Geodésico Local denominado CDM (Consejo Departamental de Montevideo), cuyo

punto datum es el punto Fortaleza (Fortaleza del Cerro), el elipsoide de referencia es el Elipsoide Internacional de Hayford de 1924. El sistema de proyección cartográfica utilizado es la proyección cilíndrica conforme transversa de Gauss-Kruger con meridiano de contacto en el meridiano de longitud $\lambda=62^{\circ}W$ (grados centesimales) con un falso norte con 0m en el Polo Sur ($\varphi=90^{\circ}S$), y un falso este con 500.000m en el meridiano de contacto. La referencia altimétrica es el Cero Oficial, o nivel medio de las aguas en la bahía del Puerto de Montevideo.

Por Resolución N°3518/05 del 1° de agosto de 2005, la Intendencia Municipal de Montevideo resuelve cambiar la base cartográfica oficial al Sistema de Referencia Geodésico Global SIRGAS 2000 ITRF 2000, basada en el Marco de Referencia Geodésico MRGMVD 2004, y a la Proyección Cartográfica UTM ZONA 21 SUR.

Por entenderlo breve y suficientemente explícito, se transcribe a continuación el texto del Artículo 1° de la citada Resolución del Intendente Municipal donde además se establecen los parámetros de transformación.

“1.- Disponer que el Sistema de Referencia Espacial para el Departamento de Montevideo, estará constituido por los siguientes componentes geodésicos:

Sistema de Referencia: SIRGAS 2000 ITRF 2000

Marco de Referencia: MRGMVD 2004

Proyección Cartográfica: UTM ZONA 21 SUR

*Sistema de Referencia Altimétrico: NIVEL MEDIO DE LAS AGUAS DEL
PUERTO DE MONTEVIDEO.*

*Parámetros de transformación entre el sistema CDM y el SIRGAS 2000 ITRF
2000:*

Traslación dX +272.211 m.

Traslación dY -123.899m.

Traslación dZ +35.093m.

Rotación X +36".374652

Rotación Y -67".935827

Rotación Z -50".553181

Escala +2.665196 (ppm)”

PROCEDIMIENTO TIPO PARA TRANSFORMACION DE COORDENADAS

Supongamos que disponemos de una carta en las siguientes condiciones:

Proyección cartográfica: **P**

Coordenadas planas: **(E,N)**

Sistema de referencia: **A**

Coordenadas geodésicas: **(Φ,Λ,H)**

Coordenadas geocéntricas: **(X,Y,Z)**

y queremos pasar a otra carta que sea:

Proyección cartográfica: **p**

Coordenadas planas: **(e,n)**

Sistema de referencia: **a**

Coordenadas geodésicas: **(φ,λ,h)**

Coordenadas geocéntricas: **(x,y,z)**

Los pasos a seguir son:

- 1- Deshacer la proyección **P** por regresión numérica a partir de la Ley de la Proyección **P**:
(E,N) → (Φ,Λ,H)
- 2- Calcular coordenadas geocéntricas a partir del elipsoide correspondiente al sistema **A**:
(Φ,Λ,H) → (X,Y,Z)
- 3- Transformación de coordenadas a partir de los parámetros de transformación (cálculo matricial visto más arriba)
(X,Y,Z) → (x,y,z)
- 4- Calcular coordenadas geodésicas a partir del elipsoide correspondiente al sistema **a**:
(x,y,z) → (φ,λ,h)
- 5- Construir la proyección **p** a partir de la Ley de la Proyección **p**:
(φ,λ,h) → (e,n)

DIAGRAMA DE FLUJOS

A continuación, se muestra un diagrama de flujos para las transformaciones, el cual puede ser recorrido en cualquier sentido:

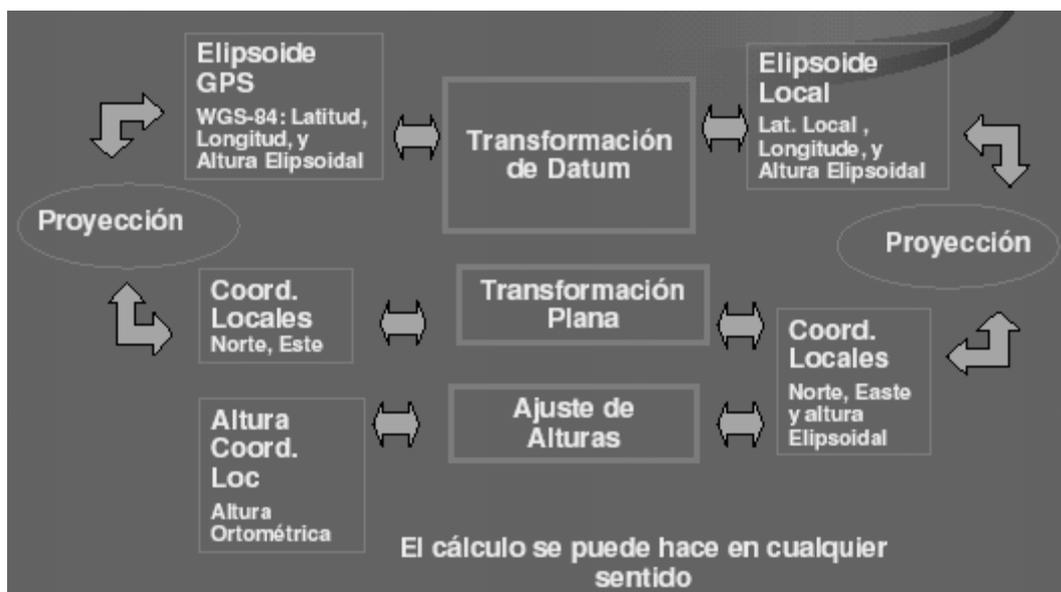


Fig. II - 2

Fuente: http://wwwsit.imm.gub.uy/sit/mapserv/me_ge/entrada.php

III – ELEMENTOS DIFERENCIALES

En una acepción simplificada, se puede definir la Cartografía como la ciencia que estudia la representación de la Tierra o una parte de esta, en un plano. La superficie real, topográfica de la Tierra, presenta una complejidad tal que resulta imposible considerarla a los efectos de su representación. Por ello, se debe simplificar la superficie que se utilizará como “modelo” de la superficie terrestre a representar. En una primera simplificación, se podría utilizar el geoide como modelo terrestre. Se trata de una superficie equipotencial del campo gravitatorio y podría representarse aproximadamente como la superficie de los mares en reposo, continuada por debajo de los continentes. Sin embargo, este modelo de la Tierra si bien resulta bastante ajustado a la realidad, presenta serias dificultades a la hora de su formulación matemática. Por ello se apela a una nueva simplificación adoptando el elipsoide de revolución como modelo matemático para la representación de la Tierra. En algunos casos, y dependiendo de la proyección cartográfica de que se trate, se considera la representación terrestre por una esfera, como caso singular del elipsoide ($a=b$).

Para establecer la representación cartográfica que vincula los puntos de la superficie terrestre (superficie objetiva) con los puntos homólogos en el plano (superficie subjetiva), estos se identifican de manera unívoca mediante la utilización de coordenadas.

En el plano se utilizan las coordenadas cartesianas abscisa y ordenada: (x,y) y en el elipsoide y la esfera las coordenadas esféricas latitud y longitud: (φ,λ) .

ELEMENTOS DIFERENCIALES EN EL ELIPSOIDE

Para avanzar en la formulación matemática de una proyección cartográfica, debemos analizar las expresiones que asumen los elementos diferenciales de las tres entidades geométricas relevantes: longitudes, ángulos y áreas.

Elemento lineal dl

En el cuadrilátero infinitesimal ABCD de la Fig. III - 1, es

$$AC = dl = \sqrt{AD^2 + DC^2}$$

A su vez, $AD = r \cdot d\lambda$ y $DC = AB = \rho \cdot d\varphi$ por lo tanto

$$dl = \sqrt{r^2 \cdot d\lambda^2 + \rho^2 \cdot d\varphi^2}$$

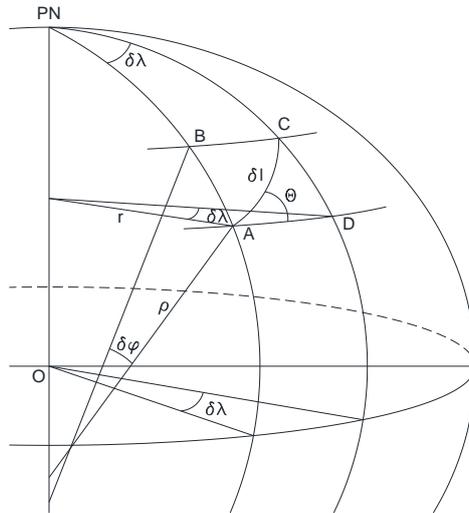


Fig. III - 1

Elemento angular θ

De la Fig. III - 1 surge $\tan \theta = \frac{DC}{AD} = \frac{\rho \cdot d\varphi}{r \cdot d\lambda}$

Elemento superficial ds

Finalmente, el elemento superficial es $ds = AD \cdot DC = \rho \cdot r \cdot d\varphi \cdot d\lambda = \rho \cdot N \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi \cdot d\lambda$

ELEMENTOS DIFERENCIALES EN EL PLANO

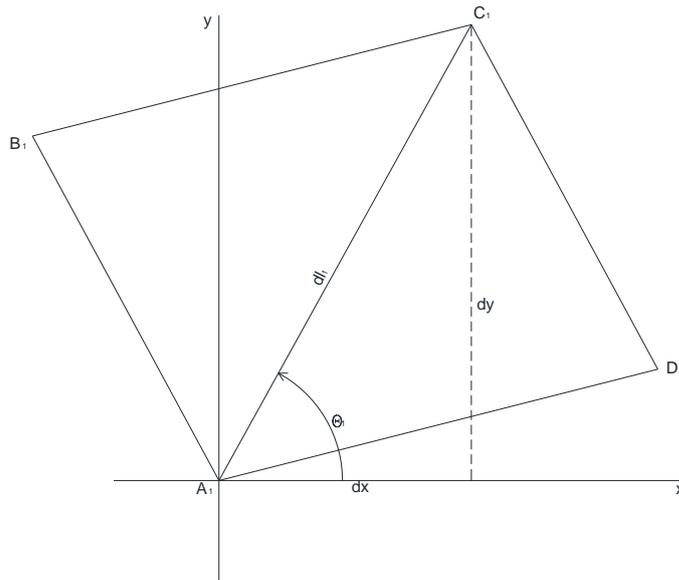


Fig. III - 2

En la Fig. III -2, los puntos A_1, B_1, C_1 y D_1 son los puntos homólogos en el plano, de los puntos $A, B, C,$ y D respectivamente en el elipsoide -Fig. III - 1-.

La correspondencia o proyección cartográfica queda determinada por las funciones f y g de modo tal que a un punto genérico del elipsoide $A(\varphi_A, \lambda_A)$, le corresponde su homólogo en el plano $A_1(x_{A_1}, y_{A_1})$ donde sus coordenadas vienen dadas por las relaciones

$$x_{A_1} = f(\varphi_A, \lambda_A)$$

$$y_{A_1} = g(\varphi_A, \lambda_A)$$

Elemento lineal dl_1

El elemento lineal dl_1 en el plano -Fig. III - 2- corresponde a la longitud del segmento A_1-C_1 .

Las coordenadas de C_1 son $C_1(x_{C_1}, y_{C_1})$ donde $x_{C_1} = x_{A_1} + dx$ e $y_{C_1} = y_{A_1} + dy$ por lo tanto $A_1 - C_1 = dl_1 = \sqrt{dx^2 + dy^2}$

Para calcular la expresión que asume dl_1 se realizan las diferenciales de las funciones de dos variables

$$x_{A_1} = f(\varphi_A, \lambda_A)$$

$$y_{A_1} = g(\varphi_A, \lambda_A)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} dx = \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda \\ dy = \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda \end{array} \right.$$

Sustituyendo estas expresiones en la formulación de dl_1 es

$$dl_1 = \sqrt{\left[\frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda \right]^2 + \left[\frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda \right]^2}$$

$$dl_1 = \sqrt{\left[\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 d\varphi^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 d\lambda^2 + 2 \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} \right) d\varphi d\lambda + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2 d\varphi^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2 d\lambda^2 + 2 \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right) d\varphi d\lambda \right]}$$

$$dl_1 = \sqrt{\left[\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2 \right] d\varphi^2 + \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2 \right] d\lambda^2 + 2 \left[\frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right] d\varphi d\lambda}$$

Hagamos los siguientes cambios de variables a los efectos de simplificar:

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda}$$

Por lo tanto, ahora dl_1 queda expresado de la forma

$$\sin \theta_{A_1}^{D_1} = \frac{D_1 D'_1}{A_1 D_1} = \frac{D_1 D'_1}{dl_{1p}} = \frac{\frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda}{\sqrt{G} d\lambda} = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial y}{\partial \lambda}$$

$$\cos \theta_{A_1}^{D_1} = \frac{A_1 D'_1}{A_1 D_1} = \frac{A_1 D'_1}{dl_{1p}} = \frac{\frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda}{\sqrt{G} d\lambda} = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial \lambda}$$

Nótese que $D_1 D'_1$ es la variación en la coordenada y cuando se produce un desplazamiento de A_1 hasta D_1 en el plano, exclusivamente por el desplazamiento de A hasta D en el elipsoide, sólo por la variación de λ (desplazamiento sobre un paralelo):

$$D_1 D'_1 = \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda$$

De igual forma, $A_1 D'_1$ es la variación en x

$$A_1 D'_1 = \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda$$

Razonando de forma análoga para el ángulo $\theta_{A_1}^{B_1}$ es

$$\sin \theta_{A_1}^{B_1} = \frac{A_1 B'_1}{A_1 B_1} = \frac{A_1 B'_1}{dl_{1m}} = \frac{\frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi}{\sqrt{E} d\varphi} = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial y}{\partial \varphi}$$

$$\cos \theta_{A_1}^{B_1} = \frac{B_1 B'_1}{A_1 B_1} = \frac{B_1 B'_1}{dl_{1m}} = \frac{\frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi}{\sqrt{E} d\varphi} = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial \varphi}$$

Elemento superficial ds_1

El elemento superficial corresponde al área del cuadrilátero $A_1 B_1 C_1 D_1$

$$ds_1 = A_1 B_1 \cdot A_1 D_1 \cdot \sin(\theta_{A_1}^{B_1} - \theta_{A_1}^{D_1})$$

Pero, $A_1 B_1 = \sqrt{E} d\varphi$ y $A_1 D_1 = \sqrt{G} d\lambda$ y, además

$$\sin(\theta_{A_1}^{B_1} - \theta_{A_1}^{D_1}) = \sin \theta_{A_1}^{B_1} \cos \theta_{A_1}^{D_1} - \cos \theta_{A_1}^{B_1} \sin \theta_{A_1}^{D_1}$$

Por lo tanto

$$ds_1 = \left[\frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{1}{\sqrt{G}} - \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \frac{1}{\sqrt{G}} \right] \sqrt{E} d\varphi \sqrt{G} d\lambda$$

$$ds_1 = \left[\frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} - \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right] d\varphi d\lambda$$

COEFICIENTES DE ANAMORFOSIS

Al proyectar la superficie terrestre representada por un elipsoide de revolución, sobre un plano, sabemos por el Postulado de Gauss que se producirán deformaciones o anamorfosis en los elementos lineales, angulares y superficiales.

Módulo de deformación lineal L

El módulo de deformación lineal L se calcula como el cociente entre el elemento de longitud dl_1 del plano y su homólogo dl en el elipsoide

$$L = \frac{dl_1}{dl} = \frac{\sqrt{Ed\varphi^2 + Gd\lambda^2 + 2Fd\varphi d\lambda}}{\sqrt{\rho^2 d\varphi^2 + r^2 d\lambda^2}}$$

Módulo de deformación angular A

El módulo de deformación angular A se calcula como la diferencia entre un ángulo en el plano θ_1 y su homólogo en elipsoide θ

$$A = \theta_1 - \theta \text{ siendo } \tan \theta_1 = \frac{dy}{dx} \text{ y } \tan \theta = \frac{\rho d\varphi}{rd\lambda}$$

Módulo de deformación superficial S

El módulo de deformación superficial S se calcula como el cociente entre un elemento de superficie ds_1 en el plano, y su homólogo ds en el elipsoide

$$S = \frac{ds_1}{ds} = \frac{\left[\frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} - \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right] d\varphi d\lambda}{\rho N \cos \varphi d\varphi d\lambda} = \frac{\left[\frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} - \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right]}{\underbrace{\rho N \cos \varphi}_r}$$

ELIPSE INDICATRIZ DE TISSOT

Se define a la Elipse Indicatriz de Tissot como el lugar geométrico de los puntos homólogos en el plano, correspondientes a los extremos de una familia de geodésicas del elipsoide, de longitud unitaria que tienen el otro extremo en un mismo punto.

En general, este lugar geométrico es una elipse.

Como ya hemos visto, el elemento de longitud en el plano viene dado por la expresión

$$dl_1 = \sqrt{Ed\varphi^2 + Gd\lambda^2 + 2Fd\varphi d\lambda}$$

Direcciones Principales

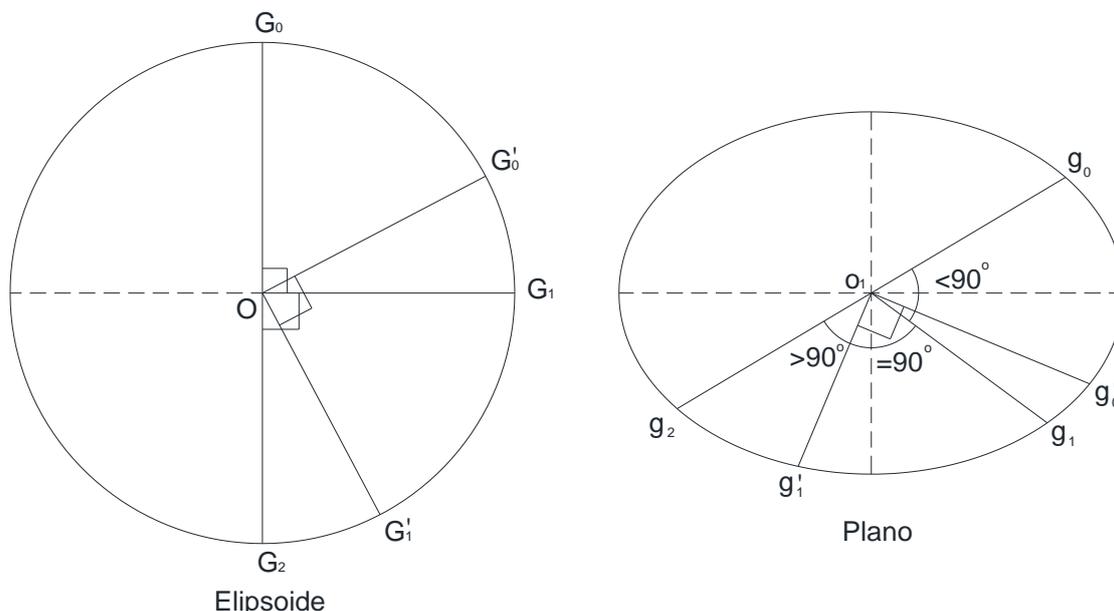


Fig. III - 4

Supongamos -Fig. III - 4- un círculo de radio unitario en el elipsoide, y los puntos homólogos en el plano, que en general se corresponden con una elipse denominada Elipse Indicatriz de Tissot.

Consideremos los arcos de geodésicas G_0OG_1 que en el elipsoide se cortan ortogonalmente. Los homólogos de dichos arcos en el plano son $g_0o_1g_1$ que en general formarán un ángulo distinto de 90° por la anamorfosis que se produce en los ángulos; supongamos que el ángulo $g_0o_1g_1 < 90^\circ$ (el razonamiento es el mismo si lo supusiéramos mayor).

Realicemos ahora un giro de 90° de las geodésicas en el elipsoide, de modo tal que G_0 pase a G_1 y G_1 pase a G_2 conservando el ángulo recto: $G_1OG_2 = 90^\circ$; de esta forma, G_0OG_2 están alineados. Al realizar esta operación, en el plano g_0 pasa a g_1 y g_1 pasa a g_2 , estando alineados $g_0o_1g_2$; como $g_0o_1g_1 < 90^\circ$ necesariamente $g_1o_1g_2 > 90^\circ$. Esto significa que los ángulos sustentados en o_1 pasan de ser menores de 90° a ser mayores de 90° en una variación continua por lo tanto en alguna posición, el ángulo en o_1 será igual a 90° . En la Fig. III - 4 hemos representado las geodésicas $G'_0OG'_1$ que son ortogonales a las que les corresponde en el plano los radios de la elipse de Tissot $g'_0o_1g'_1$ que también son ortogonales. De esta forma se ha demostrado que siempre existen dos direcciones perpendiculares en el elipsoide a las que les corresponden dos direcciones también perpendiculares en el plano. Nótese que la propiedad también cumple el recíproco, o sea que, dadas dos direcciones perpendiculares en el plano siempre existen dos direcciones homólogas en el elipsoide también perpendiculares. Estas direcciones se denominan "direcciones principales".

Teorema de Apolonio – Semidiámetros Conjugados

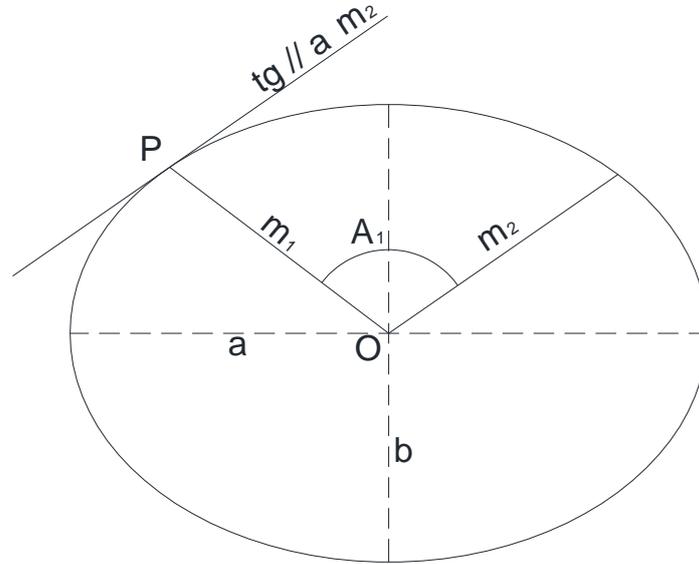


Fig. III - 5

A efectos de avanzar en el desarrollo conceptual de la Elipse Indicatriz de Tissot, es necesario introducir algunos conceptos.

Apolonio de Perge fue un astrónomo y matemático griego que vivió entre los años 262 y 190 A.C. Apolonio formuló en siguiente teorema (que no vamos a demostrar) que establece:

Dada una elipse de centro O y radios a y b -Fig. III - 5- consideremos un punto P de la misma y el semidiámetro m_1 por él; por P trazamos la tangente a la elipse, y consideremos el semidiámetro m_2 paralelo a la tangente. Los semidiámetros m_1 y m_2 se denominan semidiámetros conjugados y sustentan entre si un ángulo A_1 . Según el Teorema de Apolonio se cumple

$$m_1^2 + m_2^2 = a^2 + b^2$$

$$m_1 m_2 \sin A_1 = ab$$

Recordemos las expresiones a las que habíamos arribado para los módulos de deformación lineal para paralelos y meridianos

$$\text{Módulo de deformación meridiano } h = \frac{\sqrt{E}d\varphi}{\rho d\lambda} = \frac{1}{\rho} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2}$$

$$\text{Módulo de deformación paralelo } k = \frac{\sqrt{G}d\lambda}{rd\lambda} = \frac{1}{r} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2}$$

Sabemos además que

$$h = \frac{dl_1^m}{dl^m} \text{ pero como } dl^m = 1 \text{ por ser el círculo en el elipsoide de radio 1: } h = dl_1^m$$

$$k = \frac{dl_1^p}{dl^p} \text{ pero como } dl^p = 1 \text{ por ser el círculo en el elipsoide de radio 1: } k = dl_1^p$$

Cálculo de a y b

Apliquemos el Teorema de Apolonio a las direcciones principales.

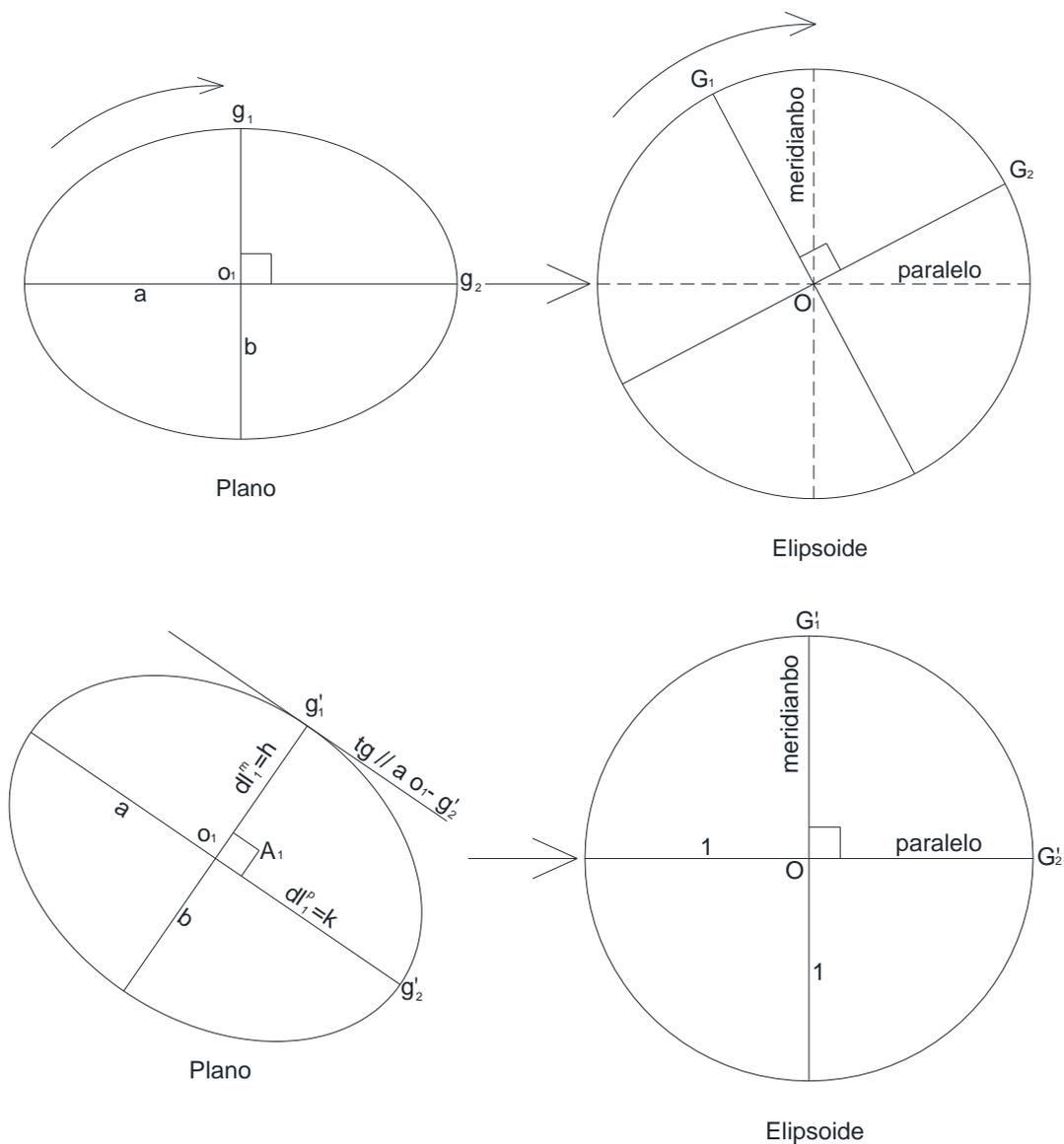


Fig. III - 6

Dadas las direcciones o_1g_1 y o_1g_2 -Fig. III - 6 - correspondientes a los semiejes mayor y menor de la elipse de Tissot, que se cortan ortogonalmente en el plano, hemos demostrado que siempre existen dos direcciones homólogas OG_1 y OG_2 en el círculo infinitesimal de radio 1 en el elipsoide que también se cortan ortogonalmente.

Realizamos un giro en la elipse de Tissot en el plano hasta que las direcciones en el elipsoide OG_1 y OG_2 se transforman en OG'_1 y OG'_2 coincidentes con las direcciones de los meridianos y de los paralelos. Al realizar este giro en la elipse de Tissot, las direcciones o_1g_1 y o_1g_2 se transforman en $o_1g'_1$ y $o_1g'_2$ que se corresponden con h , módulo de deformación meridiano, y k , módulo de deformación paralelo respectivamente.

Aplicando el Teorema de Apolonio a la elipse rotada es

$$h^2 + k^2 = a^2 + b^2$$

$$hk \sin A_1 = ab = hk$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{90^\circ}$

Recordemos la definición de módulo de deformación superficial S

$$S = \frac{ds_1}{ds} = \frac{\text{área elipse}}{\text{área círculo}}$$

$$S = \frac{\pi ab}{\pi dl^2} = \frac{\pi ab}{\pi \cdot 1} = ab$$

Por lo tanto, aplicando este resultado a las ecuaciones que surgen del Teorema de Apolonio es

$$h^2 + k^2 = a^2 + b^2$$

$$2ab = 2S$$

Sumando y restando miembro a miembro ambas ecuaciones

$$a^2 + b^2 + 2ab = h^2 + k^2 + 2S \Rightarrow (a + b)^2 = h^2 + k^2 + 2S$$

$$a^2 + b^2 - 2ab = h^2 + k^2 - 2S \Rightarrow (a - b)^2 = h^2 + k^2 - 2S$$

Pero además sabemos que

$$S = \frac{\frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} - \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda}}{\rho r}$$

$$h = \frac{1}{\rho} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2}$$

$$k = \frac{1}{r} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2}$$

Sustituyendo entonces en las expresiones anteriores

$$(a + b)^2 = \frac{1}{\rho^2} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 \right] + \frac{1}{r^2} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 \right] + 2 \frac{1}{\rho r} \left[\frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} - \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right]$$

$$(a - b)^2 = \frac{1}{\rho^2} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 \right] + \frac{1}{r^2} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 \right] - 2 \frac{1}{\rho r} \left[\frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} - \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right]$$

Operando y agrupando términos, es

$$(a + b)^2 = \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial x}{\partial \lambda} \right]^2 + \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial x}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right]^2$$

$$(a - b)^2 = \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right]^2 + \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial x}{\partial \lambda} \right]^2$$

Verifiquemos la veracidad de esta simplificación, partiendo del resultado y arribando a la expresión de partida

$$(a + b)^2 = \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial x}{\partial \lambda} \right]^2 + \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial x}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right]^2$$

Desarrollando

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2 + 2 \frac{1}{\rho r} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 - 2 \frac{1}{\rho r} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2 \\ &= \frac{1}{\rho^2} \left[\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 \right] + \frac{1}{r^2} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2 \right] + \frac{2}{\rho r} \left[\frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} - \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right] \text{ l.q.q.d.} \end{aligned}$$

De igual forma, se demuestra la validez para $(a - b)^2$

Con estas expresiones de $(a + b)^2$ y $(a - b)^2$ se pueden determinar a y b

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = m$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = n$$

En las expresiones anteriores, m y n son datos que están en función de las derivadas parciales de x y de y respecto de φ y de λ , y de elipsoide de referencia (ρ y r)

$$m - n = 4ab \Rightarrow \frac{m - n}{4} = ab \Rightarrow \frac{(m - n)^2}{16} = a^2 b^2 = p$$

$$m + n = 2a^2 + 2b^2 \Rightarrow \frac{m + n}{2} = a^2 + b^2 = s$$

Siendo p el producto y s la suma de a^2 y b^2 .

Sabemos que con la suma y el producto de las raíces se pueden calcular las mismas mediante una ecuación de segundo grado

$$x^2 - sx + p = 0$$

$$x = \frac{s \pm \sqrt{s^2 - 4p}}{2}$$

$$a^2 = \frac{s + \sqrt{s^2 - 4p}}{2}$$

$$b^2 = \frac{s - \sqrt{s^2 - 4p}}{2}$$

pues $a > b$.

$$\text{por lo tanto } a = \frac{\sqrt{s + \sqrt{s^2 - 4p}}}{\sqrt{2}} \text{ y } b = \frac{\sqrt{s - \sqrt{s^2 - 4p}}}{\sqrt{2}}$$

Aplicación de la elipse de Tissot para el cálculo de las alteraciones

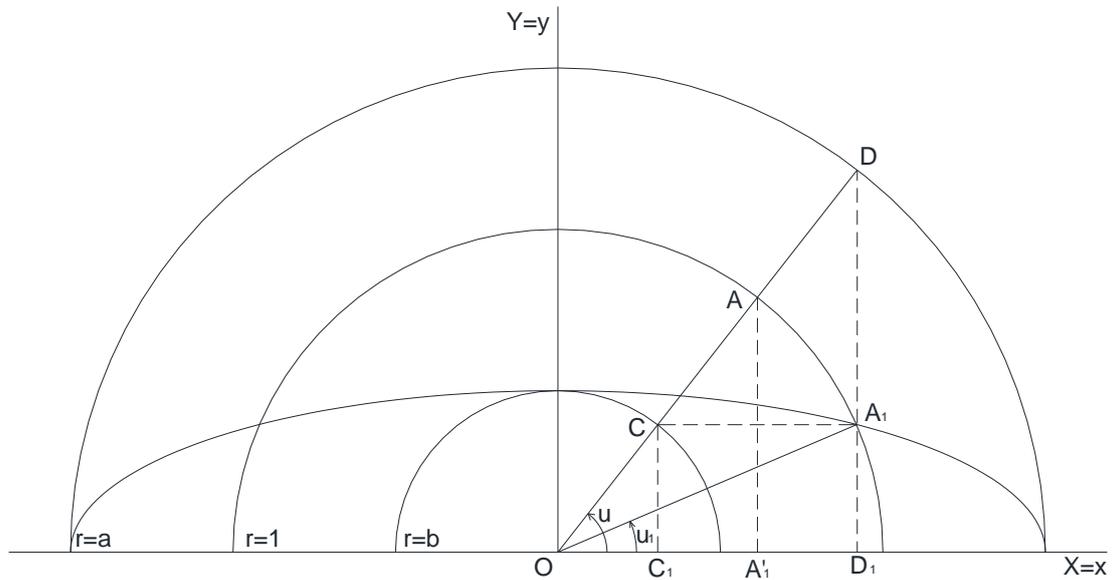


Fig. III - 7

Consideremos un punto A(X,Y) de la circunferencia infinitesimal de radio unitario sobre el elipsoide y su homólogo A₁(x,y) sobre la elipse indicatriz de Tissot en el plano -Fig. III - 7-

Trataremos de identificar una construcción geométrica que nos permita determinar la correspondencia entre puntos homólogos del círculo infinitesimal de radio unitario en el elipsoide, y los correspondientes en la elipse de Tissot en el plano.

La ecuación de la elipse es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

y la de la circunferencia

$$X^2 + Y^2 = 1$$

Igualando miembro a miembro ambas ecuaciones, se cumple

$$\frac{x^2}{a^2} = X^2 \Rightarrow x = aX$$

$$\frac{y^2}{b^2} = Y^2 \Rightarrow y = bY$$

Busco entonces realizar una construcción geométrica que cumpla $x = aX$ e $y = bY$

En la Fig. III - 7 tenemos una circunferencia de radio OA=1 que pertenece al elipsoide. Por otro lado, tenemos una circunferencia de radio OD=a, semidiámetro mayor de la elipse de Tissot, y otra circunferencia de radio OC=b, semidiámetro menor.

Por la semejanza de los triángulos ODD₁ y OAA'₁ se cumple

$$\frac{OD_1}{OD} = \frac{OA'_1}{OA} \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{X}{1} \Rightarrow x = aX$$

y por la semejanza de los triángulos OAA'₁ y OCC₁ es

$$\frac{CC_1}{OC} = \frac{AA_1'}{OA} \Rightarrow \frac{y}{b} = \frac{Y}{1} \Rightarrow y = bY$$

Hemos probado entonces que la construcción de la Fig. III - 7 cumple con las condiciones establecidas $x = aX$ e $y = bY$

Cálculo de la alteración lineal

Continuando con el análisis de la Fig. III - 7, vemos que se cumple

$$X = \cos u \text{ e } Y = \sin u$$

y también

$$x = a \sin u \text{ e } y = b \cos u$$

Por otro lado, sabemos que el módulo de deformación lineal es

$L = \frac{dl_1}{dt}$ siendo dl_1 el semidiámetro de la elipse: $dl_1 = OA_1$, y de forma genérica

$dl_1^2 = x^2 + y^2$ por tanto, dl_1 es el segmento del plano en que se transforma el segmento unitario $dl=1$ del elipsoide

$$L^2 = dl_1^2 \Rightarrow L = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{a^2(\cos u)^2 + b^2(\sin u)^2}$$

Cálculo de la alteración angular

De la Fig. III - 7 surge

$$(1) a \cos u = 1. \cos u_1$$

$$(2) b \sin u = 1. \sin u_1$$

Multiplicando ambos miembros de la ecuación (1) por $\sin u$ y la ecuación (2) por $\cos u$,

$$(3) a \cos u \sin u = \cos u_1 \sin u$$

$$(4) b \sin u \cos u = \sin u_1 \cos u$$

Restando (4)-(3)

$$(b - a) \sin u \cos u = \sin u_1 \cos u - \cos u_1 \sin u$$

Pero recordando las relaciones trigonométricas es

$$\sin u \cos u = \frac{1}{2} \sin(2u)$$

$$\sin u_1 \cos u - \cos u_1 \sin u = \sin(u_1 - u)$$

Por lo tanto

$$(5) (b - a) \sin 2u = 2 \sin(u_1 - u) = -(a - b) \sin 2u$$

Ahora, sumando (3) y (4)

$$(a + b) \sin u \cos u = \sin u_1 \cos u + \cos u_1 \sin u$$

y recordando la relación trigonométrica

$$\sin u_1 \cos u + \cos u_1 \sin u = \sin(u_1 + u)$$

es

$$(6)(a + b) \sin 2u = 2 \sin(u_1 + u)$$

Finalmente, dividiendo (5)/(6)

$$\frac{2 \sin(u_1 - u)}{2 \sin(u_1 + u)} = - \frac{(a - b) \sin 2u}{(a + b) \sin 2u}$$

$$\sin(u_1 - u) = - \frac{(a - b)}{(a + b)} \sin(u_1 + u)$$

Si llamamos $\Delta u = u_1 - u$ que tiende a 0, implica que $\sin \Delta u \cong \Delta u$, por lo tanto

$$(7)\Delta u = - \frac{(a - b)}{(a + b)} \sin(u_1 + u)$$

El valor absoluto máximo de Δu se produce cuando $\sin(u_1 + u) = \pm 1$ o sea $u_1 + u = 90^\circ$ o 270°

Por lo tanto

$$\Delta u_{MÁX} = - \frac{a - b}{a + b}$$

Cálculo de la alteración superficial

Como ya hemos visto antes

$$S = \frac{ds_1}{ds} = \frac{\text{área elipse}}{\text{área círculo}} = \frac{\pi ab}{\pi d^2} = \frac{ab}{d^2} = ab$$

De este modo hemos determinado los valores de a , b , h , k , S , Δu y L .

CONDICIONES DE CONFORMIDAD DE CAUCHY – RIEMANN

Para que una proyección sea conforme, un círculo sobre el elipsoide deberá transformarse en otro círculo sobre el plano. O sea, se trata de que no existan diferencias en los ángulos homólogos lo que equivale a decir que en la ecuación (7), $\Delta u = 0$.

Ello implica que $(a-b)=0$ o sea $a=b$

Apliquemos esta condición a la expresión de $(a - b)^2$ vista anteriormente

$$(a - b)^2 = \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right]^2 + \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial x}{\partial \lambda} \right]^2$$

Por lo tanto

$$0 = \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right]^2 + \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial x}{\partial \lambda} \right]^2$$

Como se trata de que la suma de dos términos positivos (ambos elevados al cuadrado) sea cero deben ser cero ambos términos simultáneamente

$$\left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right]^2 = 0$$

y

$$\left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial x}{\partial \lambda} \right]^2 = 0$$

Por lo tanto, para que se cumplan las condiciones de conformidad de Cauchy – Riemann, debe cumplirse simultáneamente

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\rho} \frac{\partial x}{\partial \varphi} = - \frac{1}{r} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial x}{\partial \lambda} \end{array} \right.$$

IV – PROYECCIONES PLANAS

Las proyecciones planas son proyecciones cartográficas en las que, como lo expresa su nombre, la superficie subjetiva es un plano. En general este tipo de proyecciones se utilizan para realizar representaciones de grandes porciones de la superficie terrestre, por ejemplo de todo un hemisferio y por lo tanto se trabaja con escalas muy pequeñas, por ejemplo del orden de 1:40.000.000. Esto habilita a que, sin perder precisión cartográfica, podamos considerar a la superficie objetiva que representa a la Tierra, como una esfera en vez de un elipsoide de revolución. Esto simplifica significativamente los cálculos necesarios para realizar las proyecciones. Pero, ¿qué criterio es el que legitima esta simplificación?

En cartografía se utiliza un concepto que es el de la “apreciación gráfica”. Con él se define la menor separación entre dos puntos dibujados que un usuario estándar puede reconocer a simple vista como separados cuando lee una carta; si los puntos estuvieran más cerca, aunque en la carta siguieran estando separados, nuestros ojos los verían como uno sólo. El estándar para esta menor separación es de 1/4mm o sea 0,00025m. Para saber cuánto representa en el terreno esta magnitud de la apreciación gráfica debemos multiplicarla por la escala de la carta. Si como habíamos comentado, es usual en este tipo de proyecciones trabajar con escalas muy pequeñas, del orden de 1:40.000.000, la apreciación gráfica en el terreno sería

$$0.00025 \times 40:000.000 = 10.000m$$

ello significa que todos los puntos que se encuentren en un entorno de 10km, a estas escalas nuestros ojos los percibirán como uno sólo.

Para un mismo punto, las diferencias en las coordenadas resultantes de utilizar como superficie objetiva una esfera o un elipsoide, están muy por debajo de la apreciación gráfica (10.000m) por lo tanto nuestros ojos los verán siempre como un mismo punto por lo que resulta innecesario utilizar el elipsoide pudiendo simplificar los cálculos utilizando la esfera.

En esta categoría de proyecciones planas, el plano de proyección o “plano de cuadro”, es tangente a la esfera en un punto denominado “polo de la proyección”. Se establecen asimismo tres condiciones que deben cumplir estas proyecciones:

- 1- La superficie objetiva que representa a la Tierra será una esfera como ya se ha argumentado.
- 2- Los círculos máximos que pasan por el polo de la proyección se representarán como rectas que conservan los acimuts.
- 3- Los puntos de la superficie objetiva que equidistan del polo de la proyección, se representarán en el plano por circunferencias con centro en la representación del polo de la proyección.

PROYECCIÓN PLANA MODO POLAR

Vamos a construir la Ley General de la Proyección Plana en su modo Polar

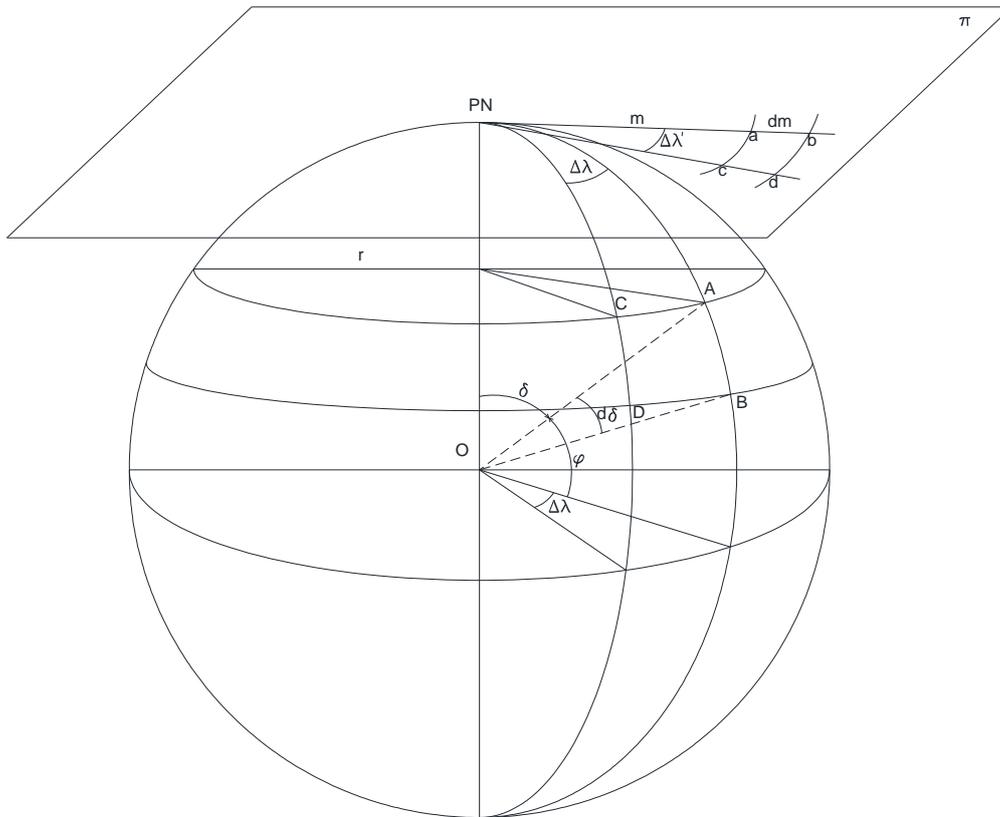


Fig. IV - 1

Consideremos sobre la superficie de la esfera un cuadrilátero infinitesimal ABCD definido por arcos de meridianos y paralelos -Fig. VI - 1-, y un plano π tangente en el polo terrestre PN. En este caso por tratarse de la modalidad polar, los círculos máximos que pasan por el polo de la proyección son meridianos y el acimut entre ellos es la diferencia de longitudes $\Delta\lambda$. Conforme a lo visto más arriba respecto de las condiciones que deben cumplir estas proyecciones, las representaciones en el plano de los meridianos serán rectas que pasan por el polo de la proyección y sustentan entre sí un ángulo $\Delta\lambda'$ que será igual a $\Delta\lambda$.

Por otro lado, los arcos de paralelos AC y BD se representarán por arcos de circunferencias ac y bd concéntricos y con centro en PN.

Usualmente en estas proyecciones se trabaja con la colatitud δ siendo $\delta=90^\circ-\varphi$.

Si r es el radio del paralelo AC y R el radio de la esfera modelo se cumple

$r = R \sin \delta$ y llamado $m = PN-a$, a la distancia polar, m será función de la colatitud, por lo que la Ley de la Proyección Plana Polar será

$$m = f(\delta)$$

$$\Delta\lambda' = \Delta\lambda$$

Coefficientes de anamorfosis

Partiendo de la Ley de la Proyección Plana Polar vamos a determinar la expresión que asumen los distintos coeficientes de anamorfosis o deformación.

Coefficiente de deformación transversal o paralela α

Este coeficiente expresa la deformación que se produce sobre los paralelos en esta proyección

$$\alpha = \frac{ac}{AC} = \frac{md\lambda}{rd\lambda} = \frac{m}{R \sin \delta}$$

Coefficiente de deformación meridiano β

Este coeficiente expresa la deformación que se produce sobre los meridianos en esta proyección

$$\beta = \frac{ab}{AB} = \frac{dm}{Rd\delta}$$

Coefficiente de deformación superficial μ

Este coeficiente expresa la deformación que se produce sobre las áreas de las pequeñas figuras

$$\mu = \frac{ab \cdot ac}{AB \cdot AC} = \alpha \cdot \beta = \frac{mdm}{R^2 \sin \delta d\delta}$$

Coefficiente de deformación angular

Este coeficiente expresa la deformación que se produce sobre ángulos en esta proyección

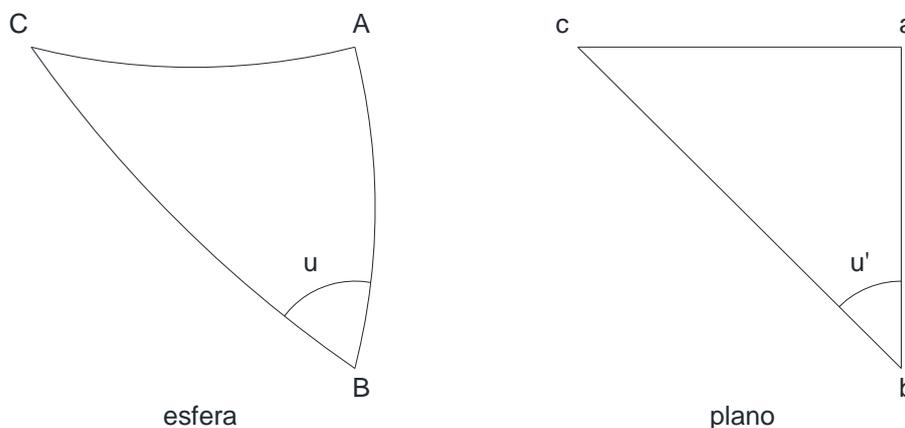


Fig. IV - 2

Sea un triángulo infinitesimal ABC sobre la esfera y su homólogo abc sobre el plano -Fig. IV - 2. Al realizar la proyección, el triángulo u se transforma en u'.

Si la proyección fuera conforme, es decir que se conservaran los ángulos, entonces $u=u'$ y, por lo tanto, $\tan u = \tan u'$

$$\tan u = \frac{AC}{AB} \text{ y } \tan u' = \frac{ac}{ab}$$

por lo tanto

$\frac{AC}{AB} = \frac{ac}{ab} \Rightarrow \frac{ab}{AB} = \frac{ac}{AC}$ o sea $\beta = \alpha$ que es la condición de conformidad.

Regresando al análisis del coeficiente de deformación angular, hagamos el cociente entre las tangentes

$$\frac{\tan u'}{\tan u} = \frac{ac AB}{ab AC} = \frac{\alpha}{\beta}$$

Operando y aplicando la relación algebraica que no demostraremos y que establece

$$\text{Si } \frac{p}{q} = \frac{m}{n}, \text{ se cumple } \frac{p-q}{p+q} = \frac{m-n}{m+n}$$

en nuestro caso queda

$$\frac{\tan u' - \tan u}{\tan u' + \tan u} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}$$

Pero a su vez, sabemos por las relaciones de la trigonometría que se cumple

$$\tan u' \pm \tan u = \frac{\sin(u' \pm u)}{\cos u' \cos u}$$

Y aplicando esta propiedad a nuestra relación es

$$\frac{\sin(u' - u) \cos u' \cos u}{\cos u' \cos u \sin(u' + u)} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}$$

$$\sin(u' - u) = \sin(u' + u) \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}$$

Si llamamos $\Delta u = u' - u$ y considerando que en general es un valor muy pequeño, y por tanto podemos asimilar el seno al arco, $\sin \Delta u \cong \Delta u$ es

$$\Delta u = \sin(u' + u) \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}$$

El valor absoluto máximo que alcanza esta expresión es cuando $\sin(\Delta u) = \pm 1$ o sea cuando $(u' + u) = \pm \pi/2$ por tanto $u' = \pi/2 - u$ o $u' = u - \pi/2$. Llamando Δu_{MAX} a este valor es

$$\Delta u_{MAX} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}$$

PROYECCIÓN PLANA POLAR EQUIDISTANTE MERIDIANA

En esta proyección se establece la condición de que las longitudes sobre los meridianos no tengan deformaciones; con esta imposición determinemos la expresión que adquiere la Ley $m = f(\delta)$

La condición de equidistancia meridiana significa que $\beta=1$

$$\frac{ab}{AB} = \beta = 1$$

$$\beta = \frac{dm}{Rd\delta} = 1 \Rightarrow dm = Rd\delta$$

Integrando ambos miembros de la última igualdad es

$$\int dm = R \int d\delta \Rightarrow m + C_1 = R\delta + C_2$$

Llamando $C = C_2 - C_1$ a la constante de integración es $m = R\delta + C$

Dado que la expresión de m precedente debe cumplirse para todos los valores de δ , para determinar el valor de la constante de integración C aplicamos el criterio denominado "condiciones de borde" asignándole un valor singular a δ

$$m = R\delta + C \Rightarrow \text{si } \delta = 0 \text{ se trata del Polo entonces } m = 0 \Rightarrow C = 0$$

Por lo tanto, la expresión definitiva de la Ley es

$$m = R\delta$$

$$\Delta\lambda' = \Delta\lambda$$

Construcción del canevas

Consideremos -Fig. IV - 3- los paralelos que pasan por A y por B y se encuentran equiespaciados en colatitudes (por ejemplo $\delta_A = 30^\circ$ y $\delta_B = 60^\circ$)

Según la Ley de la proyección, las circunferencias que representan a dichos paralelos serán concéntricas y equiespaciadas pues sus radios varían linealmente respecto de la colatitud: $m = R\delta$ que corresponde al desarrollo del arco de colatitud δ : PN-A

Por otra parte, los meridianos, por ser círculos máximos que pasan por el polo de la proyección, se representarán por rectas que pasan por la representación del polo en el plano, y que conservan las diferencias de acimuts, en este caso las diferencias de longitudes $\Delta\lambda' = \Delta\lambda$

La expresión cartesiana de la ley para un punto genérico $P(\delta; \Delta\lambda)$ será

$$X_p = m \sin \Delta\lambda = R\delta \sin \Delta\lambda$$

$$Y_p = m \cos \Delta\lambda = R\delta \cos \Delta\lambda$$

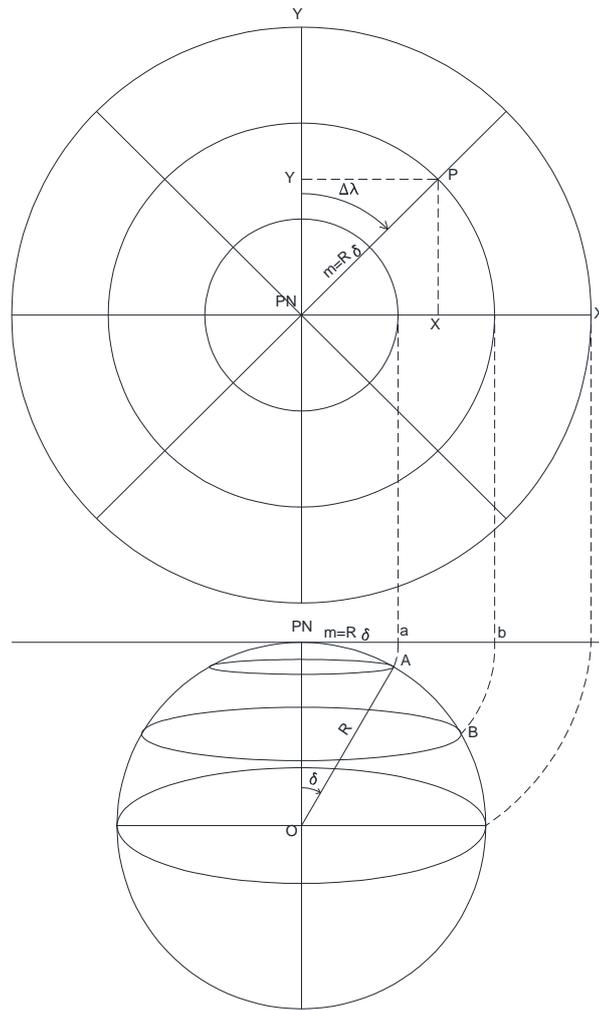


Fig. IV - 3

Coefficientes de anamorfosis

Calculemos para esta proyección la expresión que asumen los diferentes coeficientes de anamorfosis

Coefficiente de deformación transversal o paralela

Recordemos la expresión de dicho coeficiente

$$\alpha = \frac{m}{R \sin \delta} = \frac{R\delta}{R \sin \delta} = \frac{\delta}{\sin \delta}$$

Coefficiente de deformación superficial

Recordemos la expresión de dicho coeficiente

$$\mu = \alpha \cdot \beta = \alpha \cdot 1 = \frac{\delta}{\sin \delta}$$

Deformación angular máxima

Recordemos la expresión de dicho coeficiente

$$\Delta u_{MAX} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} = \frac{\frac{\delta}{\sin \delta} - 1}{\frac{\delta}{\sin \delta} + 1} = \frac{\delta - \sin \delta}{\delta + \sin \delta}$$

PROYECCION PLANA POLAR EQUIDISTANTE TRANSVERSAL O PARALELA

En esta proyección se establece la condición de que las longitudes sobre los paralelos no tengan deformaciones; con esta imposición determinemos la expresión que adquiere la Ley $m = f(\delta)$

La condición de equidistancia transversal o paralela significa que $\alpha=1$

$$\alpha = \frac{m}{R \sin \delta} = 1$$

$$m = R \sin \delta$$

$$\Delta \lambda' = \Delta \lambda$$

Construcción del canevas

Consideremos al igual que en el caso anterior los paralelos que pasan por A y por B y se encuentran equiespaciados en colatitudes por ejemplo $\delta_A = 30^\circ$ y $\delta_B = 60^\circ$ -Fig. IV - 4-

Según la Ley de la proyección, las circunferencias que representan a dichos paralelos serán concéntricas y sus radios varían en función del seno de la colatitud: $m = R \sin \delta$ por lo tanto, a medida que nos aproximamos al ecuador, la distancia entre los paralelos se irá acortando. Como se observa, la distancia polar m es el radio del paralelo que pasa por A: QA por lo que la proyección resulta ser ortográfica.

Por otra parte, los meridianos, por ser círculos máximos que pasan por el polo de la proyección, se representarán por rectas que pasan por la representación del polo en el plano, y que conservan las diferencias de acimuts, en este caso las diferencias de longitudes $\Delta \lambda' = \Delta \lambda$

La expresión cartesiana de la ley para un punto genérico $P(\delta; \Delta \lambda)$ será

$$X_p = m \sin \Delta \lambda = R \sin \delta \sin \Delta \lambda$$

$$Y_p = m \cos \Delta \lambda = R \sin \delta \cos \Delta \lambda$$

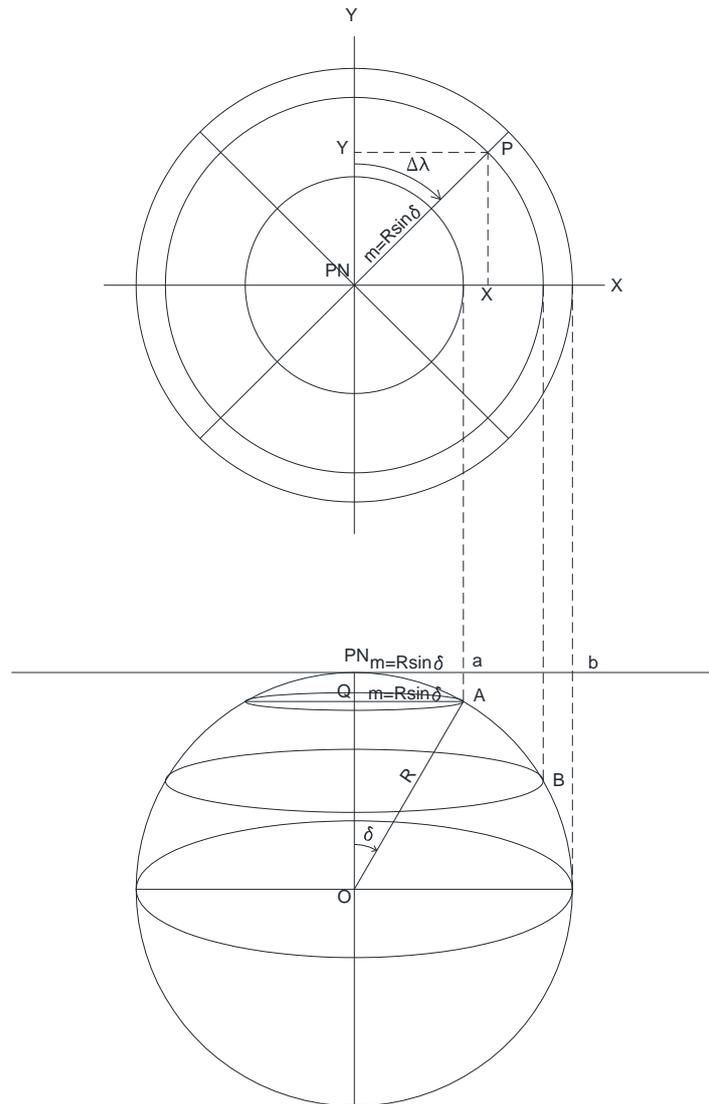


Fig. IV - 4

Coefficientes de anamorfosis

Calculemos para esta proyección la expresión que asumen los diferentes coeficientes de anamorfosis

Coefficiente de deformación meridiana

Recordemos la expresión de dicho coeficiente

$$\beta = \frac{dm}{Rd\delta}$$

Pero como $m = R \sin \delta$ diferenciando resulta $dm = R \cos \delta d\delta$

Por tanto

$$\beta = \frac{R \cos \delta d\delta}{Rd\delta} = \cos \delta$$

Coefficiente de deformación superficial

Recordemos la expresión de dicho coeficiente

$$\mu = \alpha \cdot \beta = 1 \cdot \beta = \cos \delta$$

Deformación angular máxima

Recordemos la expresión de dicho coeficiente

$$\Delta u_{MAX} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} = \frac{1 - \beta}{1 + \beta} = \frac{1 - \cos \delta}{1 + \cos \delta} = \frac{2(\sin \frac{\delta}{2})^2}{2(\cos \frac{\delta}{2})^2} = (\tan \frac{\delta}{2})^2$$

PROYECCION PLANA POLAR EQUIVALENTE

En esta proyección se establece la condición de que las áreas de las pequeñas figuras no tengan deformaciones; con esta imposición determinemos la expresión que adquiere la Ley $m = f(\delta)$.

La condición de equivalencia significa que $\mu=1$

$$\mu = \alpha \cdot \beta = \frac{mdm}{R^2 \sin \delta d\delta} = 1$$

$$mdm = R^2 \sin \delta d\delta$$

Integrando ambos términos de la igualdad es

$$\int mdm = R^2 \int \sin \delta d\delta$$

$$\frac{1}{2}m^2 + C_1 = -R^2 \cos \delta + C_2$$

Llamando $C = C_2 - C_1$ a la constante de integración es

$$\frac{1}{2}m^2 = -R^2 \cos \delta + C$$

Dado que la expresión de m precedente debe cumplirse para todos los valores de δ , para determinar el valor de la constante de integración C aplicamos el criterio denominado "condiciones de borde" asignándole un valor singular a δ

$$\frac{1}{2}m^2 = -R^2 \cos \delta + C; \text{ si } \delta = 0 \text{ se trata del polo por tanto } m = 0$$

$$0 = -R^2 + C \Rightarrow C = R^2$$

Por lo tanto, la expresión definitiva de la Ley es

$$\frac{1}{2}m^2 = R^2(1 - \cos \delta) = 2R^2(\sin \frac{\delta}{2})^2 \Rightarrow m^2 = 4R^2(\sin \frac{\delta}{2})^2$$

$$m = 2R \sin \frac{\delta}{2}$$

$$\Delta\lambda' = \Delta\lambda$$

Construcción del canevas

Consideremos los paralelos que pasan por A y por B y se encuentran equiespaciados en colatitudes por ejemplo $\delta_A = 30^\circ$ y $\delta_B = 60^\circ$ -Fig. IV - 5-

Según la Ley de la proyección, las circunferencias que representan a dichos paralelos serán concéntricas y sus radios varían en función del seno de la colatitud: $m = 2R \sin \frac{\delta}{2}$ por lo tanto a medida que nos aproximamos al ecuador, la distancia entre los paralelos se irá acortando. Como se observa, la distancia polar m es igual a la longitud de la cuerda PN-A por lo que, para representarla en el plano se debe realizar el abatimiento de dicha cuerda con centro en el PN.

Por otra parte, los meridianos, por ser círculos máximos que pasan por el polo de la proyección, se representarán por rectas que pasan por la representación del polo en el plano, y que conservan las diferencias de acimuts, en este caso las diferencias de longitudes $\Delta\lambda' = \Delta\lambda$

La expresión cartesiana de la ley para un punto genérico $P(\delta; \Delta\lambda)$ será

$$X_p = m \sin \Delta\lambda = 2R \sin \frac{\delta}{2} \sin \Delta\lambda$$

$$Y_p = m \cos \Delta\lambda = 2R \sin \frac{\delta}{2} \cos \Delta\lambda$$

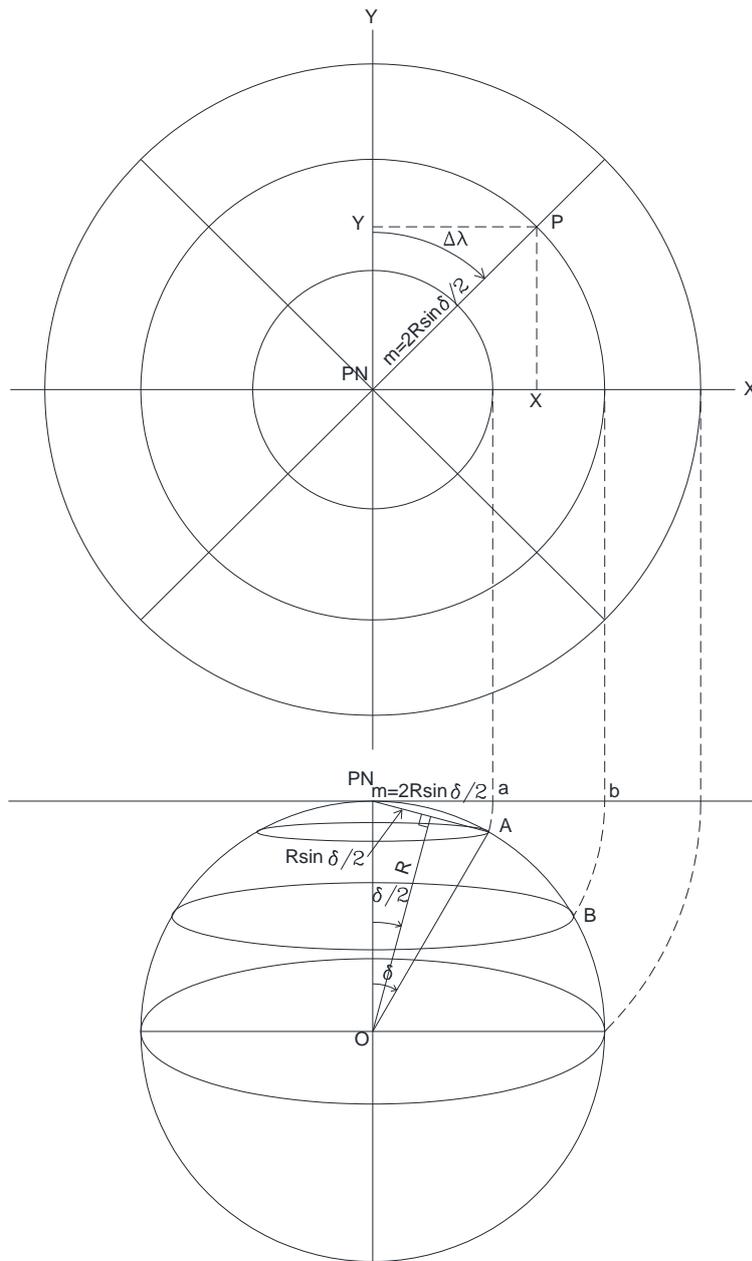


Fig. IV - 5

Coefficientes de anamorfosis

Calculemos para esta proyección la expresión que asumen los diferentes coeficientes de anamorfosis

Coefficiente de deformación meridiana

Recordemos la expresión de dicho coeficiente

$$\beta = \frac{dm}{Rd\delta}$$

Pero como $m = 2R \sin \frac{\delta}{2}$ diferenciando resulta $dm = \frac{1}{2} 2R \sin \frac{\delta}{2} d\delta = R \cos \frac{\delta}{2} d\delta$

Por tanto

$$\beta = \frac{R \cos \frac{\delta}{2} d\delta}{R d\delta} = \cos \frac{\delta}{2}$$

Coefficiente de deformación transversal o paralela

Recordemos que para esta proyección hemos impuesto que

$$\mu = \alpha \cdot \beta = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\cos \frac{\delta}{2}} = \sec \frac{\delta}{2}$$

Deformación angular máxima

Recordemos la expresión de dicho coeficiente

$$\Delta u_{MAX} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} = \frac{\alpha(1 - \frac{\beta}{\alpha})}{\alpha(1 + \frac{\beta}{\alpha})}$$

Pero

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\cos \frac{\delta}{2}}{\frac{1}{\cos \frac{\delta}{2}}} = (\cos \frac{\delta}{2})^2$$

Por lo tanto

$$\Delta u_{MAX} = \frac{1 - (\cos \frac{\delta}{2})^2}{1 + (\cos \frac{\delta}{2})^2} = \frac{(\sin \frac{\delta}{2})^2}{1 + (\cos \frac{\delta}{2})^2}$$

PROYECCION PLANA EQUIDISTANTE ACIMUTAL

En este caso el plano π de proyección es tangente a la Tierra en un punto $O(\delta_0; \lambda_0)$ con $\delta_0 \neq 0^\circ$ y de 90° -Fig. IV - 6-.

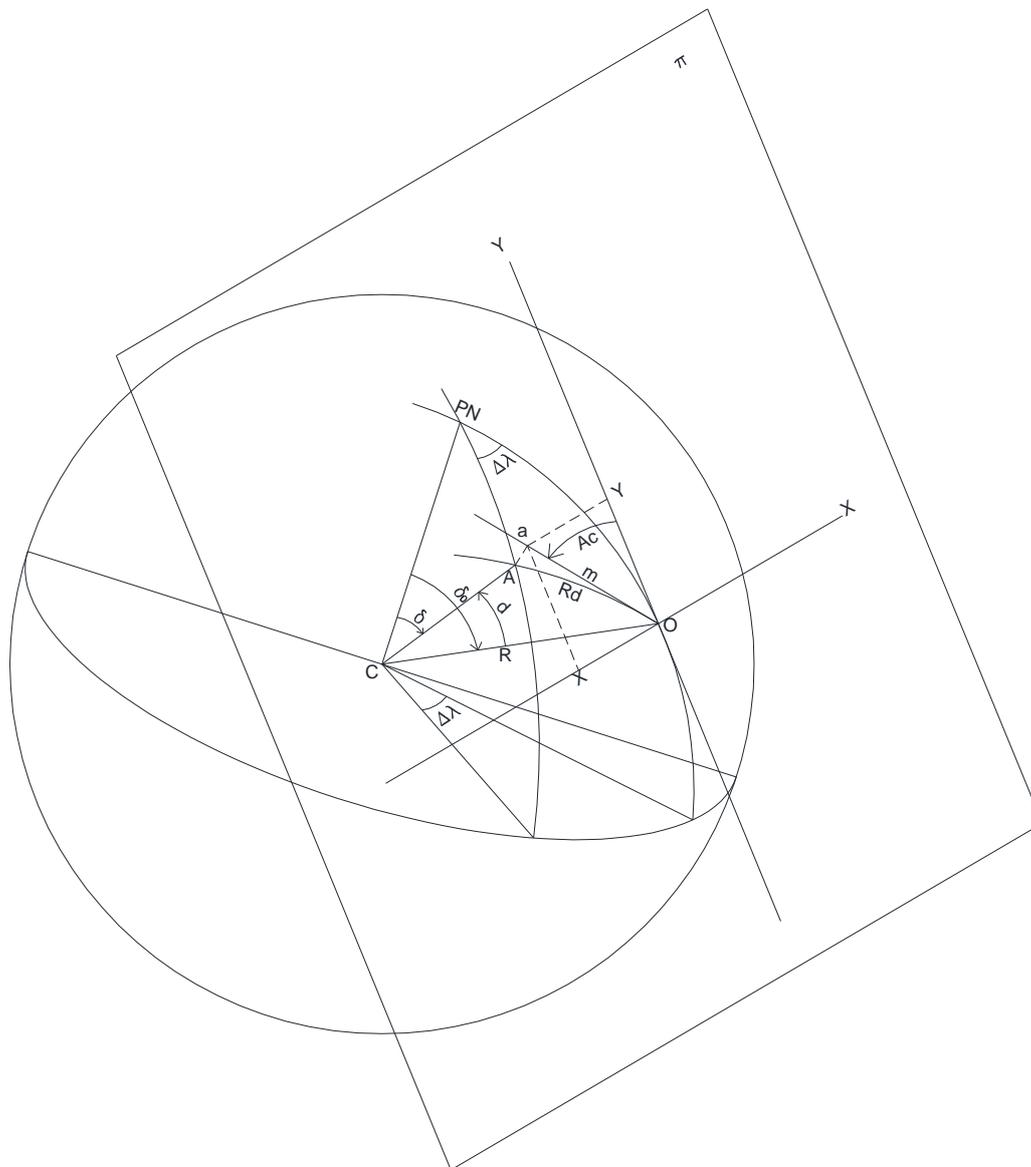


Fig. IV - 6

Se cumple también en esa proyección, la premisa que, los círculos máximos que pasan por el polo de la proyección O, se representan en el plano π por rectas que pasan por dicho polo y conservan los acimuts. Por lo tanto, el meridiano que pasa por O, PN-O, se representa en el plano por la recta OY que asumiremos como el eje de las ordenadas en el plano π . Asimismo, el círculo máximo que pasa por A, OA, se representa en el plano por la recta Oa que conserva el acimut Ac.

Finalmente, el meridiano que pasa por un punto genérico A(δ ; λ) de la esfera forma con el que pasa por O un ángulo $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$ que es la diferencia de longitudes.

Como hemos visto, por tratarse de una proyección equidistante acimutal, la longitud del arco de círculo máximo $OA = Rd$, correspondiente al ángulo al centro de la esfera d , debe ser igual a la longitud del segmento $Oa = m$ en el plano, y también debe ser igual el acimut en el plano Ac' al acimut en la esfera Ac; por lo tanto la expresión genética de la Ley de esta proyección es

$$m=Rd$$

$$Ac'=Ac$$

Y la expresión cartesiana de dicha Ley será -Fig. IV - 6-

$$X = Rd \sin Ac$$

$$Y = Rd \cos Ac$$

Para calcular la expresión que asumen las variables de la Ley, d y Ac , veamos en detalle el triángulo esférico PN,O,A , -Fig. IV - 7- y consideremos las ecuaciones derivadas del Grupo de Bessel.

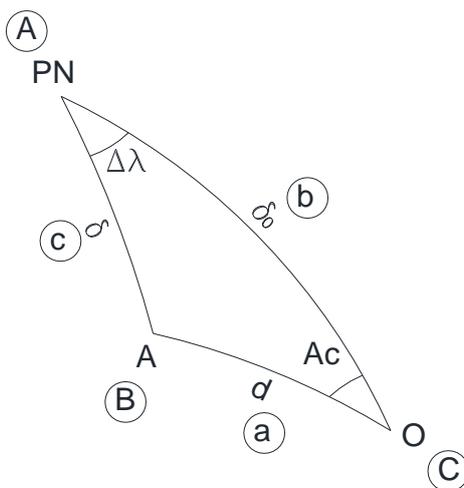


Fig. IV - 7

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

$$\cot c \sin b = \cot C \sin A + \cos A \cos b$$

Aplicando estas ecuaciones al triángulo esférico de la Fig. IV - 7 es

$$\cos d = \cos \delta_0 \cos \delta + \sin \delta_0 \sin \delta \cos \Delta\lambda$$

$$\cot \delta \sin \delta_0 = \cot Ac \sin \Delta\lambda + \cos \Delta\lambda \cos \delta_0$$

Y expresando estas ecuaciones en función de φ y φ_0 y despejando $\cot Ac$ es

$$\cos d = \sin \varphi_0 \sin \varphi + \cos \varphi_0 \cos \varphi \cos \Delta\lambda$$

$$\cot Ac = \frac{\tan \varphi \cos \varphi_0 - \cos \Delta\lambda \sin \varphi_0}{\sin \Delta\lambda}$$

Construcción del canevas

Para mantener la condición de biunívocas de las proyecciones cartográficas, la mayor porción de la superficie terrestre a representar es el hemisferio que contiene al polo O de la proyección, definido por el plano que pasa por el centro de la tierra C y es perpendicular a la vertical OC .

Como cualquier hemisferio a representar siempre contendrá a uno de los polos terrestres, independientemente de la posición de O , y en dicho polo convergen todos los meridianos,

entonces todos los meridianos estarán representados en la carta. En cambio, con las latitudes no ocurre lo mismo; no todos los paralelos estarán representados en la carta.

Analicemos las latitudes extremas que quedarán representadas en la carta en función de las coordenadas de $O(\varphi_0; \lambda_0)$.

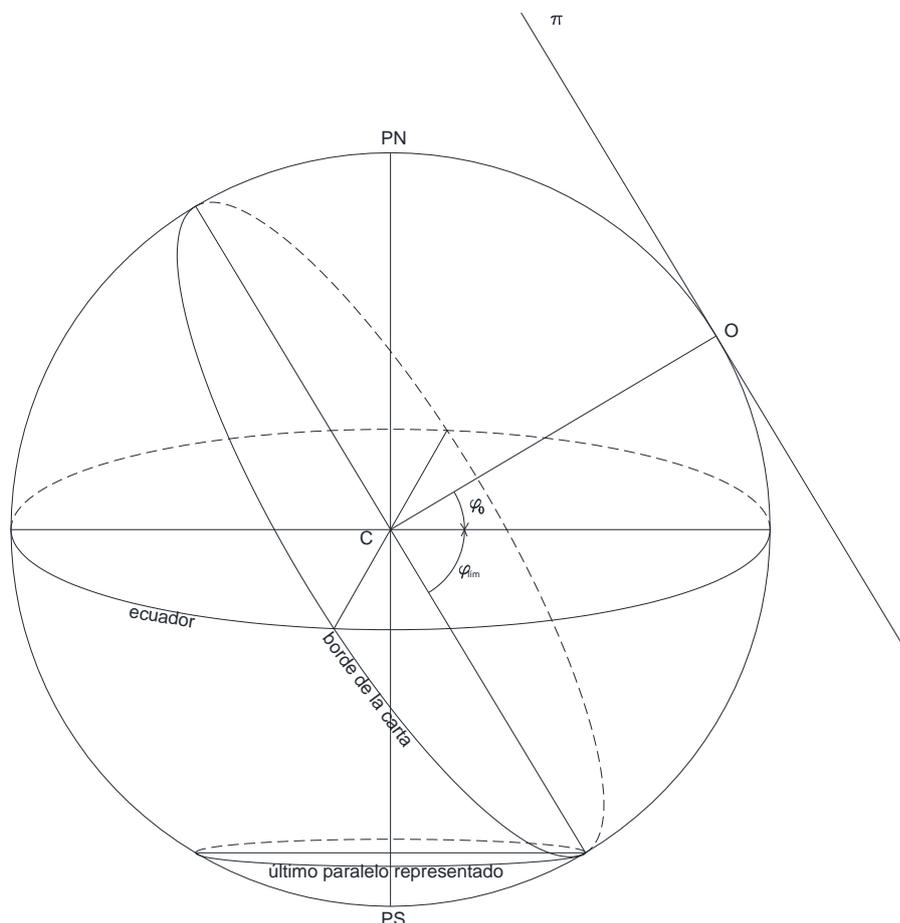


Fig. IV - 8

Como se ve en la Fig. IV - 8, la latitud límite a ser representada es

$$\varphi_{lim} = \pm|90 - \varphi_0| \text{ siendo } + \text{ si } \varphi_0 < 0 \text{ y } - \text{ si } \varphi_0 > 0$$

Antes de comenzar a representar el corte de los paralelos y meridianos, analizaremos algunos cortes singulares.

Corte de paralelos con el borde de la carta

Como ya se ha visto, al representar un hemisferio, el borde de la carta es una circunferencia que corresponde a la representación de $d = \pi/2$

La ecuación paramétrica de los paralelos es de la forma $\varphi = \text{cte}$ con independencia de $\Delta\lambda$; por lo tanto para el cálculo de los cortes debemos independizarnos de $\Delta\lambda$ en las ecuaciones.

Analicemos la expresión de d

$\cos d = \sin \varphi_0 \sin \varphi + \cos \varphi_0 \cos \varphi \cos \Delta\lambda$ pero como $d = \pi/2$ queda

$$0 = \sin \varphi_0 \sin \varphi + \cos \varphi_0 \cos \varphi \cos \Delta\lambda$$

$$\cos \Delta\lambda = \frac{-\sin \varphi_0 \sin \varphi}{\cos \varphi_0 \cos \varphi} = -\tan \varphi_0 \tan \varphi$$

Por otro lado, de la trigonometría sabemos que

$$\sin \Delta\lambda = \sqrt{1 - (\cos \Delta\lambda)^2}$$

Pero

$$\cot Ac = \frac{\tan \varphi \cos \varphi_0 - \cos \Delta\lambda \sin \varphi_0}{\sin \Delta\lambda}$$

y sustituyendo es

$$\begin{aligned} \cot Ac &= \frac{\tan \varphi \cos \varphi_0 + \tan \varphi \tan \varphi_0 \sin \varphi_0}{\sqrt{1 - (\tan \varphi_0)^2 (\tan \varphi)^2}} = \frac{\tan \varphi (\cos \varphi_0 + \tan \varphi_0 \sin \varphi_0)}{\sqrt{1 - (\tan \varphi_0)^2 (\tan \varphi)^2}} = \\ &= \frac{\tan \varphi (\cos \varphi_0 + \frac{(\sin \varphi_0)^2}{\cos \varphi_0})}{\sqrt{1 - \frac{(\sin \varphi_0)^2 (\sin \varphi)^2}{(\cos \varphi_0)^2 (\cos \varphi)^2}}} = \frac{\tan \varphi \frac{(\cos \varphi_0)^2 + (\sin \varphi_0)^2}{\cos \varphi_0}}{\sqrt{\frac{(\cos \varphi_0)^2 (\cos \varphi)^2 - (\sin \varphi_0)^2 (\sin \varphi)^2}{(\cos \varphi_0)^2 (\cos \varphi)^2}}} = \\ &= \frac{\tan \varphi \frac{1}{\cos \varphi_0} \cos \varphi_0 \cos \varphi}{\sqrt{(\cos \varphi_0)^2 (\cos \varphi)^2 - (\sin \varphi_0)^2 (\sin \varphi)^2}} \end{aligned}$$

En definitiva

$$\cot Ac = \frac{\sin \varphi}{\sqrt{(\cos \varphi_0)^2 (\cos \varphi)^2 - (\sin \varphi_0)^2 (\sin \varphi)^2}}$$

Con esta expresión del Ac , y recordando que $d = \pi/2$ por ser el borde de la carta, voy a la expresión cartesiana de la Ley

$$x = R \pi/2 \sin Ac$$

$$y = R \pi/2 \cos Ac$$

Corte de meridianos con el borde de la carta

La ecuación paramétrica de los meridianos es de la forma $\Delta\lambda = \text{cte}$ con independencia de φ ; por lo tanto para el cálculo de los cortes debemos independizarnos de φ en las ecuaciones.

Aplicando la relación de los senos del grupo de fórmulas de Bessel al triángulo esférico PN,O,A, -Fig. IV - 7- es

$$\frac{\sin d}{\sin \Delta\lambda} = \frac{\sin \delta}{\sin Ac}$$

y despejando Ac y expresando la igualdad en función de φ es

$$\sin Ac = \frac{\cos \varphi \sin \Delta\lambda}{\sin d}$$

pero como $d = \pi/2$ por tratarse del borde de la carta queda $\sin Ac = \cos \varphi \sin \Delta\lambda$

Pero ya habíamos visto que, en el borde de la carta se cumple $\cos \Delta\lambda = -\tan \varphi_0 \tan \varphi$

y despejando es $\tan \varphi = -\cos \Delta\lambda \cot \varphi_0$

De la trigonometría sabemos que

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + (\tan \varphi)^2}}$$

Por tanto, sustituyendo es

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + (\cos \Delta\lambda)^2 (\cot \varphi_0)^2}}$$

y sustituyendo en la expresión de $\sin Ac$ queda

$$\sin Ac = \frac{\sin \Delta\lambda}{\sqrt{1 + (\cos \Delta\lambda)^2 (\cot \varphi_0)^2}}$$

Con esta expresión del Ac , y recordando que $d = \pi/2$ por ser el borde de la carta, voy a la expresión cartesiana de la Ley

$$x = R \pi/2 \sin Ac$$

$$y = R \pi/2 \cos Ac$$

Corte de los paralelos con el eje de las ordenadas OY ($x=0$)

De la expresión de la ley en coordenadas cartesianas surge

$$x = Rd \sin Ac = 0 \Rightarrow \sin Ac = 0 \Rightarrow Ac = 0/180$$

$$y = Rd \cos Ac = \pm Rd$$

Para el cálculo de las coordenadas de los puntos de corte, la única variable es d

$$\cos d = \sin \varphi_0 \sin \varphi + \cos \varphi_0 \cos \varphi \cos \Delta\lambda$$

Pero por tratarse de puntos sobre el eje OY, entonces $\Delta\lambda = 0 \Rightarrow \cos \Delta\lambda = 1$ y queda

$$\cos d = \sin \varphi_0 \sin \varphi + \cos \varphi_0 \cos \varphi$$

Corte de los meridianos con el eje de las abscisas OX ($y=0$)

De la expresión de la ley en coordenadas cartesianas surge

$$y = Rd \cos Ac = 0 \Rightarrow \cos Ac = 0 \Rightarrow Ac = 90/270$$

$$x = Rd \sin Ac = \pm Rd$$

Nuevamente, para el cálculo de las coordenadas de los puntos de corte, la única variable es d

Sabemos que (1) $\cos d = \sin \varphi_0 \sin \varphi + \cos \varphi_0 \cos \varphi \cos \Delta\lambda$

Además, como $Ac = 90/270 \Rightarrow \cot Ac = 0$

$$\cot Ac = \frac{\tan \varphi \cos \varphi_0 - \cos \Delta\lambda \sin \varphi_0}{\sin \Delta\lambda} = 0 \Rightarrow \tan \varphi \cos \varphi_0 - \cos \Delta\lambda \sin \varphi_0 = 0$$

Despejando

$$\tan \varphi = \frac{\cos \Delta\lambda \sin \varphi_0}{\cos \varphi_0} \Rightarrow (2) \tan \varphi = \cos \Delta\lambda \tan \varphi_0$$

Con el valor de $\Delta\lambda$ correspondiente a cada meridiano del que estamos calculando su corte con el eje OX , con la ecuación (2) calculamos el valor de φ ; con este valor vamos a la ecuación (1) y calculamos d y finalmente con ese valor de d calculamos el valor de x correspondiente al corte.

Corte entre paralelos y meridianos

Las coordenadas de los puntos de corte entre paralelos y meridianos se obtendrán aplicando las ecuaciones generales de la ley que ya hemos visto

$$X = Rd \sin Ac$$

$$Y = Rd \cos Ac$$

donde los valores de d y de Ac vienen dados por

$$\cos d = \sin \varphi_0 \sin \varphi + \cos \varphi_0 \cos \varphi \cos \Delta\lambda$$

$$\cot Ac = \frac{\tan \varphi \cos \varphi_0 - \cos \Delta\lambda \sin \varphi_0}{\sin \Delta\lambda}$$

V – PROYECCIONES PLANAS PERSPECTIVAS

En esta modalidad de proyecciones planas se establece una proyectividad mediante un haz de rectas desde un vértice V (Fig. V - 1) que se encuentra a una distancia D del centro C de la esfera modelo, siendo el polo de la proyección el punto G , intersección de la recta VC con el plano.

Dependiendo del valor de D , y de la posición del polo $G(\varphi_0; \lambda_0)$ sobre la esfera modelo, surgen diferentes proyecciones a la vez que diferentes modos de las mismas.

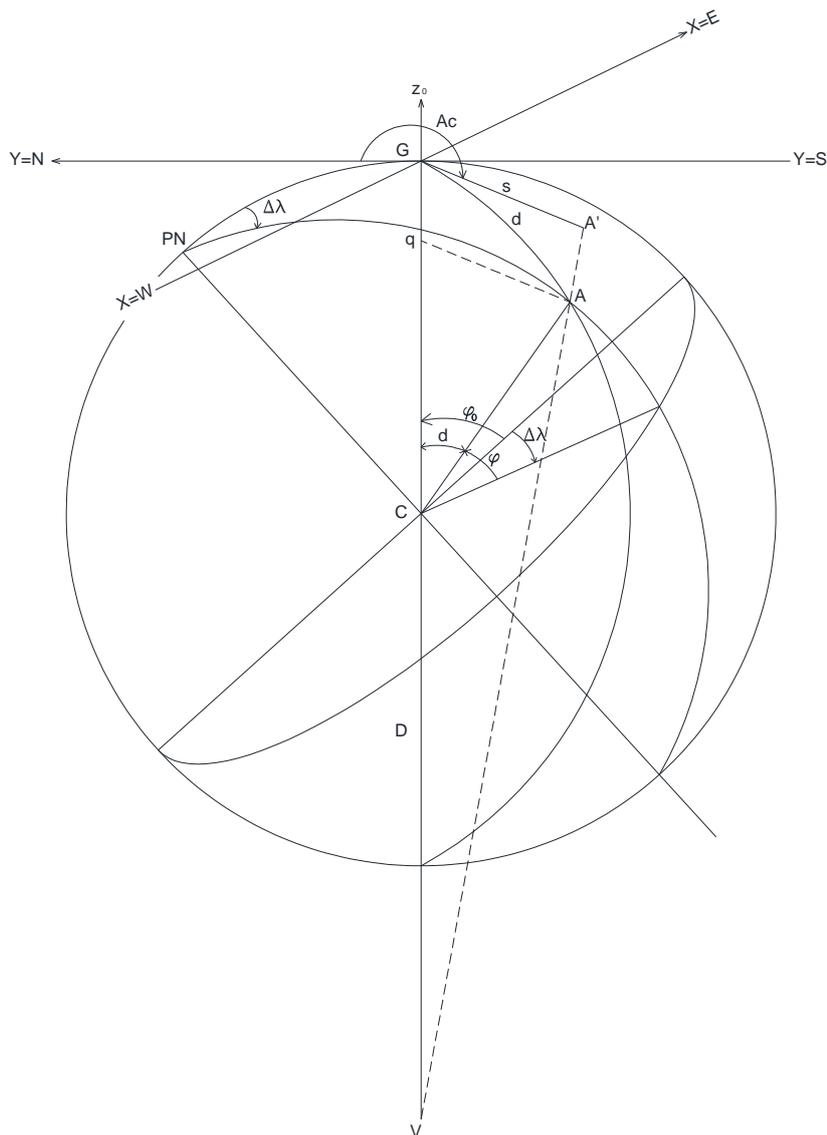


Fig. V - 1

PROYECCIÓN ESCENOGRÁFICA

En la Proyección Escenográfica el vértice V se encuentra a una distancia finita de C , y mayor al radio de la esfera modelo que lo consideramos con valor unitario: $1 < D < \infty$

Modo acimutal u oblicuo: $\varphi_0 \neq 0$ y $\varphi_0 \neq \pm 90^\circ$

Vamos a analizar el caso más general para este tipo de proyecciones y del cual derivan todas las demás

Como se observa en la Fig. V - 1 el rayo V-A proyecta el punto genérico A en A' sobre el plano.

$$D = \overline{V-C}; G(\varphi_0; \lambda_0); A(\varphi; \lambda); A'(X; Y) \text{ y } s = \overline{G-A'}$$

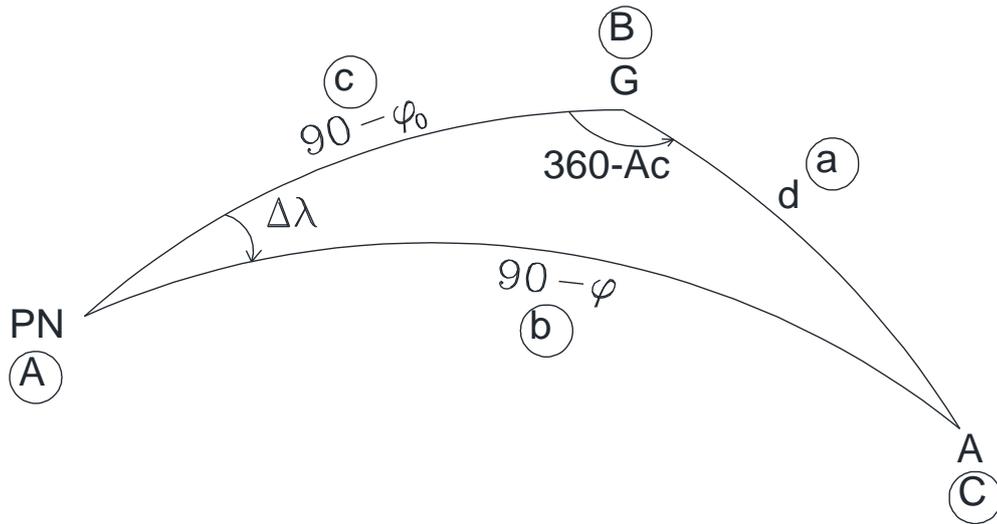


Fig. V - 2

Veamos en detalle el triángulo esférico PN,G,A (Fig. V - 2)

Recordemos las fórmulas del Grupo de Bessel para la trigonometría esférica donde encerradas en círculos (Fig. V - 2)

se encuentran las letras a que refieren dichas fórmulas de forma genérica

$$1 - \frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

$$2 - \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

$$3 - \cot a \sin b = \cos b \cos C + \sin C \cot A$$

$$4 - \sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A$$

Aplicando las fórmulas 1, 2 y 4 a los valores del triángulo es

$$1 - \frac{\sin d}{\sin \Delta\lambda} = \frac{\sin(90 - \varphi)}{\sin(360 - Ac)} \Rightarrow \sin d \sin(360 - Ac) = \sin \Delta\lambda \cos \varphi$$

$$2 - \cos d = \sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos \Delta\lambda$$

$$4 - \sin d \cos Ac = \sin \varphi \cos \varphi_0 - \cos \varphi \sin \varphi_0 \cos \Delta\lambda$$

Veamos ahora como calcular las coordenadas planas o cartesianas del punto genérico A.

Para ello, analicemos el plano de proyección o plano de cuadro en planta (Fig. V - 3)

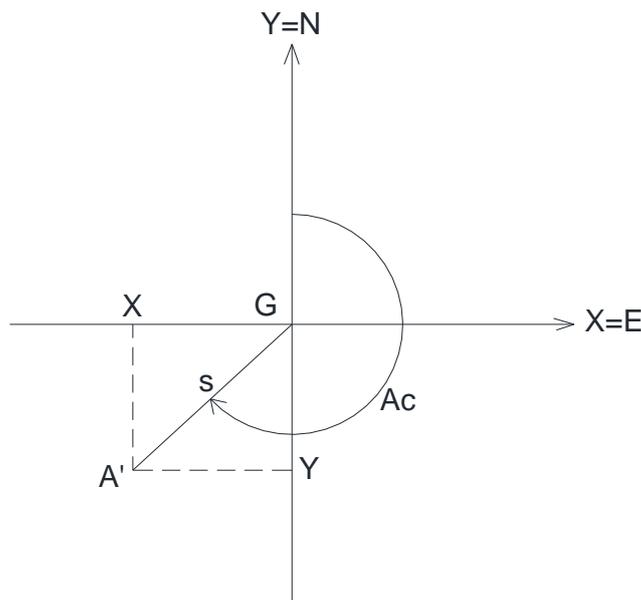


Fig. V - 3

Para establecer la representación cartográfica que vincula los puntos de la superficie terrestre (superficie objetiva) con los puntos homólogos en el plano (superficie subjetiva), estos se identifican de manera unívoca mediante la utilización de coordenadas.

En el plano se utilizan las coordenadas cartesianas abscisa y ordenada (X, Y) (Fig. V - 3) y en el elipsoide y la esfera las coordenadas esféricas latitud y longitud: (φ, λ) .

Se cumple

$$X = s \sin Ac$$

$$Y = s \cos Ac$$

Calculemos entonces el valor de s

En la Fig. V - 1 se cumple la siguiente semejanza de triángulos

$$VGA' \cong VqA$$

por tanto

$$\frac{qA}{GA'} = \frac{\sin d}{s} = \frac{Vq}{VG} = \frac{VC + Cq}{VC + CG} = \frac{D + \cos d}{D + 1}$$

entonces

$$s = GA' = \frac{\sin d (D + 1)}{D + \cos d}$$

Sustituyendo s en la expresión de X es

$$X = s \sin Ac = \frac{\sin d (D + 1)}{D + \cos d} \sin Ac$$

pero sustituyendo por las expresiones de $\sin Ac$ y $\cos d$ que surgen de las ecuaciones (1) y (2) del grupo de Bessel respectivamente, es

$$X = \frac{(D + 1) \sin \Delta\lambda \cos \varphi}{D + \sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos \Delta\lambda}$$

De igual forma calculamos la Y

$$Y = s \cos Ac = \frac{\sin d(D + 1)}{D + \cos d} \cos Ac$$

pero sustituyendo por las expresiones de $\sin d \cos Ac$ y $\cos d$ que surgen de las ecuaciones (4) y (2) del grupo de Bessel respectivamente, es

$$Y = \frac{(D + 1)(\sin \varphi \cos \varphi_0 - \cos \varphi \sin \varphi_0 \cos \Delta\lambda)}{D + \sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos \Delta\lambda}$$

Modo polar: $\varphi_0 = \pm 90^\circ$

Sustituyendo en las expresiones de X y de Y φ_0 por 90° resulta

$$X = \frac{(D + 1) \sin \Delta\lambda \cos \varphi}{D + \sin \varphi}$$
$$Y = \frac{-(D + 1) \cos \varphi \cos \Delta\lambda}{D + \sin \varphi}$$

Modo ecuatorial: $\varphi_0 = 0^\circ$

Sustituyendo en las expresiones de X y de Y φ_0 por 0° resulta

$$X = \frac{(D + 1) \sin \Delta\lambda \cos \varphi}{D + \cos \varphi \cos \Delta\lambda}$$
$$Y = \frac{(D + 1) \sin \varphi}{D + \cos \varphi \cos \Delta\lambda}$$

PROYECCIÓN CENTRAL O GNÓMICA

En la Proyección Central o Gnomónica, el vértice V de la proyección se encuentra en el centro C de la Tierra, por lo tanto, la distancia $D=0$

Modo acimutal u oblicuo: $\varphi_0 \neq 0$ y $\varphi_0 \neq \pm 90^\circ$

Sustituyendo entonces en las expresiones generales de X e Y D por cero se tiene

$$X = \frac{\cos \varphi \sin \Delta\lambda}{\sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos \Delta\lambda}$$
$$Y = \frac{\sin \varphi \cos \varphi_0 - \cos \varphi \sin \varphi_0 \cos \Delta\lambda}{\sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos \Delta\lambda}$$

Modo polar: $\varphi_0 = \pm 90^\circ$

Sustituyendo en las expresiones de X y de Y φ_0 por 90° resulta

$$X = \frac{\cos \varphi \sin \Delta\lambda}{\sin \varphi} = \cot \varphi \sin \Delta\lambda$$
$$Y = \frac{-\cos \varphi \cos \Delta\lambda}{\sin \varphi} = -\cot \varphi \cos \Delta\lambda$$

Modo ecuatorial: $\varphi_0 = 0^\circ$

Sustituyendo en las expresiones de X y de Y φ_0 por 0° resulta

$$X = \frac{\cos \varphi \sin \Delta\lambda}{\cos \varphi \cos \Delta\lambda} = \tan \Delta\lambda$$
$$Y = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi \cos \Delta\lambda} = \frac{\tan \varphi}{\cos \Delta\lambda}$$

PROYECCIÓN ESTEREOGRÁFICA

En la Proyección Estereográfica, el vértice V de la proyección se encuentra sobre la superficie de la Tierra, por lo tanto, la distancia $D=1$

Modo acimutal u oblicuo: $\varphi_0 \neq 0$ y $\varphi_0 \neq \pm 90^\circ$

Sustituyendo entonces en las expresiones generales de X e Y D por uno se tiene

$$X = \frac{2 \cos \varphi \sin \Delta\lambda}{1 + \sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos \Delta\lambda}$$
$$Y = \frac{2(\sin \varphi \cos \varphi_0 - \cos \varphi \sin \varphi_0 \cos \Delta\lambda)}{1 + \sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos \Delta\lambda}$$

Modo polar: $\varphi_0 = \pm 90^\circ$

Sustituyendo en las expresiones de X y de Y φ_0 por 90° resulta

$$X = \frac{2 \cos \varphi \sin \Delta\lambda}{1 + \sin \varphi}$$
$$Y = \frac{-2 \cos \varphi \cos \Delta\lambda}{1 + \sin \varphi}$$

Modo ecuatorial: $\varphi_0 = 0^\circ$

Sustituyendo en las expresiones de X y de Y φ_0 por 0° resulta

$$X = \frac{2 \cos \varphi \sin \Delta\lambda}{1 + \cos \varphi \cos \Delta\lambda}$$
$$Y = \frac{2 \sin \varphi}{1 + \cos \varphi \cos \Delta\lambda}$$

PROYECCIÓN ORTOGRÁFICA

En la Proyección Ortográfica, el vértice V de la proyección se encuentra en el punto impropio del eje GC, por tanto $D \rightarrow \infty$

Modo acimutal u oblicuo: $\varphi_0 \neq 0$ y $\varphi_0 \neq \pm 90^\circ$

Sustituyendo entonces en las expresiones generales de X e Y por $D \rightarrow \infty$ se tiene

$$X = \frac{(D + 1) \sin \Delta\lambda \cos \varphi}{D + \sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos \Delta\lambda} \rightarrow \frac{D \sin \Delta\lambda \cos \varphi}{D} \rightarrow \sin \Delta\lambda \cos \varphi$$
$$Y = \frac{(D + 1)(\sin \varphi \cos \varphi_0 - \cos \varphi \sin \varphi_0 \cos \Delta\lambda)}{D + \sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos \Delta\lambda} \rightarrow \frac{D(\sin \varphi \cos \varphi_0 - \cos \varphi \sin \varphi_0 \cos \Delta\lambda)}{D} \rightarrow$$
$$\rightarrow \sin \varphi \cos \varphi_0 - \cos \varphi \sin \varphi_0 \cos \Delta\lambda$$

Modo polar: $\varphi_0 = \pm 90^\circ$

Sustituyendo en las expresiones de X y de Y φ_0 por 90° resulta

$$X = \sin \Delta\lambda \cos \varphi$$

$$Y = -\cos \varphi \cos \Delta\lambda$$

Modo ecuatorial: $\varphi_0 = 0^\circ$

Sustituyendo en las expresiones de X y de Y φ_0 por 0° resulta

$$X = \cos \varphi \sin \Delta\lambda$$

$$Y = \sin \varphi$$

CONFORMIDAD DE LA PROYECCIÓN ESTEREOGRÁFICA EN LA MODALIDAD POLAR

Recordemos las ecuaciones de la Proyección Estereográfica en la modalidad polar

$$X = \frac{2 \cos \varphi \sin \Delta\lambda}{1 + \sin \varphi}$$

$$Y = \frac{-2 \cos \varphi \cos \Delta\lambda}{1 + \sin \varphi}$$

Para probar la conformidad, analicemos las condiciones de conformidad de Cauchy – Riemann

Como ya hemos visto, en el caso del elipsoide, para que una proyección sea conforme se deben verificar simultáneamente estas dos condiciones

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -\frac{1}{r} \frac{\partial y}{\partial \lambda}$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial x}{\partial \lambda}$$

Como en esta proyección la superficie objetiva no es el elipsoide sino la esfera, se cumple

$$\rho = R = 1$$

$$r = R \cos \varphi = \cos \varphi$$

por tanto, las Condiciones de Conformidad de Cauchy – Riemann para la esfera son

$$1 - \frac{\partial x}{\partial \lambda} = \cos \varphi \frac{\partial y}{\partial \varphi}$$

$$2 - \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -\frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda}$$

Para verificar las condiciones de conformidad calculemos las derivadas parciales de las expresiones de X e Y

$$\frac{\partial X}{\partial \lambda} = \frac{2 \cos \varphi \cos \Delta \lambda}{1 + \sin \varphi}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \lambda} = \frac{2 \cos \varphi \sin \Delta \lambda}{1 + \sin \varphi}$$

$$\frac{\partial X}{\partial \varphi} = \frac{-2 \sin \varphi \sin \Delta \lambda (1 + \sin \varphi) - 2 \cos \varphi \sin \Delta \lambda \cos \varphi}{(1 + \sin \varphi)^2} =$$

$$= \frac{-2 \sin \varphi \sin \Delta \lambda - 2(\sin \varphi)^2 \sin \Delta \lambda - 2(\cos \varphi)^2 \sin \Delta \lambda}{(1 + \sin \varphi)^2} =$$

$$= \frac{-2 \sin \Delta \lambda ([\sin \varphi + (\sin \varphi)^2 + (\cos \varphi)^2])}{(1 + \sin \varphi)^2} = \frac{-2 \sin \Delta \lambda}{1 + \sin \varphi}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \varphi} = \frac{2 \sin \varphi \cos \Delta \lambda (1 + \sin \varphi) + 2 \cos \varphi \cos \Delta \lambda \cos \varphi}{(1 + \sin \varphi)^2} =$$

$$= \frac{2 \sin \varphi \cos \Delta \lambda + 2(\sin \varphi)^2 \cos \Delta \lambda + 2(\cos \varphi)^2 \cos \Delta \lambda}{(1 + \sin \varphi)^2} =$$

$$= \frac{2 \cos \Delta \lambda [\sin \varphi + (\sin \varphi)^2 + (\cos \varphi)^2]}{(1 + \sin \varphi)^2} = \frac{2 \cos \Delta \lambda}{1 + \sin \varphi}$$

Verifiquemos ahora el cumplimiento de ambas condiciones

$$1 - \frac{2 \cos \varphi \cos \Delta \lambda}{1 + \sin \varphi} = \cos \varphi \frac{2 \cos \Delta \lambda}{1 + \sin \varphi} \quad \text{Verifica}$$

$$2 - \frac{-2 \sin \Delta \lambda}{1 + \sin \varphi} = \frac{-1}{\cos \varphi} \frac{2 \cos \varphi \sin \Delta \lambda}{1 + \sin \varphi} \quad \text{Verifica}$$

La proyección es conforme.

VI – PROYECCIÓN MERCATOR

La Proyección Mercator fue quizás la primera en ser utilizada para la confección de cartas con verdadero rigor matemático. Su creador fue Gerhard Kramer, matemático, cartógrafo y navegante nacido en 1512 en Flandes. El nombre Mercator corresponde a un anagrama, modalidad utilizada frecuentemente en su época por los creadores al publicar sus obras. La Proyección Mercator fue publicada por primera vez en el año 1569.

El propósito de esta proyección era dotar a los navegantes de una herramienta que les permitiera calcular de manera sencilla el rumbo a seguir conociendo la posición de la nave, y la ubicación del destino deseado. Para ello, las loxodrómicas - curvas que mantienen un acimut constante con los meridianos - se deberían representar por rectas, de tal modo que, conociendo la ubicación actual y el destino, bastaba con trazar una recta sobre la carta entre ambos puntos, y medir directamente el acimut al que se debería orientar la proa del barco.

Esta proyección se clasifica como cilíndrica, ecuatorial o directa y conforme. Esto significa que la superficie subjetiva es un cilindro tangente al elipsoide en el ecuador y además conserva los ángulos.

Los meridianos se representan por rectas verticales que son la intersección de los planos meridianos terrestres con la superficie del cilindro – Fig. VI - 1 -.

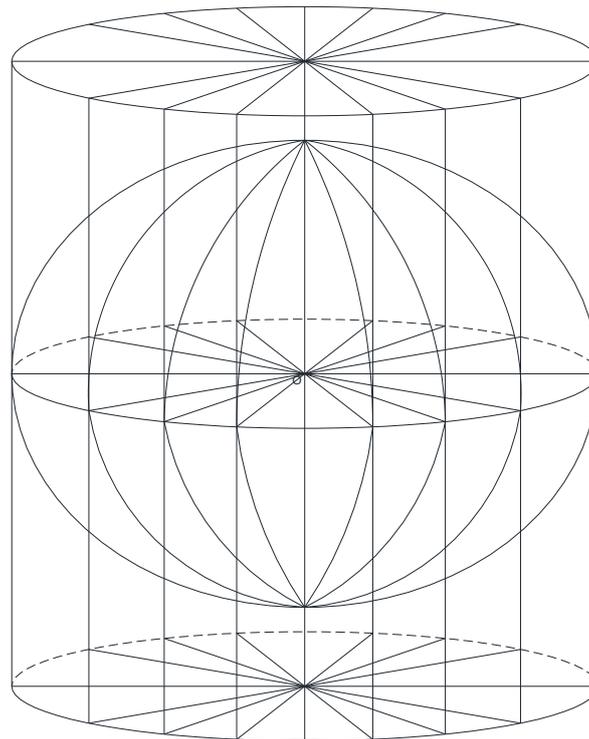


Fig. VI - 1

Por tanto, como la proyección es conforme los paralelos se representarán por rectas horizontales, perpendiculares a los meridianos.

Intuitivamente se puede ver – Fig. VI - 2 - que cuando proyectamos un casquete del elipsoide que contiene un círculo - Fig. VI - 2 (a) – de modo que los meridianos se transformen en rectas

paralelas – Fig. VI – 2 (b) -, debido a que la longitud del paralelo superior del casquete es más corta que la del paralelo inferior por la convergencia de los meridianos, el círculo se deforma.

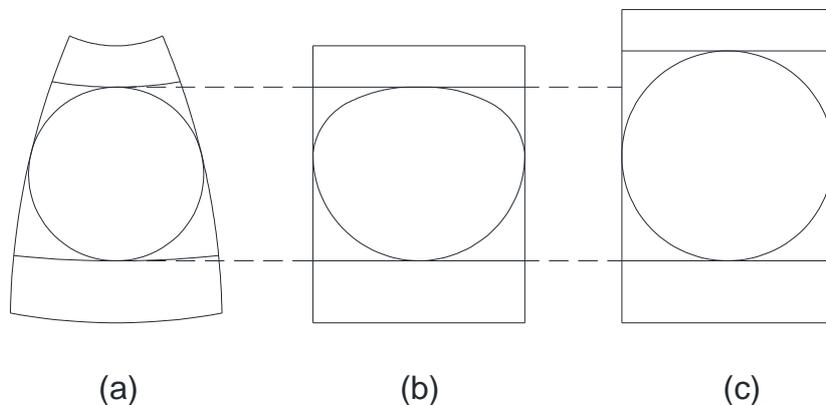


Fig. VI - 2

Entonces, para conservar la conformidad y que el círculo se transforme en otro círculo, se debe incrementar la distancia entre los paralelos – Fig. VI - 2(c) -.

LEY DE LA PROYECCIÓN

Veamos ahora como se construye la Ley de la proyección. En la Fig. VI - 3 sean A, B y C tres puntos infinitamente cercanos, donde A y B están sobre el mismo meridiano y A y C sobre el mismo paralelo. Como ya se ha visto, la representación del arco de meridiano AB sobre el cilindro será el segmento de recta vertical ab, y la del arco de paralelo AC será el arco de circunferencia ac, el que una vez desarrollado el cilindro sobre el plano se transformará en un segmento de recta horizontal y por tanto perpendicular a ab.

El módulo de deformación transversal o paralelo α es

$$\alpha = \frac{ac}{AC} = \frac{a\Delta\lambda}{r\Delta\lambda} = \frac{a}{r}$$

y el módulo de deformación meridiano es

$$\beta = \frac{ab}{AB} = \frac{dy}{\rho d\varphi}$$

Como hemos visto, de acuerdo a las condiciones de conformidad de Cauchy – Riemann es $\alpha = \beta$. O sea

$$\frac{a}{r} = \frac{dy}{\rho d\varphi} \Rightarrow dy = \frac{a\rho}{r} d\varphi$$

Como ya se ha fundamentado anteriormente, de la geodesia surge

$$r = N \cos \varphi \text{ pero } N = \frac{a}{[1 - e^2(\sin \varphi)^2]^{\frac{1}{2}}} \text{ por tanto } r = \frac{a \cos \varphi}{[1 - e^2(\sin \varphi)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

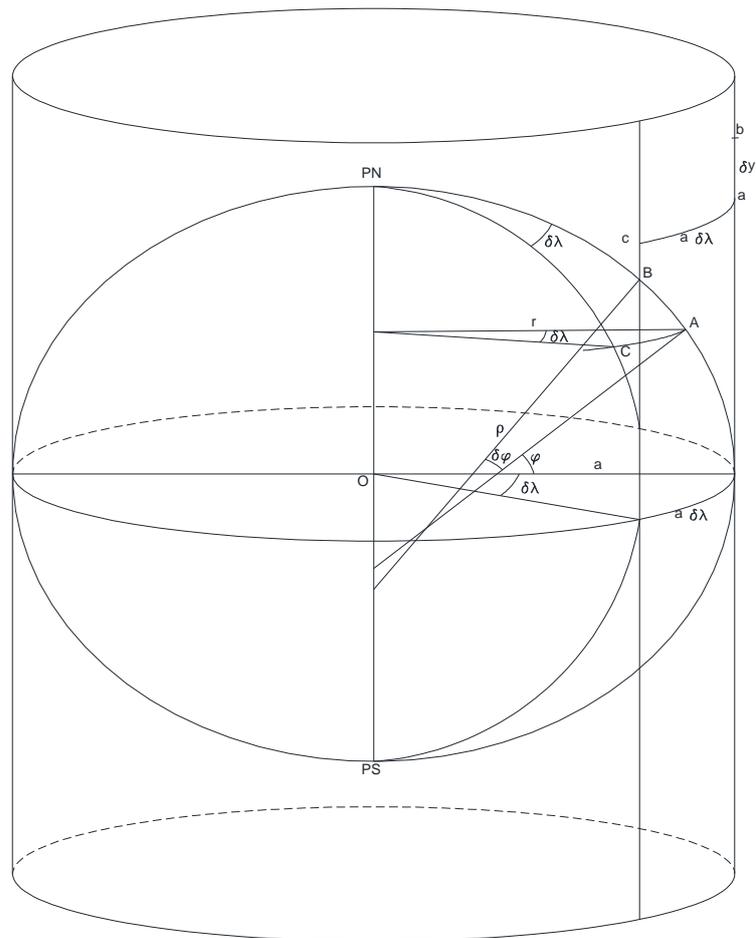


Fig. VI - 3

Además

$$\rho = \frac{a(1 - e^2)}{[1 - e^2(\sin \varphi)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

Sustituyendo en la expresión de dy es

$$dy = \frac{a(1 - e^2)[1 - e^2(\sin \varphi)^2]^{\frac{1}{2}}}{[1 - e^2(\sin \varphi)^2]^{\frac{3}{2}} a \cos \varphi} d\varphi = \frac{a(1 - e^2)}{\cos \varphi [1 - e^2(\sin \varphi)^2]} d\varphi$$

Multiplicando el numerador por $(\sin \varphi)^2 + (\cos \varphi)^2 = 1$ es

$$\begin{aligned} dy &= \frac{a(1 - e^2)[(\sin \varphi)^2 + (\cos \varphi)^2] d\varphi}{\cos \varphi [1 - e^2(\sin \varphi)^2]} \\ &= \frac{a(\sin \varphi)^2 + a(\cos \varphi)^2 - ae^2(\sin \varphi)^2 - ae^2(\cos \varphi)^2}{\cos \varphi [1 - e^2(\sin \varphi)^2]} d\varphi = \\ &= \frac{a[1 - e^2(\sin \varphi)^2] - ae^2(\cos \varphi)^2}{\cos \varphi [1 - e^2(\sin \varphi)^2]} d\varphi = \frac{a}{\cos \varphi} d\varphi - \frac{ae^2 \cos \varphi}{1 - e^2(\sin \varphi)^2} d\varphi \end{aligned}$$

Para calcular la expresión de la y integraremos ambos miembros de la igualdad anterior.

$$y = \int_0^\varphi \frac{a}{\cos \varphi} d\varphi - \int_0^\varphi \frac{ae^2 \cos \varphi}{1 - e^2(\sin \varphi)^2} d\varphi$$

La primera de las integrales es una integral tipo, por tanto

$$y = aL \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) - \int_0^\varphi \frac{ae^2 \cos \varphi}{1 - e^2(\sin \varphi)^2} d\varphi$$

Ahora nos concentramos en resolver la segunda integral. Para ello, veamos que el integrando lo podemos escribir como

$$\frac{ae^2 \cos \varphi}{1 - e^2(\sin \varphi)^2} = \frac{ae}{2} \left(\frac{e \cos \varphi}{1 - e \sin \varphi} + \frac{e \cos \varphi}{1 + e \sin \varphi} \right)$$

Para demostrar o comprobar la validez de esta expresión, desarrollaremos el segundo miembro de la igualdad para ver si llegamos a la expresión del primero

$$\begin{aligned} \frac{ae}{2} \left(\frac{e \cos \varphi}{1 - e \sin \varphi} + \frac{e \cos \varphi}{1 + e \sin \varphi} \right) &= \frac{ae}{2} \left[\frac{e \cos \varphi (1 + e \sin \varphi) + e \cos \varphi (1 - e \sin \varphi)}{(1 - e \sin \varphi)(1 + e \sin \varphi)} \right] = \\ \frac{ae e \cos \varphi (1 + e \sin \varphi + 1 - e \sin \varphi)}{2 (1 + e \sin \varphi - e \sin \varphi - e^2(\sin \varphi)^2)} &= \frac{ae}{2} \frac{2e \cos \varphi}{1 - e^2(\sin \varphi)^2} = \frac{ae^2 \cos \varphi}{1 - e^2(\sin \varphi)^2} \text{ lqqd.} \end{aligned}$$

Demostrada la validez de la igualdad anterior, podemos escribir que

$$\begin{aligned} - \int_0^\varphi \frac{ae^2 \cos \varphi}{1 - e^2(\sin \varphi)^2} d\varphi &= - \int_0^\varphi \frac{ae}{2} \left(\frac{e \cos \varphi}{1 - e \sin \varphi} + \frac{e \cos \varphi}{1 + e \sin \varphi} \right) d\varphi = \\ - \frac{ae}{2} \int_0^\varphi \frac{e \cos \varphi}{1 - e \sin \varphi} d\varphi - \frac{ae}{2} \int_0^\varphi \frac{e \cos \varphi}{1 + e \sin \varphi} d\varphi &= \frac{ae}{2} \int_0^\varphi \frac{-e \cos \varphi}{1 - e \sin \varphi} d\varphi - \frac{ae}{2} \int_0^\varphi \frac{e \cos \varphi}{1 + e \sin \varphi} d\varphi \end{aligned}$$

Las integrales a las que hemos llegado son de la forma

$$\int \frac{du}{u} = Lu + C$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} - \int_0^\varphi \frac{ae^2 \cos \varphi}{1 - e^2(\sin \varphi)^2} d\varphi &= \frac{ae}{2} L(1 - e \sin \varphi) + C_1 - \frac{ae}{2} L(1 + e \sin \varphi) + C_2 = \\ &= \frac{ae}{2} L \frac{1 - e \sin \varphi}{1 + e \sin \varphi} + C \end{aligned}$$

$C=C_1+C_2$ es la constante de integración, y la determinamos aplicando una solución de borde donde $\varphi=0 \rightarrow y=0$ por lo tanto

$$0 = aL \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{0}{2}\right) - \frac{ae}{2} L \frac{1 + e \sin 0}{1 - e \sin 0} + C$$

$$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_1 \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_1$$

$$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_0 \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_0$$

$$0 = 0 - 0 + C \Rightarrow C = 0$$

Por lo tanto

$$y = aL \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) + \frac{ae}{2} L \frac{1 - e \sin \varphi}{1 + e \sin \varphi}$$

y cambiando el signo del logaritmo e invirtiendo el numerador con el denominador es

$$y = aL \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) - \frac{ae}{2} L \frac{1 + e \sin \varphi}{1 - e \sin \varphi}$$

Para completar la Ley, analicemos la expresión de la x – Fig. VI - 3 -

$$dx = ac = ad\lambda \Rightarrow x = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} ad\lambda = a(\lambda_2 - \lambda_1) = a\Delta\lambda$$

$$x = a\Delta\lambda$$

Es usual que en esta proyección se utilice como unidad la milla ecuatorial o milla náutica. Una milla ecuatorial es la longitud de un minuto de arco de ecuador. Además, también es usual trabajar con logaritmos decimales en vez de logaritmos neperianos

Analicemos la expresión que asume el semieje mayor de la elipse meridiana *a* expresado en millas ecuatoriales

$$2a\pi = (360 \times 60)' = 21600' \Rightarrow a = \frac{21600'}{2\pi} \Rightarrow a = \frac{10800'}{\pi}$$

Por otro lado, haciendo el cambio de base de los logaritmos es

$$L(x) = \frac{\log(x)}{\log(e)} = \frac{\log(x)}{M}$$

donde M es el logaritmo decimal de e, base de los logaritmos neperianos: $M = \log(e)$

Haciendo estos cambios en la expresión de la y y desarrollando en serie el segundo sumando, es

$$y = \frac{10800}{\pi M} \log \tan\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) - \frac{10800}{\pi} (e^2 \sin \varphi + \frac{e^4}{3} (\sin \varphi)^3 + \frac{e^6}{5} (\sin \varphi)^5 + \dots)$$

ECUACIÓN DE LA LOXODRÓMICA

Consideremos – Fig. VI - 4 – el triángulo infinitesimal ABC conformado por un arco de meridiano, AC y un arco de paralelo BC. Sea φ la latitud del punto A, $\varphi+d\varphi$ la latitud de C, $d\lambda$ la diferencia

de longitudes entre el meridiano que pasa por B y el que pasa por A y C, r el radio del paralelo BC y Ac el acimut de la dirección AB.

Vemos que en el elipsoide se cumple

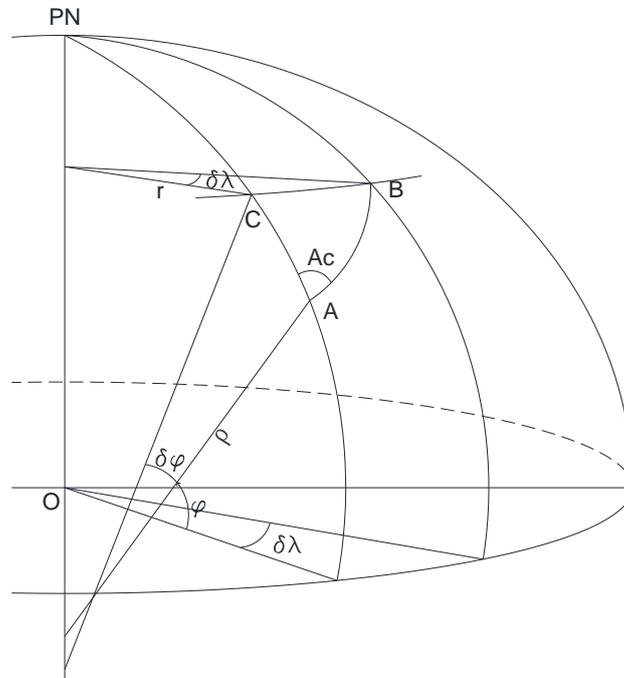


Fig. VI - 4

$$\tan Ac = \frac{BC}{AC} \Rightarrow BC = AC \tan Ac$$

Pero

$$BC = r d\lambda = N \cos \varphi d\lambda, \text{ y } AC = \rho d\varphi$$

Por tanto, sustituyendo BC y AC por estas expresiones es

$$N \cos \varphi d\lambda = \rho d\varphi \tan Ac$$

$$d\lambda = \frac{\rho}{N \cos \varphi} \tan Ac d\varphi$$

Sabemos que

$$\frac{\rho}{N} = \frac{1 - e^2}{1 - e^2(\sin \varphi)^2}$$

Sustituyendo queda

$$d\lambda = \frac{1 - e^2}{1 - e^2(\sin \varphi)^2} \frac{d\varphi}{\cos \varphi} \tan Ac$$

Para analizar la ecuación de la loxodrómica en el plano de Gauss integremos la expresión de dλ como ya lo hemos visto anteriormente

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \left[L \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_2}{2} \right) - e^2 \sin \varphi_2 - L \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2} \right) + e^2 \sin \varphi_1 \right] \tan Ac$$

Para analizar el comportamiento de esta expresión, hagamos el siguiente cambio de variable introduciendo el concepto de la latitud creciente elipsoidal o latitud creciente de Mercator φ_{ce}

$$\varphi_{ce} = \frac{1}{M} \log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) - e^2 \sin \varphi \dots$$

que expresa la latitud creciente en radianes, y en millas ecuatoriales es

$$\varphi'_{ce} = \frac{10800}{\pi M} \log \tan \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) - \frac{10800}{\pi} e^2 \sin \varphi \dots$$

Sustituyendo en la expresión anterior de la diferencia de longitudes es

$$(\lambda_2 - \lambda_1)^{(r)} = (\varphi_{ce2} - \varphi_{ce1}) \tan Ac$$

$$\varphi_{ce2} - \varphi_{ce1} = \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)^{(r)}}{\tan Ac} = (\lambda_2 - \lambda_1)^{(r)} \cot Ac = (\lambda_2 - \lambda_1)^{(r)} \tan(90^\circ - Ac)$$

En definitiva, la diferencia de latitudes crecientes elipsoidicas en radianes es

$$\varphi_{ce2} - \varphi_{ce1} = (\lambda_2 - \lambda_1)^{(r)} \tan(90^\circ - Ac)$$

y en millas ecuatoriales

$$\varphi'_{ce2} - \varphi'_{ce1} = (\lambda_2 - \lambda_1)' \tan(90 - Ac)$$

Estas expresiones representan una recta que pasa por los puntos **1**($\varphi_{ce1}; \lambda_1$) y **2**($\varphi_{ce2}; \lambda_2$) y forma un ángulo igual a $90^\circ - Ac$ con el eje horizontal, o sea un ángulo igual al Ac con el eje vertical.

Para avanzar en la interpretación del comportamiento de las loxodrómicas, analicemos las propiedades del canevas.

Propiedades del canevas

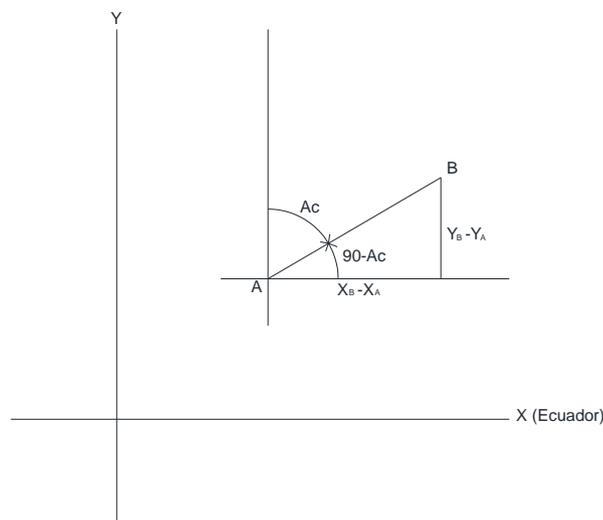


Fig. VI - 5

Consideremos un sistema cartesiano (X;Y) – Fig. VI - 5 – donde

$$X = \lambda \text{ e } Y = \varphi_{ce}$$

Como se va, la ecuación de la loxodrómica AB en este sistema es

$$Y_B - Y_A = (X_B - X_A) \tan(90 - Ac)$$

que representa la ecuación de una recta que pasa por A y por B y forma un ángulo igual a 90-Ac con el eje de las X.

Se deduce entonces que, en este sistema, a una loxodrómica le corresponde una recta y recíprocamente, toda recta representa una loxodrómica.

Veamos que ocurre con las situaciones límite.

Meridianos

Si $Ac=0^\circ$ o $Ac=180^\circ$ implica $\frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A} = \tan(\pm 90^\circ) \rightarrow \pm\infty$ **por tanto** $X_B \rightarrow X_A$ que es la representación de una recta vertical correspondiente a un meridiano.

Paralelos

Asimismo, si $Ac=+90^\circ$ o $Ac=-90^\circ$ implica $\frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A} = \tan(0^\circ/180^\circ) \rightarrow 0$ **por tanto** $Y_B \rightarrow Y_A$ que es la representación de una recta horizontal correspondiente a un paralelo.

Se deduce entonces que los meridianos se representan por rectas verticales y los paralelos por rectas horizontales y por tanto son perpendiculares.

Construcción del canevas

Para el análisis de la construcción del canevas o reticulado de la proyección Mercator debemos introducir previamente algunos conceptos

Unidad de la carta μ

Se define como “unidad de la carta μ ” a la magnitud que en la carta representa un minuto de arco de ecuador o milla náutica. En general esta magnitud se expresa en milímetros.

Hecha esta consideración veamos cómo sería la representación de un punto.

Dado un punto P en el elipsoide, al que le corresponde un punto P' en la carta

$$P(\varphi; \lambda) \rightarrow P'(X; Y)$$

Si P' se expresa en millas ecuatoriales es

$$\begin{aligned} X' &= \lambda \\ Y' &= \varphi_{ce} \end{aligned}$$

Si P' se expresa en unidades de carta es

$$\begin{aligned} X &= \mu\lambda' \\ Y &= \mu\varphi'_{ce} \end{aligned}$$

Veamos un ejemplo concreto a modo de ejemplificar.

Ej.: Calcular las coordenadas Mercator de un punto de coordenadas geográficas $\varphi=48^\circ\text{S}$ y $\lambda=10^\circ\text{W}$ en el elipsoide de Hayford: $e^2=0.006774359801$. La unidad de la carta es $\mu=0.5\text{mm}$.

Consideremos que la latitud $\varphi < 0$ hacia el S, la longitud $\lambda < 0$ hacia el W y el meridiano origen es Greenwich por lo tanto $\lambda_0=0$ implica $\Delta\lambda=\lambda$.

$$\begin{aligned} \varphi &= -48^\circ \\ \lambda &= -10^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X &= \mu\lambda' = -0.5 \times 10 \times 60 = -300\text{mm} \\ Y &= \mu\varphi'_{ce} = 0.5 \left[\frac{10800}{\pi M} \log \tan \left(45^\circ - \frac{48^\circ}{2} \right) - \frac{10800}{\pi} e^2 \sin(-48^\circ) \right] = -1638.02\text{mm} \end{aligned}$$

Escala E

Como ya hemos visto, la escala es el ratio entre una magnitud representada en la carta sobre dicha magnitud en la Tierra.

Veamos cual es el comportamiento de la escala en la proyección Mercator.

En la Fig. VI - 6 se representa un triángulo infinitesimal ABC en el elipsoide formado por un arco de paralelo BC y un arco de meridiano AB, y su homólogo abc en la carta Mercator.

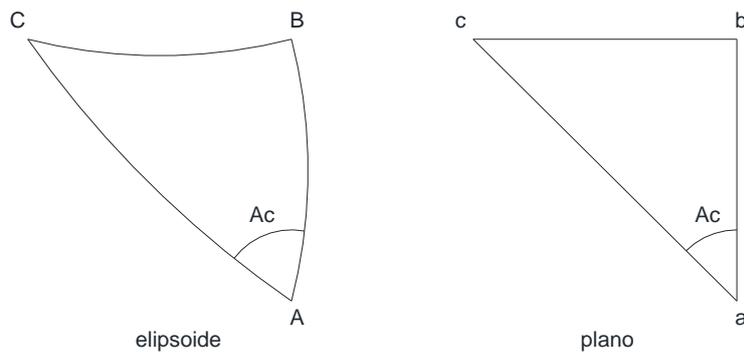


Fig. VI - 6

De acuerdo a la definición de la escala E, es

$$E = \frac{ab}{AB} = \frac{ac}{AC} = \frac{bc}{BC}$$

Analicemos la relación $E = \frac{bc}{BC}$

$$bc = \mu ad\lambda \text{ y } BC = N \cos \varphi d\lambda$$

Expresando el semieje mayor a en millas náuticas es

$$2\pi a = 360 \times 60 = 21600' \Rightarrow a = \frac{21600'}{2\pi} = 3437.746771$$

Por tanto

$$bc = 3437.746771 \mu d\lambda$$

Sustituyendo en la expresión de E es

$$E = \frac{3437.746771 \mu d\lambda}{N \cos \varphi d\lambda} = \frac{3437.746771 \mu}{N \cos \varphi}$$

Pero $N = \frac{a}{[1 - e^2(\sin \varphi)^2]^{\frac{1}{2}}}$; sustituyendo es

$$E = \frac{3437.746771 \mu}{\frac{a}{[1 - e^2(\sin \varphi)^2]^{\frac{1}{2}}} \cos \varphi} = \frac{\mu}{\frac{a}{3437.746771}} \frac{1}{\frac{\cos \varphi}{[1 - e^2(\sin \varphi)^2]^{\frac{1}{2}}}}$$

En el elipsoide internacional, $a=6378387.899m$; por otro lado, como hemos visto la expresión del semidiámetro a del elipsoide en minutos de arco de ecuador o millas ecuatoriales es 3437.746771. Por lo tanto, la longitud en metros de una milla ecuatorial viene dada por el cociente

$$\frac{a}{3437.746771} = 1855.39783m$$

Por otro lado, desarrollemos hasta $(\sin \varphi)^2$ la expresión

$$\frac{1}{[1 - e^2(\sin \varphi)^2]^{\frac{1}{2}}} = 1 + \frac{e^2}{2} (\sin \varphi)^2 + \dots$$

y sustituyendo en la expresión de la escala E

$$E = \frac{\mu}{1855.39783 \cos \varphi \left[1 + \frac{e^2}{2} (\sin \varphi)^2 \right]}$$

El numerador expresa la longitud en la carta de un minuto de arco de ecuador; el denominador expresa la longitud de un minuto de arco de ecuador en la Tierra, proyectado en un arco de paralelo de latitud φ ($\cos \varphi$) en un elipsoide de excentricidad e .

Ahora desarrollemos hasta $(\sin \varphi)^2$ la expresión

$$\frac{1}{1 + e^2(\sin \varphi)^2} = 1 - \frac{e^2}{2} (\sin \varphi)^2 + \dots$$

entonces sustituyendo nuevamente en la expresión de E es

$$E = \frac{\mu}{1855.39783 \cos \varphi} \left[1 - \frac{e^2}{2} (\sin \varphi)^2 \right]$$

El término $1 - \frac{e^2}{2} (\sin \varphi)^2$ varía entre 1 y 0.997, o sea que vale aproximadamente 1, por lo tanto, la escala E varía en función de $\frac{1}{\cos \varphi} = \sec \varphi$.

Escala natural o verdadera

Se denomina escala natural o verdadera E_N al valor que asume la escala en el ecuador, con $\varphi=0$

$$E = \frac{\mu}{1855.39783 \cos \varphi \left[1 + \frac{e^2}{2} (\sin \varphi)^2 \right]}$$

Entonces si $\varphi=0$ es

$$E_N = \frac{\mu}{1855.39783}$$

Latitud de referencia

No siempre el ecuador está comprendido en el tramo a representar, por lo tanto, en esa carta no habría puntos con escala natural o verdadera.

Por ello se asume una latitud de referencia φ_r presente en el tramo a representar, y para que en ella la escala sea natural o verdadera se considera un cilindro secante al elipsoide en el paralelo de latitud φ_r - Fig. VI - 7 -.

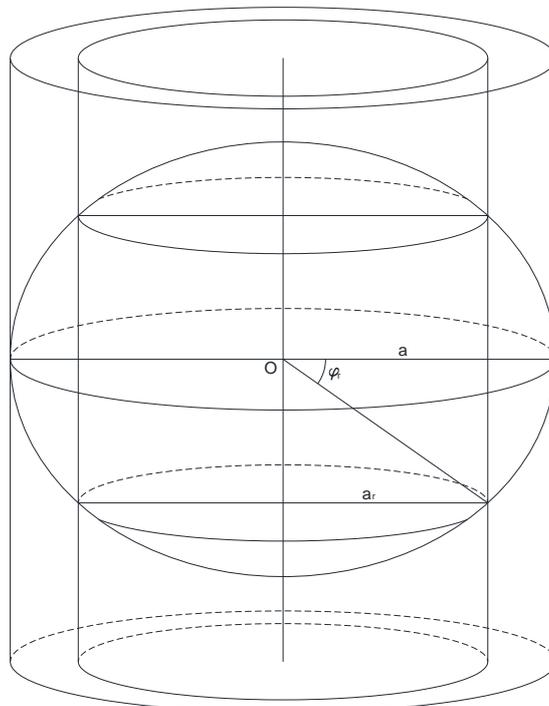


Fig. VI - 7

Con este procedimiento se pasa de considerar la proyección sobre un cilindro de radio a , correspondiente al ecuador con $\varphi_0=0$, a un cilindro de radio a_r correspondiente al paralelo de la latitud de referencia φ_r .

Se trata de una reducción de escala cuya relación de proporcionalidad es

$$\frac{a_r}{a} = \cos \varphi \left[1 + \frac{e^2}{2} (\sin \varphi)^2 \right]$$

Esto es porque

$$E_{\varphi_0} a = E_{\varphi_r} a_r \Rightarrow \frac{a_r}{a} = \frac{E_{\varphi_0}}{E_{\varphi_r}} = \frac{\frac{\mu}{1855.39783}}{\frac{\mu}{1855.39783 \cos \varphi \left[1 + \frac{e^2}{2} (\sin \varphi)^2 \right]}}$$

por tanto

$$\frac{a_r}{a} = \cos \varphi \left[1 + \frac{e^2}{2} (\sin \varphi)^2 \right]$$

Como se ha comprobado entonces, este procedimiento implica sólo una reducción de escala por lo tanto son válidas para la proyección en el cilindro φ_r todas las fórmulas y conclusiones desarrolladas para el cilindro φ_0 .

Entonces, la nueva escala natural para un paralelo de latitud φ_r será

$$E_{N\varphi_r} = \frac{\mu}{1855.39783 \cos \varphi_r \left[1 + \frac{e^2}{2} (\sin \varphi_r)^2 \right]}$$

En esta expresión, el denominador es la longitud de un minuto de arco de paralelo de latitud φ_r

$$E_{N\varphi_r} = \frac{\mu}{1' p \varphi_r}$$

La latitud de referencia se debe indicar siempre en el rótulo de la carta. Algunos de los criterios utilizados para elegir la latitud de referencia son:

- La latitud media del tramo. Es la media aritmética de las latitudes límite del tramo representado.
- Latitud de referencia cualquiera prefijada. Se emplea en general para concatenar secuencias longitudinales de cartas.
- Latitud que determina iguales distorsiones absolutas pero de distinto signo al norte y al sur de la latitud de referencia.

VII – PROYECCIÓN GAUSS-KRUGER

La proyección cilíndrica conforme de Gauss – Kruger es una proyección transversa, o sea que el cilindro sobre el que se proyecta el elipsoide de referencia tiene su eje sobre el ecuador de este, y es tangente al mismo según un meridiano denominado meridiano central o de contacto (MC).

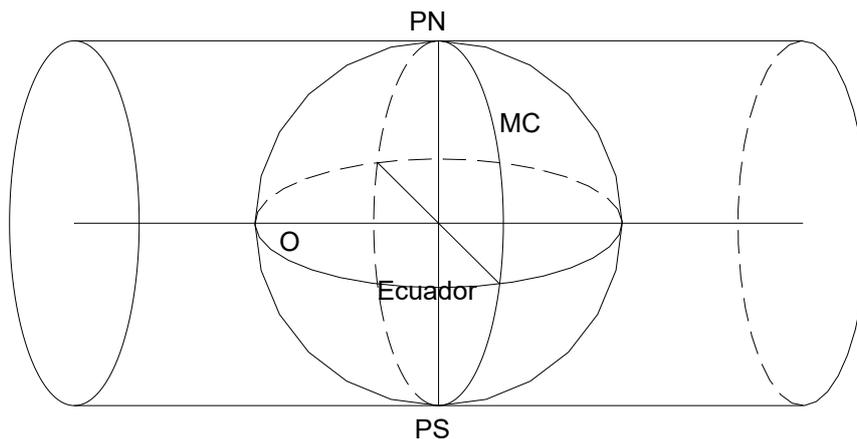


Fig. VII - 1

La condición de conformidad establece que para pequeñas figuras se mantengan los ángulos, es decir la forma de las mismas.

Para demostrar la conformidad es necesario introducir previamente algunos conceptos.

FUNCIONES HOLOMORFAS

Las funciones holomorfas son funciones de variable compleja definidas en el universo complejo. Dados dos planos y definiendo en ellos los sistemas de referencia (X,Y) y (x,y) , surge:

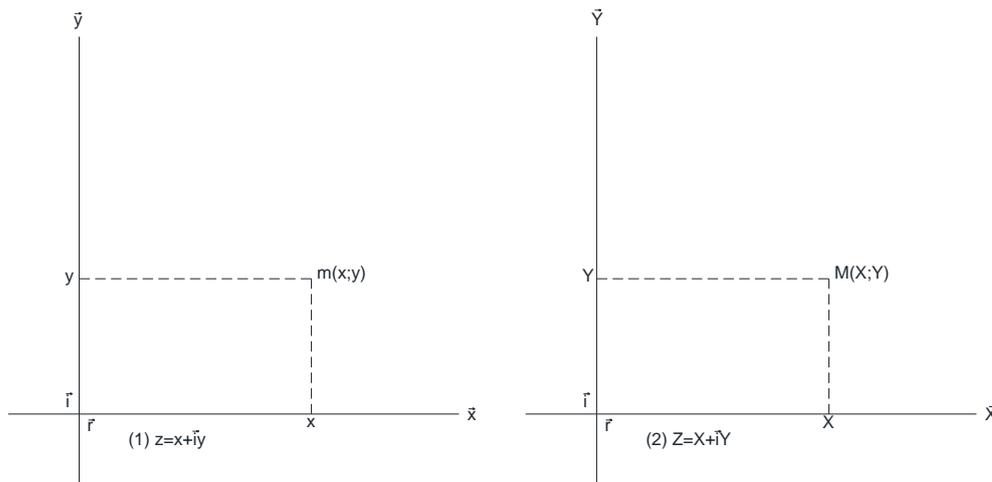


Fig. VII - 2

Si se puede definir una relación tal que sea:

(4) $X=X(x,y)$ e $Y=Y(x,y)$

entonces resulta (3) $Z=f(z)$

O sea que se establece una relación biunívoca entre ambos planos pues a cada punto “m” del plano (x,y) dado por $z(x,y)$, le corresponde un punto “M” del plano (X,Y) a través de la transformación $Z(X,Y)=f(z)$ y viceversa.

Diferenciando la expresión (2) se tiene:

$$dZ = \underbrace{\frac{\partial(X + iY)}{\partial X}}_1 dX + \underbrace{\frac{\partial(X + iY)}{\partial Y}}_{i} dY = dX + i dY$$

Ídem diferenciando la expresión (1) se tiene:

$$dz = \underbrace{\frac{\partial(x + iy)}{\partial x}}_1 dx + \underbrace{\frac{\partial(x + iy)}{\partial y}}_{i} dy = dx + i dy$$

Por la relación (4) se ve que tanto X como Y son funciones de (x,y) por lo tanto:

$$dX = \frac{\partial[X(x, y)]}{\partial x} dx + \frac{\partial[X(x, y)]}{\partial y} dy = \frac{\partial X}{\partial x} dx + \frac{\partial X}{\partial y} dy$$

$$dY = \frac{\partial[Y(x, y)]}{\partial x} dx + \frac{\partial[Y(x, y)]}{\partial y} dy = \frac{\partial Y}{\partial x} dx + \frac{\partial Y}{\partial y} dy$$

En las expresiones anteriores de dX y de dY no se consideran las derivadas parciales dX.dY pues x e y son variables independientes.

Por lo tanto:

$$dZ = \frac{\partial X}{\partial x} dx + \frac{\partial X}{\partial y} dy + i \left(\frac{\partial Y}{\partial x} dx + \frac{\partial Y}{\partial y} dy \right) \quad (5)$$

Definición

“Si en un cierto dominio D podemos expresar

$$(6) dZ = (a + i b)(dx + i dy) = cdz \quad \text{con } |c| \neq 0$$

decimos que la función Z es una **función holomorfa** de z; D es el dominio de holomorfa y la expresión

$$(a + i b) = \frac{\partial Z}{\partial z} \Rightarrow dZ = \frac{\partial Z}{\partial z} dz$$

De igualar (5) y (6) vemos que en este caso la holomorfa se cumple para el dominio D dado por:

$$a = \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y} \quad \text{y} \quad b = -\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$$

Comprobémoslo sustituyendo estas expresiones de a y b en (5):

$$\begin{aligned} dZ &= adx - bdy + i(bdx + ady) \\ dZ &= adx - bdy + i bdx + i ady \\ dZ &= (a + i b)dx + i(i b + a)dy \\ (7) dZ &= (a + i b)(dx + i dy) \quad \text{l.q.q.d.} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la función Z antes definida es una función holomorfa de z en el dominio definido por las expresiones de a y b.

Admitiremos la siguiente **propiedad**: “Si una función holomorfa admite la derivada primera en el entorno de un punto, admite la derivada n-sima”

La demostración de esta propiedad se realiza por el método de inducción completa, pero escapa al contenido de esta publicación.

Concepto de Isometría

Consideremos una familia de curvas u y v pertenecientes a una superficie y tal que se cortan ortogonalmente.

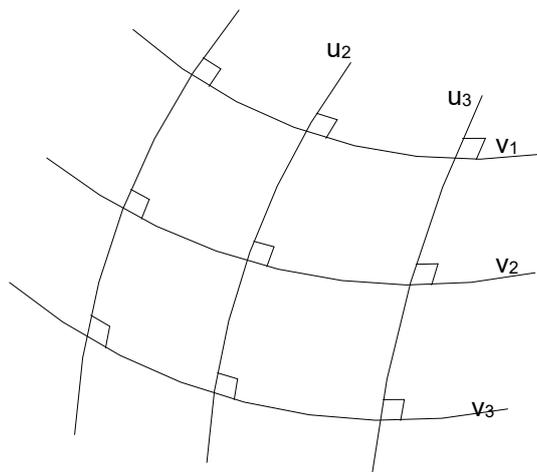


Fig. VII - 3

Dado un punto genérico P y un elemento de geodésica ds que pasa por P y pertenece a la superficie, si se cumple la siguiente relación: $ds^2 = k(du^2 + dv^2)$

decimos que las familias de curvas son **isométricas**, k es el **factor de isometría** y du y dv son los **parámetros isométricos**.

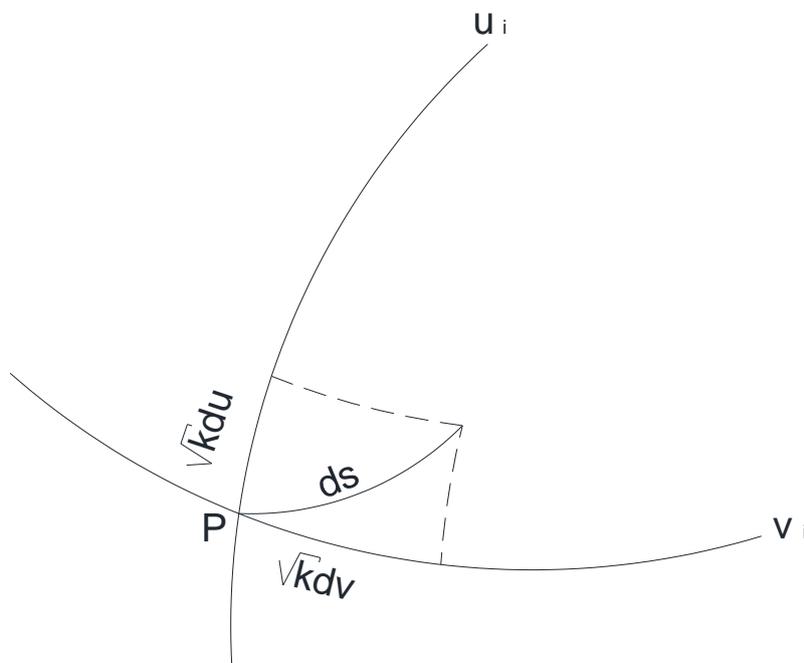


Fig. VII - 4

Como se observa, en toda superficie donde se puede establecer una relación de isometría (igual medida) a partir de familias de curvas (u,v) , la longitud de un elemento de geodésica ds permanece constante, a menos de un factor de escala k , independientemente de la dirección de la misma, por lo tanto podemos decir que la transformación es **CONFORME**.

Apliquemos ahora el concepto de isometría a la función holomorfa:

Partiendo de (7) se tiene:

$$dZ = (a + i\vec{b})(dx + i\vec{b}dy)$$

$$ds^2 = |dZ|^2 = |a + i\vec{b}|^2 |dx + i\vec{b}dy|^2$$

Pero el módulo de un numero complejo de la forma $P = p + i\vec{q}$ es $\rho^2 = |p + i\vec{q}|^2 = (p^2 + q^2)$

Por lo tanto $ds^2 = |dZ|^2 = (a^2 + b^2)(dx^2 + dy^2)$

donde $(a^2 + b^2)$ es el **factor de isometría** y (dx, dy) son los **parámetros isométricos**.

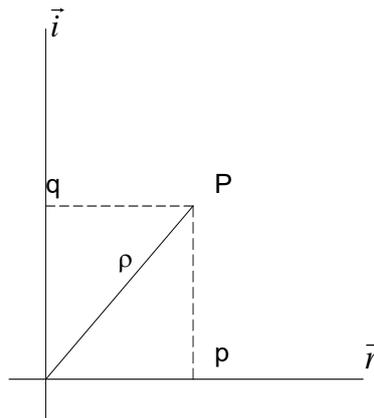


Fig. VII - 5

Por lo tanto podemos formular el siguiente

Corolario muy importante

“Toda **función holomorfa** representa una **transformación isométrica** y por lo tanto es **conforme**”

LEY DE LA PROYECCIÓN

Consideremos dos funciones a saber:

$$f(\varphi, \lambda) = \varphi + i\vec{\lambda} \quad \text{y} \quad F(\Phi, \lambda) = \Phi + i\vec{\lambda}$$

con $\Phi = \Phi(\varphi, \lambda)$ y $\lambda = \lambda(\varphi, \lambda) = \lambda$

Recordemos la expresión del desarrollo de Taylor para una función de una variable

$$f(x)_a = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots$$

y para una función de dos variables:

$$f(u, v)_{(u,v)_0} = f(u, v)_0 + \frac{f'(u, v)_0}{1!} [(u, v) - (u, v)_0] + \frac{f''(u, v)_0}{2!} [(u, v) - (u, v)_0]^2 + \dots$$

Desarrollemos por Taylor entonces la función $F(\Phi, \lambda)$; dado que el dominio de análisis del desarrollo es en un entorno del punto $(\Phi, \lambda)_0$, donde $(\Phi, \lambda)_0 = (\Phi, \lambda_0)$ con $\lambda_0 = \text{cte.}$, las derivadas parciales en el desarrollo lo serán solo respecto de Φ .

$$F(\Phi, \lambda) = \Phi + \vec{i} \lambda = F(\Phi, \lambda)_0 + \frac{F'(\Phi, \lambda)_0}{1!} [(\Phi, \lambda) - (\Phi, \lambda)_0] + \frac{F''(\Phi, \lambda)_0}{2!} [(\Phi, \lambda) - (\Phi, \lambda)_0]^2 + \dots$$

es decir

$$(8) F(\Phi, \lambda) = F(\Phi) + \frac{F'(\Phi)}{1!} [(\Phi, \lambda) - (\Phi, \lambda_0)] + \frac{F''(\Phi)}{2!} [(\Phi, \lambda) - (\Phi, \lambda_0)]^2 + \dots$$

donde $F'(\Phi) = \frac{\partial F(\Phi)}{\partial \Phi}$; $F''(\Phi) = \frac{\partial^2 F(\Phi)}{\partial \Phi^2}$; ...

Consideremos ahora el plano (Φ, λ) con la siguiente orientación:

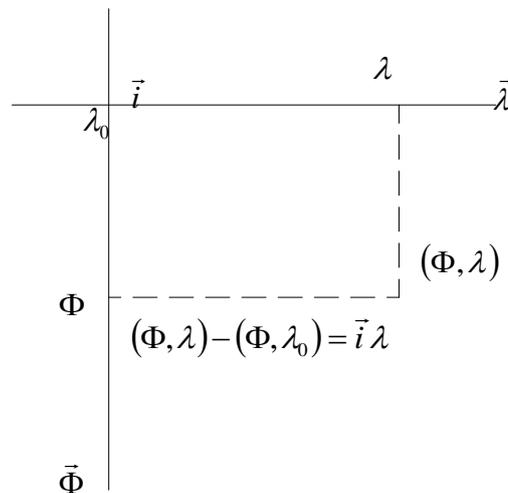


Fig. VII - 6

Por lo tanto es:

$$[(\Phi, \lambda) - (\Phi, \lambda_0)] = \vec{i} \lambda$$

$$[(\Phi, \lambda) - (\Phi, \lambda_0)]^2 = \vec{i}^2 \lambda^2$$

En definitiva la expresión (8) queda:

$$(9) F(\Phi, \lambda) = F(\Phi) + \frac{\partial F(\Phi)}{\partial \Phi} \frac{\vec{i}}{1!} \lambda + \frac{\partial^2 F(\Phi)}{\partial \Phi^2} \frac{\vec{i}^2 \lambda^2}{2!} + \dots$$

Esto explica porque en la proyección de Gauss el eje de las \vec{Y} es horizontal, pues en las ediciones cartográficas, se asocian las longitudes al eje de las abscisas, y el versor \vec{i} que está afectando a las longitudes, en las representaciones matemáticas se asocia al eje de las \vec{Y} .

Conclusión

En definitiva hemos establecido una transformación holomorfa $F(\Phi, \lambda)$ donde a cada punto de la superficie (φ, λ) le hace corresponder otro de la superficie (Φ, λ) a través de las expresiones:

$$\Phi = \Phi(\varphi, \lambda) \text{ y } \lambda = \lambda(\varphi, \lambda) = \lambda.$$

Para que esta transformación $F(\Phi, \lambda)$ sea la proyección de Gauss, le impondremos tres condiciones:

CONDICIONES DE LA PROYECCIÓN

1. El meridiano de contacto (MC) debe ser representado por una recta sin deformaciones.
2. El ecuador debe ser representado por una recta perpendicular a la representación del meridiano de contacto.
3. La transformación debe ser conforme.

Impondremos estas condiciones a la expresión (9) de la ley de la proyección.

Condición Nro. 1

En el meridiano de contacto (MC) se cumple que $\lambda=0$ (estrictamente se trata de diferencias de longitudes respecto de la longitud del MC por lo tanto sería $\Delta\lambda=0$)

La longitud de un arco de meridiano en el elipsoide desde el ecuador hasta un punto de latitud φ esta dada por la expresión:

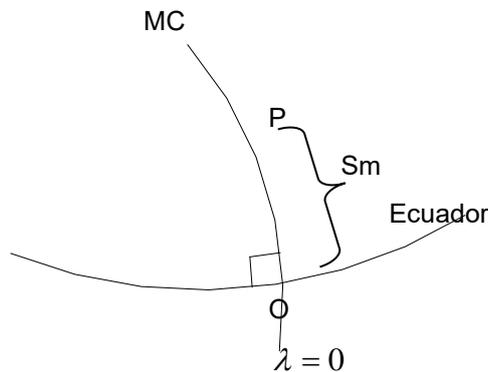


Fig. VII - 7

$$OP = S_m = \int_0^{\varphi} \rho \cdot d\varphi$$

Como $\lambda=0$, la expresión (9) se reduce a $F(\Phi + \vec{i}\lambda) = F(\Phi)$ que es una función real. Para que

no existan deformaciones debe ser (9.1) $F(\Phi) = s_m = \int_0^{\varphi} \rho \cdot d\varphi$

Analicemos en forma genérica la expresión $s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho \cdot d\varphi$

$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho \cdot d\varphi = a(1 - e^2) \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

Desarrollando $(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{-3/2}$ se tiene:

$$(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{-\frac{3}{2}} = 1 + \frac{3}{2} e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi + \frac{15}{8} e^4 \operatorname{sen}^4 \varphi + \frac{35}{16} e^6 \operatorname{sen}^6 \varphi + \dots$$

Pero

$$\operatorname{sen}^2 \varphi = \frac{1 - \cos(2\varphi)}{2}$$

$$\operatorname{sen}^4 \varphi = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos(2\varphi) + \frac{1}{8} \cos(4\varphi)$$

$$\operatorname{sen}^6 \varphi = \frac{5}{16} - \frac{15}{32} \cos(2\varphi) + \frac{3}{16} \cos(4\varphi) - \frac{1}{32} \cos(6\varphi)$$

por lo tanto, sustituyendo es:

$$(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{-\frac{3}{2}} = 1 + \frac{3}{4} e^2 [1 - \cos(2\varphi)] + \frac{15}{8} e^4 \left[\frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos(2\varphi) + \frac{1}{8} \cos(4\varphi) \right] + \frac{35}{16} e^6 \left[\frac{5}{16} \cos(2\varphi) + \frac{3}{16} \cos(4\varphi) - \frac{1}{32} \cos(6\varphi) \right] + \dots$$

Llamando:

$$A = 1 + \frac{3}{4} e^2 + \frac{45}{64} e^4 - \frac{175}{256} e^6$$

$$B = \frac{3}{4} e^2 + \frac{15}{16} e^4 + \frac{525}{512} e^6$$

$$C = \frac{15}{64} e^4 - \frac{105}{256} e^6$$

$$D = \frac{35}{512} e^6 \text{ resulta:}$$

$$(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{-\frac{3}{2}} = A - B \cdot \cos(2\varphi) + C \cdot \cos(4\varphi) - D \cdot \cos(6\varphi) \dots$$

$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left[a(1 - e^2) \cdot (A - B \cdot \cos(2\varphi) + C \cdot \cos(4\varphi) - D \cdot \cos(6\varphi)) \right] d\varphi$$

$$s = a(1 - e^2) \left[A \cdot (\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{B}{2} \cdot (\text{sen}(2\varphi_2) - \text{sen}(2\varphi_1)) + \frac{C}{4} \cdot (\text{sen}(4\varphi_2) - \text{sen}(4\varphi_1)) - \frac{D}{6} \cdot (\text{sen}(6\varphi_2) - \text{sen}(6\varphi_1)) \right]$$

En el caso de la proyección de Gauss – Kruger, la longitud del arco de meridiano se mide desde el ecuador ($\varphi=0$), hasta la latitud φ , por lo tanto es: $\varphi_1=0$ y $\varphi_2=\varphi$, y en consecuencia queda:

$$s = a(1 - e^2) \cdot \left[A \cdot \varphi - \frac{B}{2} \cdot \text{sen}(2\varphi) + \frac{C}{4} \cdot \text{sen}(4\varphi) - \frac{D}{6} \cdot \text{sen}(6\varphi) \right]$$

Con esta expresión se obtiene una precisión en la longitud del arco de 1mm.

Condición Nro.3

Impongamos ahora la tercera condición: la transformación holomorfa (9) $F(\varphi, \lambda)$ será isométrica y por lo tanto conforme si se introducen $d\varphi$ y $d\lambda$ como parámetros isométricos para el elipsoide.

Para ello analicemos la isometría en el elipsoide.

Consideremos un elemento infinitesimal de geodésica ds

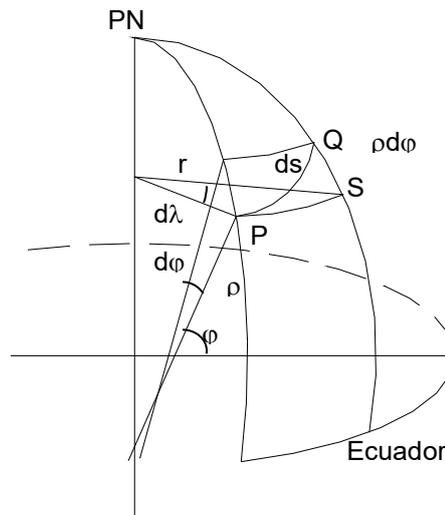


Fig. VII - 8

$$QS = \rho \cdot d\varphi$$

$$PS = r \cdot d\lambda = N \cdot \cos\varphi \cdot d\lambda$$

$$ds^2 = PS^2 + QS^2 \text{ por lo tanto:}$$

$$ds^2 = \rho^2 \cdot d\varphi^2 + (N \cdot \cos\varphi)^2 \cdot d\lambda^2$$

$$ds^2 = (N \cdot \cos\varphi)^2 \cdot \left(\frac{\rho^2}{N^2 \cdot \cos^2\varphi} \cdot d\varphi^2 + d\lambda^2 \right) \text{ pero } N^2 \cdot \cos^2\varphi = r^2, \text{ por lo tanto}$$

$$ds^2 = r^2 \cdot \left(\frac{\rho^2}{r^2} \cdot d\varphi^2 + d\lambda^2 \right) \text{ y haciendo el cambio de variable (10) } d\Phi = \frac{\rho}{r} \cdot d\varphi \text{ es:}$$

$ds^2 = r^2 \cdot (d\Phi^2 + d\lambda^2)$ que es la condición de isometría, donde r^2 es el factor de isometría y $d\Phi$ y $d\lambda$ son los parámetros isométricos.

Integrando la expresión (10) se obtiene:

$$\Phi = \int_0^\varphi \frac{\rho}{r} \cdot d\varphi = L \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \right] - \left(e^2 \cdot \operatorname{sen} \varphi + \frac{e^4}{3!} \operatorname{sen}^3 \varphi + \dots \right)$$

La variable Φ se denomina latitud creciente elipsoidal.

Asumiendo entonces como parámetros isométricos $d\Phi$ y $d\lambda$, la proyección de Gauss – Kruger será isométrica y por lo tanto conforme.

De la expresión (9) de $F(\Phi, \lambda)$ ya hemos establecido el valor del primer sumando $F(\Phi)$; ahora calcularemos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial F(\Phi)}{\partial \Phi} = \frac{\partial F(\Phi)}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \Phi}$$

De la expresión (10) sabemos que: $\partial \Phi = \frac{\rho}{r} \cdot \partial \varphi \therefore \frac{\partial \varphi}{\partial \Phi} = \frac{r}{\rho} = \frac{N \cdot \cos \varphi}{\rho}$

Recordando que $F(\Phi) = \int_0^\varphi \rho \cdot d\varphi$, es $\frac{\partial F(\Phi)}{\partial \varphi} = \rho$, o sea

$$(11) \quad \frac{\partial F(\Phi)}{\partial \Phi} = \rho \cdot \frac{N \cdot \cos \varphi}{\rho} = N \cdot \cos \varphi$$

Calculemos ahora la derivada segunda:

$$\frac{\partial^2 F(\Phi)}{\partial \Phi^2} = \frac{\partial(N \cdot \cos \varphi)}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \Phi} = \frac{\partial(N \cdot \cos \varphi)}{\partial \varphi} \cdot \frac{r}{\rho}$$

$$\begin{aligned} \text{Pero, } \frac{\partial(N \cdot \cos \varphi)}{\partial \varphi} &= \frac{\partial \left[\frac{a \cdot \cos \varphi}{(1 - e^2 \cdot \operatorname{sen}^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}} \right]}{\partial \varphi} = \\ &= \frac{-a \cdot \operatorname{sen} \varphi \cdot (1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} + a \cdot \cos \varphi \cdot \frac{1}{2} (1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2e^2 \cdot \operatorname{sen} \varphi \cdot \cos \varphi}{1 - e^2 \cdot \operatorname{sen}^2 \varphi} = \\ &= \frac{a(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}}{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} \left[e^2 \cos^2 \varphi \cdot \operatorname{sen} \varphi - \operatorname{sen} \varphi \cdot (1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi) \right] = \\ &= \frac{a \cdot \operatorname{sen} \varphi}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} (e^2 \cos^2 \varphi - 1 + e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi) = \end{aligned}$$

$$= \frac{a(e^2 - 1)}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} \cdot \operatorname{sen} \varphi = -\rho \cdot \operatorname{sen} \varphi \text{ por lo tanto:}$$

$$(12) \frac{\partial F(\Phi)}{\partial \Phi^2} = -\rho \cdot \operatorname{sen} \varphi \cdot \frac{r}{\rho} = -N \cdot \operatorname{sen} \varphi \cdot \cos \varphi$$

Si continuamos derivando será:

$$(13) \frac{\partial^3 F(\Phi)}{\partial \Phi^3} = -N \cdot \cos^3 \varphi \cdot (1 - \operatorname{tg}^2 \varphi + \frac{e^2}{1 - e^2} \cdot \cos^2 \varphi)$$

$$(14) \frac{\partial^4 F(\Phi)}{\partial \Phi^4} = N \cdot \cos^3 \varphi \cdot \operatorname{sen} \varphi \cdot (5 - \operatorname{tg}^2 \varphi + \frac{9e^2}{1 - e^2} \cdot \cos^2 \varphi + \frac{4e^2 \cos(4\varphi)}{1 - e^2})$$

Recordando que

$$F(\Phi + \vec{i}\lambda) = F(\Phi) + \frac{\vec{i}\lambda}{1!} \cdot \frac{\partial F(\Phi)}{\partial \Phi} - \frac{\lambda^2}{2!} \cdot \frac{\partial^2 F(\Phi)}{\partial \Phi^2} - \frac{\vec{i}\lambda^3}{3!} \cdot \frac{\partial^3 F(\Phi)}{\partial \Phi^3} + \frac{\lambda^4}{4!} \cdot \frac{\partial^4 F(\Phi)}{\partial \Phi^4} + \dots$$

pues $\vec{i}^2 = -1$; $\vec{i}^3 = -\vec{i}$; $\vec{i}^4 = 1$; ...

Descomponiendo la función $F(\Phi + \vec{i}\lambda)$ en su parte real e imaginaria y llamándolas X e Y respectivamente, se tiene $F(\Phi + \vec{i}\lambda) = X + \vec{i}Y$ con

$$(15) X = F(\Phi) - \frac{\lambda^2}{2!} \frac{\partial^2 F(\Phi)}{\partial \Phi^2} + \frac{\lambda^4}{4!} \frac{\partial^4 F(\Phi)}{\partial \Phi^4} - \dots$$

$$(16) Y = \lambda \frac{\partial F(\Phi)}{\partial \Phi} - \frac{\lambda^3}{3!} \frac{\partial^3 F(\Phi)}{\partial \Phi^3} + \dots$$

Verifiquemos ahora la condición de conformidad de la función $F(\Phi + \vec{i}\lambda) = X + \vec{i}Y$ aplicando las condiciones de homomorfismo establecidas en (7), llamadas condiciones de conformidad de Cauchy – Riemann en función de parámetros isométricos.

Recordemos que era:

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y} \quad \text{y ademas} \quad - \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} \quad \text{con } x = \Phi, \text{ e } y = \lambda$$

Derivando las expresiones (15) y (16) tenemos:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial \Phi} &= \frac{\partial F(\Phi)}{\partial \Phi} - \frac{\lambda^2}{2!} \frac{\partial^3 F(\Phi)}{\partial \Phi^3} + \dots \\ \frac{\partial Y}{\partial \lambda} &= \frac{\partial F(\Phi)}{\partial \Phi} - \frac{3 \cdot \lambda^2}{3 \cdot 2!} \frac{\partial^3 F(\Phi)}{\partial \Phi^3} + \dots \end{aligned} \right| \Rightarrow \text{son iguales}$$

$$-\frac{\partial X}{\partial \lambda} = - \left[-\frac{2 \cdot \lambda}{2!} \frac{\partial^2 F(\Phi)}{\partial \Phi^2} + \frac{4 \cdot \lambda^3}{4 \cdot 3!} \frac{\partial^4 F(\Phi)}{\partial \Phi^4} + \dots \right]$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \Phi} = \lambda \frac{\partial^2 F(\Phi)}{\partial \Phi^2} - \frac{\lambda^3}{3!} \frac{\partial^4 F(\Phi)}{\partial \Phi^4} + \dots$$

⇒ son iguales

Por lo tanto **la transformación es conforme**.

Volviendo a las expresiones (15) y (16) hagamos los siguientes cambios de variable:

$$t = \operatorname{tg} \varphi$$

$$n = \sqrt{\frac{e^2}{1 - e^2}} \cdot \cos \varphi$$

$$1 + n^2 = \frac{N}{\rho}$$

$$t_1 = N \cdot \cos \varphi$$

$$t_2 = \frac{1}{2!} N \cdot \operatorname{sen} \varphi \cdot \cos \varphi$$

$$t_3 = \frac{1}{3!} N \cdot \cos^3 \varphi (1 - t^2 + n^2)$$

$$t_4 = \frac{1}{4!} N \cdot \operatorname{sen} \varphi \cdot \cos^3 \varphi (5 - t^2 + 9n^2 + 4n^4)$$

Sustituyendo estos cambios de variables en las expresiones (15) y (16) se obtiene la

LEY DE LA PROYECCIÓN

$$\begin{aligned} X &= s + t_2 \lambda^2 + t_4 \lambda^4 + t_6 \lambda^6 + \dots \\ Y &= t_1 \lambda + t_3 \lambda^3 + t_5 \lambda^5 + \dots \end{aligned}$$

En estas expresiones, considerando X hasta el sexto orden e Y hasta el quinto orden, y $\Delta\lambda = \pm 3^0$,

da una precisión en X e Y del orden de $\frac{1}{10^6}$.

Probemos ahora la segunda condición impuesta a la proyección de Gauss – Kruger, o sea que el ecuador se represente por una recta. Como ya se ha probado que la proyección es conforme, esta recta será necesariamente perpendicular a la representación del meridiano de contacto pues los meridianos son perpendiculares al ecuador en el elipsoide terrestre.

En el ecuador $\varphi = 0^0$ y $s = 0$, por lo tanto:

$$t_2 = t_4 = \dots = 0$$

$$t^*_1 = t_1(\varphi = 0)$$

$$t^*_3 = t_3(\varphi = 0)$$

Por lo tanto la ecuación paramétrica de la transformada del ecuador queda:

$$X = 0$$

$$Y = t^*_1\lambda + t^*_3\lambda^3 + \dots$$

En definitiva queda: $Y=F(\lambda)$, que es una función de λ , generalmente $\neq 0$ y que representa una recta horizontal que pasa por el origen, por lo tanto es el eje OY.

De esta forma queda introducida la Ley de la proyección de Gauss – Kruger y se ha demostrado que cumple con las tres condiciones impuestas.

Características del canevas o reticulado de Gauss – Kruger

Si bien la proyección de Gauss – Kruger es una transformación exclusivamente analítica que responde a la ley ya vista, es posible asimilarla, dentro de ciertos límites, a una proyección geométrica.

Supongamos un cilindro tangente al elipsoide que representa a la Tierra, según un meridiano.

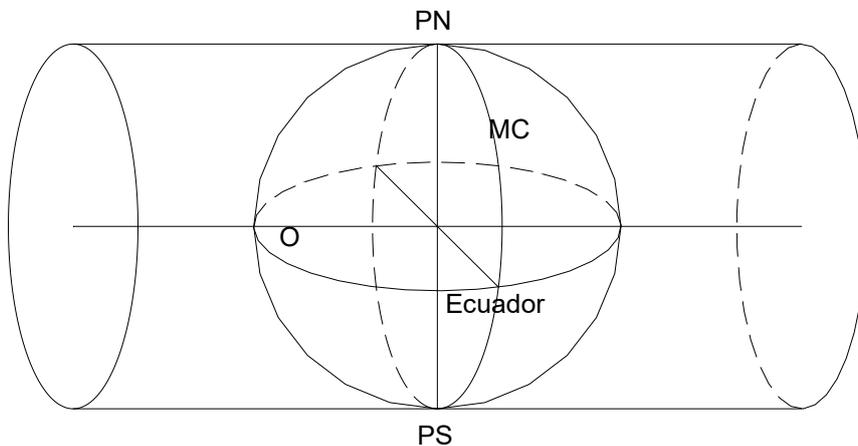


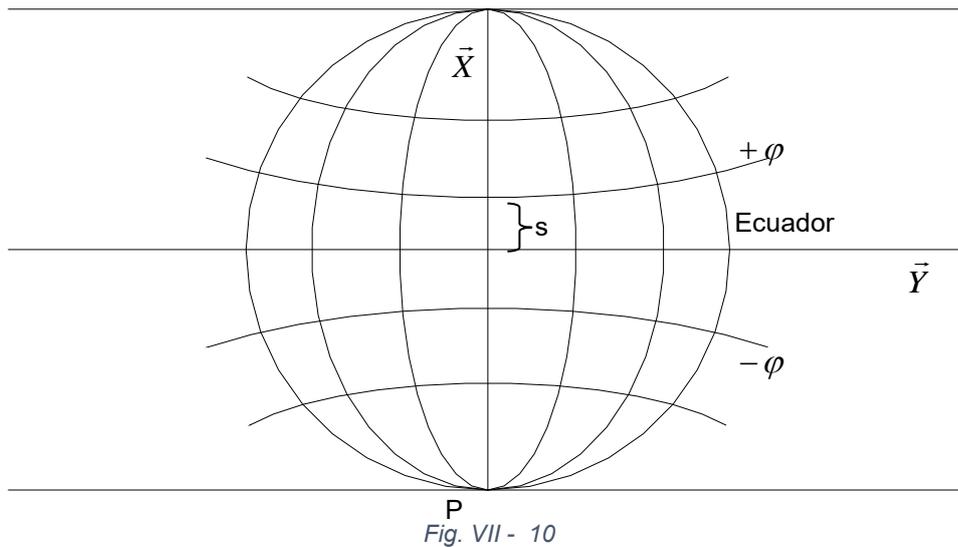
Fig. VII - 9

El canevas puede considerarse como la proyección de los paralelos y de los meridianos sobre el cilindro, desarrollándose luego este sobre el plano.

$$\Delta\lambda = -90^\circ$$

PN MC

$$\Delta\lambda = +90^\circ$$



Meridianos

Analizando la ley de la proyección establecida en (15) y (16) estudiemos la paridad de los meridianos.

Considerando $\Delta\lambda$ y $-\Delta\lambda$, tenemos:

$$X(\Delta\lambda) = X(-\Delta\lambda)$$

$$Y(\Delta\lambda) = -Y(-\Delta\lambda)$$

por lo tanto la función es par respecto de X e impar respecto de Y

Por lo tanto los meridianos son simétricos respecto del eje X.

Paralelos

Considerando ahora φ y $-\varphi$ tenemos:

X es función de $\text{sen } \varphi$, $\text{cos } \varphi$ y $\text{tg}^2 \varphi$; el signo de $\text{sen } \varphi$ cambia y el de $\text{cos } \varphi$ y $\text{tg}^2 \varphi$ quedan iguales, por lo tanto:

$$X(\varphi) = -X(-\varphi)$$

Y esta en función de $\text{cos } \varphi$ y de $\text{tg}^2 \varphi$ por lo tanto

$$Y(\varphi) = Y(-\varphi)$$

Por lo tanto los paralelos son simétricos respecto del eje Y.

Corolario

Como el eje X y el eje Y son ejes de simetría, existe una simetría central respecto del origen O.

Aproximaciones

La representación de meridianos y paralelos no corresponde a curvas simples pero se pueden realizar aproximaciones.

Desarrollando las expresiones de X e Y solo hasta el primer término se tiene:

Paralelos: $\varphi = cte.$

$$X = s + \frac{\lambda^2}{2!} N \cdot \text{sen} \varphi \cdot \cos \varphi$$

$$Y = \lambda \cdot N \cdot \cos \varphi \Rightarrow \lambda^2 = \frac{Y^2}{N^2 \cdot \cos^2 \varphi} \text{ por lo tanto}$$

$$X = s + \frac{Y^2}{2 \cdot N^2 \cdot \cos^2 \varphi} \cdot N \cdot \text{sen} \varphi \cdot \cos \varphi = s + \frac{Y^2}{2} \cdot \frac{\text{tg} \varphi}{N} \text{ y llamando } \frac{\text{tg} \varphi}{N} = \frac{1}{p} \text{ es:}$$

(17) $X = s + \frac{Y^2}{2p}$ que es la ecuación de una parábola cuyo eje es el eje X, el vértice se encuentra a una distancia s de O y la concavidad está dirigida hacia el polo.

Meridianos: $\lambda = cte.$

Haciendo variar φ entre 0° y $\pm 90^\circ$, queda $Y = F(\cos \varphi)$, es decir que los meridianos responden a una función cosenoidal de φ .

Cuando φ aumenta, Y decrece, y para $\varphi = \pm 90^\circ$, $Y = 0$. Por lo tanto los meridianos tienen la concavidad dirigida al meridiano de contacto (MC) y pasan por los polos.

Los meridianos correspondientes a $\Delta\lambda = \pm 90^\circ$ se representan por rectas horizontales que pasan por los polos.

Convergencia plana de los meridianos

Definición: "Se llama convergencia plana de los meridianos al ángulo γ que forma la paralela al meridiano de contacto con la tangente a la transformada del meridiano en el punto considerado"

Naturalmente también es el ángulo entre la tangente a la transformada del paralelo que pasa por el punto, y la perpendicular al meridiano de contacto.

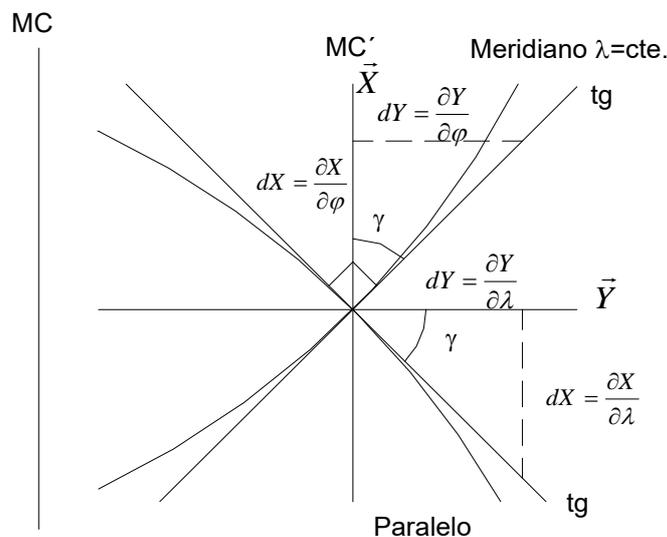


Fig. VII - 11

$$tg\gamma = \frac{\frac{\partial X}{\partial \lambda}}{\frac{\partial Y}{\partial \lambda}} = \frac{\frac{\partial X}{\partial \varphi}}{\frac{\partial Y}{\partial \varphi}}$$

Teníamos que:

$$X = s + \frac{\lambda^2}{2!} N \text{sen} \varphi \cdot \cos \varphi + \frac{\lambda^4}{4!} N \text{sen} \varphi \cdot \cos^3 \varphi (5 - t^2 + 9n^2 + 4n^4) + \dots$$

$$Y = \lambda N \cos \varphi + \frac{\lambda^3}{3!} N \cos^3 \varphi (1 - t^2 + n^2) + \dots$$

$$tg\gamma = \frac{\frac{\partial X}{\partial \lambda}}{\frac{\partial Y}{\partial \lambda}} = \frac{\lambda N \text{sen} \varphi \cdot \cos \varphi + \frac{1}{6} \lambda^3 N \text{sen} \varphi \cdot \cos^3 \varphi (5 - t^2 + 9n^2 + 4n^4)}{N \cos \varphi + \frac{\lambda^2}{2} N \cos^3 \varphi (1 - t^2 + n^2)} =$$

$$= \frac{N \cos \varphi \left[\lambda \text{sen} \varphi + \frac{\lambda^3}{6} \text{sen} \varphi \cdot \cos^2 \varphi (5 - t^2 + 9n^2 + 4n^4) \right]}{N \cos \varphi \left[1 + \frac{\lambda^2}{2} \cos^2 \varphi (1 - t^2 + n^2) \right]} \Rightarrow$$

$$tg\gamma = \left[\lambda \text{sen} \varphi + \frac{\lambda^3}{6} \text{sen} \varphi \cdot \cos^2 \varphi (5 - t^2 + 9n^2 + 4n^4) \right] \cdot \underbrace{\left[1 + \frac{\lambda^2}{2} \cos^2 \varphi (1 - t^2 + n^2) \right]^{-1}}_{\text{desarrollando hasta el 1er término:}}$$

$$tg\gamma = \left[\lambda \text{sen} \varphi + \frac{\lambda^3}{6} \text{sen} \varphi \cdot \cos^2 \varphi (5 - t^2 + 9n^2 + 4n^4) \right] \cdot \left[1 - \frac{\lambda^2}{2} \cos^2 \varphi (1 - t^2 + n^2) \right] =$$

$$= \lambda \text{sen} \varphi - \frac{\lambda^3}{2} \text{sen} \varphi \cdot \cos^2 \varphi (1 - t^2 + n^2) + \frac{\lambda^3}{6} \text{sen} \varphi \cdot \cos^2 \varphi (5 - t^2 + 9n^2 + 4n^4) + \dots$$

desprecia términos > al 3er orden

$$tg\gamma = \lambda \text{sen} \varphi + \frac{\lambda^3}{6} \text{sen} \varphi \cdot \cos^2 \varphi \cdot \left[-3(1 - t^2 + n^2) + (5 - t^2 + 9n^2 + 4n^4) \right]$$

$$tg\gamma = \lambda \text{sen} \varphi + \frac{\lambda^3}{3} \text{sen} \varphi \cdot \cos^2 \varphi \cdot (1 + t^2 + 3n^2 + 2n^4)$$

Desarrollando el arco (γ) en función de la tangente es:

$$\gamma = tg\gamma - \frac{1}{3} tg^3 \gamma + \frac{1}{5} tg^5 \gamma + \dots$$

desprecia términos > al 3er orden

$$\gamma = \lambda \operatorname{sen} \varphi + \frac{\lambda^3}{3} \operatorname{sen} \varphi \cdot \cos^2 \varphi \cdot (1 + t^2 + 3n^2 + 2n^4) - \frac{1}{3} \left[\lambda \operatorname{sen} \varphi + \frac{\lambda^3}{3} \operatorname{sen} \varphi \cdot \cos^2 \varphi \cdot (1 + t^2 + 3n^2 + 2n^4) \right]^3$$

$$\cong \lambda^3 \operatorname{sen}^3 \varphi$$

$$\gamma = \lambda \operatorname{sen} \varphi + \frac{\lambda^3}{3} \operatorname{sen} \varphi \cdot \cos^2 \varphi \cdot (1 + t^2 + 3n^2 + 2n^4) - \frac{1}{3} \lambda^3 \operatorname{sen}^3 \varphi$$

$$\gamma = \lambda \operatorname{sen} \varphi + \frac{\lambda^3}{3} \operatorname{sen} \varphi \cdot \cos^2 \varphi (1 + 3n^2 + 2n^4) + \frac{\lambda^3}{3} \operatorname{sen} \varphi \cdot \cos^2 \varphi \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} - \frac{1}{3} \lambda^3 \operatorname{sen}^3 \varphi$$

$$\gamma = \lambda \operatorname{sen} \varphi + \frac{\lambda^3}{3} \operatorname{sen} \varphi \cdot \cos^2 \varphi (1 + 3n^2 + 2n^4) + \frac{\lambda^3}{3} \operatorname{sen}^3 \varphi - \frac{\lambda^3}{3} \operatorname{sen}^3 \varphi$$

$$\gamma = \lambda \operatorname{sen} \varphi + \frac{\lambda^3}{3} \operatorname{sen} \varphi \cdot \cos^2 \varphi (1 + 3n^2 + 2n^4) \text{ con } \lambda \text{ en radianes}$$

Coefficiente de deformación lineal k para elementos infinitesimales

El coeficiente de deformación lineal “k” se define como la relación entre la longitud de la representación de un elemento de geodésica en el plano de Gauss, sobre la longitud de dicho elemento de geodésica en el elipsoide. Esta definición es válida naturalmente cuando los elementos de geodésica son arcos de paralelo o de meridiano.

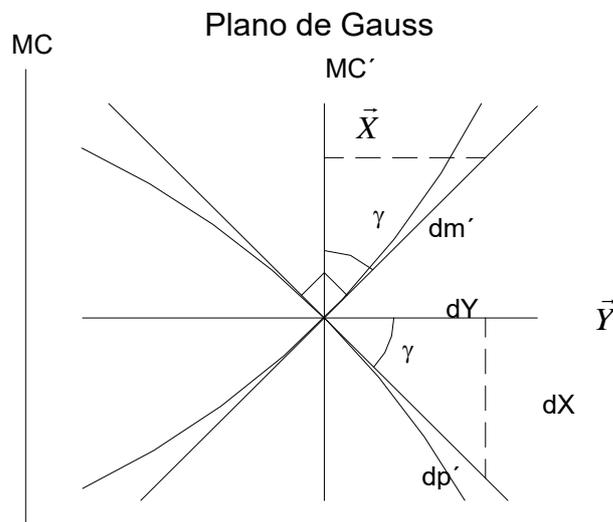


Fig. VII - 12

P Elipsoide

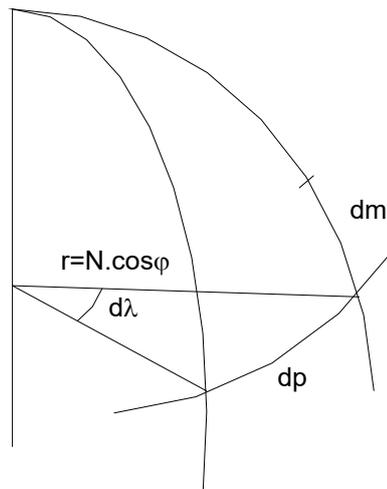


Fig. VII - 13

$$k = \frac{dp'}{dp} = \frac{dm'}{dm} \left\{ \begin{array}{l} dp' = \frac{dY}{\cos \gamma} = \sec \gamma \cdot dY \\ dp = N \cdot \cos \varphi \cdot d\lambda \end{array} \right\} k = \frac{\sec \gamma \cdot dY}{N \cdot \cos \varphi \cdot d\lambda}$$

De la expresión de γ , desarrollándola hasta el 1^{er} orden en λ es:

$$\gamma = \lambda \cdot \text{sen} \varphi$$

Desarrollando $\sec \gamma \cong 1 + \frac{\gamma^2}{2} + \dots$

Sustituyendo es: $\sec \gamma \cong 1 + \frac{\lambda^2 \cdot \text{sen}^2 \varphi}{2} + \dots$

Por lo tanto: $k = \frac{1 + \frac{\lambda^2 \text{sen}^2 \varphi}{2}}{N \cos \varphi} \cdot \frac{dY}{d\lambda}$

Determinemos la expresión $\frac{dY}{d\lambda}$:

$Y = \lambda N \cos \varphi + \frac{\lambda^3}{3!} N \cos^3 \varphi (1 - t^2 + n^2)$; diferenciando es

$$dY = \left[N \cos \varphi + \frac{\lambda^2}{2} N \cos^3 \varphi (1 - t^2 + n^2) \right] \cdot d\lambda$$

$$\frac{dY}{d\lambda} = \left[N \cos \varphi + \frac{\lambda^2}{2} N \cos^3 \varphi (1 - t^2 + n^2) \right]$$

$$\frac{dY}{d\lambda} = N \cos \varphi \left[1 + \frac{\lambda^2}{2} \cos^2 \varphi (1 - t^2 + n^2) \right] \text{ y sustituyendo en la expresión de k es:}$$

$$k = \frac{1 + \frac{\lambda^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}{2}}{N \cos \varphi} N \cos \varphi \left[1 + \frac{\lambda^2}{2} \cos^2 \varphi (1 - t^2 + n^2) \right] \text{ por lo tanto}$$

$$k = \left(1 + \frac{\lambda^2}{2} \operatorname{sen}^2 \varphi \right) \cdot \left[1 + \frac{\lambda^2}{2} \cos^2 \varphi (1 - t^2 + n^2) \right]$$

Desarrollando esta expresión:

$$k = 1 + \frac{\lambda^2}{2} \cos^2 \varphi (1 - t^2 + n^2) + \frac{\lambda^2}{2} \operatorname{sen}^2 \varphi + \dots$$

desprecia el 4^{to} orden

$$k = 1 + \frac{\lambda^2}{2} \cos^2 \varphi (1 + n^2) - \frac{\lambda^2}{2} \cos^2 \varphi \cdot \underbrace{\frac{\operatorname{sen}^2 \varphi}{\cos^2 \varphi}}_{t^2} + \frac{\lambda^2}{2} \operatorname{sen}^2 \varphi$$

$$t^2 = \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} = \operatorname{tg}^2 \varphi$$

$$k = 1 + \frac{\lambda^2}{2} \cos^2 \varphi (1 + n^2) \text{ con } \lambda \text{ en radianes}$$

Como se ve, $k \geq 1$ y por lo tanto podemos decir que es un módulo de ampliación.

Analicemos la expresión $(1+n^2)$

$$1 + n^2 = \frac{N}{\rho} = \frac{a}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}} \frac{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}{a(1 - e^2)} = \frac{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}{1 - e^2}$$

$$n^2 = \frac{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}{1 - e^2} - 1 = \frac{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi - 1 + e^2}{1 - e^2} = \frac{e^2 (1 - \operatorname{sen}^2 \varphi)}{1 - e^2} = \frac{e^2 \cos^2 \varphi}{1 - e^2} \Rightarrow$$

$$n = \sqrt{\frac{e^2}{1 - e^2}} \cdot \cos \varphi \text{ que es la expresión de n que ya hemos visto.}$$

No obstante, introduzcamos la igualdad $1 + n^2 = \frac{N}{\rho}$ en la expresión de k:

$$k = 1 + \frac{\lambda^2}{2} \frac{N}{\rho} \cos^2 \varphi$$

Analicemos ahora el valor de k en función de las coordenadas planas (X,Y) en el entorno de un punto.

$$Y \cong N \cdot \lambda \cdot \cos \varphi \Rightarrow \lambda \cdot \cos \varphi = \frac{Y}{N}; \text{ sustituyendo en la expresión anterior de k es:}$$

$$k = 1 + \frac{Y^2}{N^2} \frac{N}{2\rho} = 1 + \frac{Y^2}{2\rho N} \text{ y definiendo el radio medio del elipsoide como } R_m = \sqrt{\rho \cdot N} \text{ es:}$$

$$k = 1 + \frac{Y^2}{2R_m^2}$$

Propiedades del módulo de deformación lineal "k"

1- Meridiano de contacto

Recordemos que $Y \cong N\lambda \cos\varphi$, por lo tanto, para $\lambda=0$ es $Y=0$ o sea $k=1$ pero $Y=0$ es la ecuación del meridiano de contacto y como $k=1$ implica que en el meridiano de contacto no existen deformaciones.

2- Meridiano cualquiera $\lambda=\text{cte}$

Si nos movemos sobre un meridiano con $\lambda=\text{cte}$ y analizamos la variación de φ es:

Si $\varphi=0^\circ \Rightarrow \cos\varphi=1 \Rightarrow k$ es máximo

Si $\varphi=\pm 90^\circ \Rightarrow \cos\varphi=0 \Rightarrow k=1$ por lo tanto es mínimo

En definitiva, sobre un meridiano al aumentar $|\varphi|$, k disminuye hasta llegar a $\varphi=\pm 90^\circ$ donde $k=1$.

3- Paralelo cualquiera $\varphi=\text{cte}$

En esta proyección nos limitamos a un huso de 3° con centro en el meridiano central

Si $\lambda=0 \Rightarrow k=1$ por lo tanto k es mínimo en el meridiano central

Si $|\lambda|>0$, k aumenta. En definitiva, si nos alejamos del meridiano central sobre un paralelo, k aumenta.

4- Recta paralela al meridiano central

Como vemos $k=f(Y)$ o sea que, si considero una recta paralela al meridiano central, su ecuación será de la forma $Y=\text{cte}$ por lo tanto el valor de k será el mismo para todos los puntos de dicha recta.

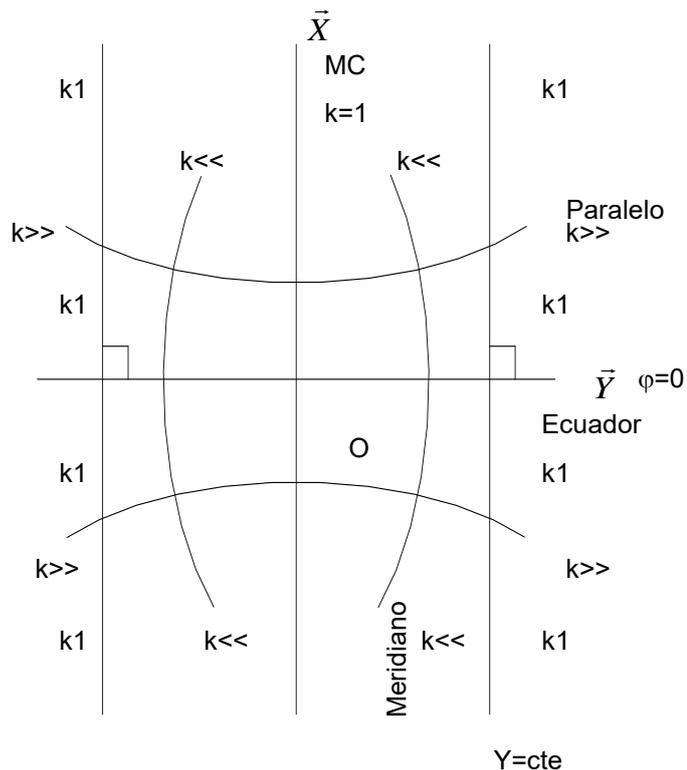


Fig. VII - 14

Coefficiente de deformación lineal k para elementos finitos

Una vez analizado el coeficiente de deformación lineal k para los elementos infinitesimales, corresponde analizar el comportamiento de este coeficiente en el caso de elementos finitos.

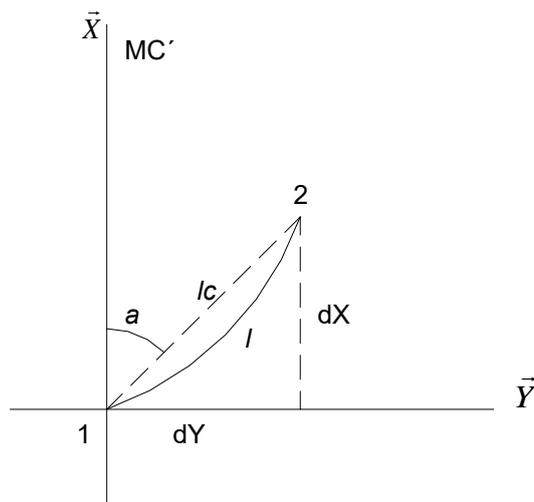


Fig. VII - 15

l = longitud de la transformada de la geodésica
 l_c = longitud de la cuerda

a = acimut plano o anomalía de la cuerda; es el ángulo entre la paralela al meridiano de contacto y la cuerda de la transformada de la geodésica 1-2.

Llamemos:

dL al elemento diferencial de la longitud de la geodésica en el elipsoide
 dl su correspondiente en el plano de Gauss

$$k = \frac{dl}{dL} \text{ y además } k = 1 + \frac{Y^2}{2\rho N}$$

Calculemos $\frac{1}{k} = \left(1 + \frac{Y^2}{2\rho N}\right)^{-1} = \frac{dL}{dl}$ y desarrollando hasta el primer término:

$$\frac{dL}{dl} = 1 - \frac{Y^2}{2\rho N} \Rightarrow dL = dl - \frac{dY^2}{2\rho N}$$

Integrando para obtener valores finitos:

$$\int_0^L dL = \int_0^l dl - \int_0^l \frac{Y^2}{2\rho N} dl$$

Del gráfico se observa que $\text{sena} = \frac{dY}{dl} \Rightarrow dl = \frac{dY}{\text{sena}}$. Considerando ρ y N constantes en un entorno del punto y sena que es constante por la conformidad es:

$$\int_0^L dL = \int_0^l dl - \int_{Y_1}^{Y_2} \frac{Y^2}{2\rho N \text{sena}} dY \Rightarrow$$

$$L = l - \frac{1}{6\rho N \text{sena}} (Y_2^3 - Y_1^3) = l - \frac{Y_2^3 - Y_1^3}{Y_2 - Y_1} \cdot \overbrace{\frac{Y_2 - Y_1}{\text{sena}}}^{\frac{dY}{dl}} \cdot \frac{1}{6\rho N} =$$

$$= l - l \cdot \frac{1}{6\rho N} \frac{Y_2^3 - Y_1^3}{Y_2 - Y_1} \Rightarrow L = l \cdot \left(1 - \frac{1}{6\rho N} \cdot \frac{Y_2^3 - Y_1^3}{Y_2 - Y_1}\right) = l \cdot \left[1 - \frac{1}{6\rho N} (Y_2^2 + Y_1^2 + Y_2 Y_1)\right] \text{ por}$$

lo tanto $\frac{L}{l} = 1 - \frac{1}{6\rho N} (Y_2^2 + Y_1^2 + Y_2 Y_1) = \frac{1}{k} \Rightarrow k = \left[1 - \frac{1}{6\rho N} (Y_2^2 + Y_1^2 + Y_2 Y_1)\right]^{-1}$ y

desarrollando hasta el primer término es:

$$k = 1 + \frac{1}{6\rho N} (Y_2^2 + Y_1^2 + Y_2 Y_1)$$

Como en geodesia los lados de los triángulos son menores a 100km, los valores de ρ y N pueden asumirse como los promedios de ρ_1, N_1 y ρ_2, N_2 .

Llamando

$$Y_M^2 = \left(\frac{Y_2 + Y_1}{2}\right)^2 \text{ es:}$$

$$4Y_M^2 = Y_2^2 + 2Y_2 Y_1 + Y_1^2 \text{ por lo tanto: } 4Y_M^2 - Y_2 Y_1 = Y_2^2 + Y_1^2 + Y_2 Y_1$$

y sustituyendo en la expresión anterior de k es:

$$k = 1 + \frac{1}{6\rho N} (4Y_M^2 - Y_2 Y_1) = 1 + \frac{1}{6\rho N} (3Y_M^2 + Y_M^2 - Y_2 Y_1)$$

Como $Y_M^2 = \frac{(Y_1 + Y_2)^2}{4} = \frac{Y_2^2 + 2Y_2 Y_1 + Y_1^2}{4}$ es:

$$k = 1 + \frac{1}{6\rho N} \left(3Y_M^2 + \frac{Y_2^2 + 2Y_2 Y_1 + Y_1^2}{4} - Y_2 Y_1 \right) =$$

$$= 1 + \frac{1}{6\rho N} \left(3Y_M^2 + \frac{Y_2^2 + 2Y_2 Y_1 + Y_1^2 - 4Y_2 Y_1}{4} \right) \Rightarrow k = 1 + \frac{1}{6\rho N} \left[3Y_M^2 + \frac{(Y_2 - Y_1)^2}{4} \right] =$$

$$1 + \frac{1}{6\rho N} \left(3Y_M^2 + \frac{\Delta Y^2}{4} \right) \Rightarrow \boxed{k = 1 + \frac{1}{2\rho N} \left(Y_M^2 + \frac{\Delta Y^2}{12} \right)}$$

Transformada de la geodésica en el plano de Gauss

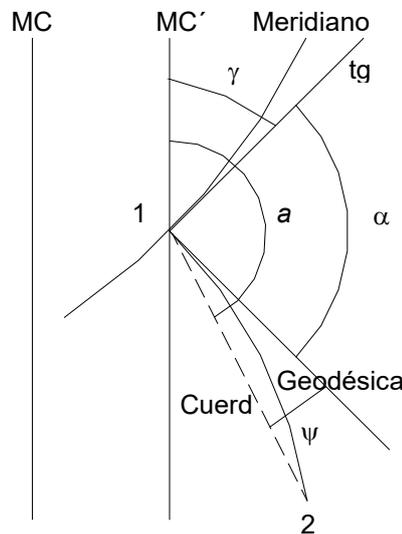


Fig. VII - 16

Dada una geodésica 1-2 en el elipsoide, es posible utilizar el plano de Gauss para calcular esa geodésica, tanto en acimut como en distancia.

$\alpha = a \pm \gamma \pm \psi$ Los signos dependen de la posición de la geodésica respecto de los ejes cartesianos.

α = ángulo entre la tangente a la transformada del meridiano y la tangente a la transformada de la geodésica que por la conformidad es igual al acimut, que se conserva.

ψ = ángulo entre la tangente a la transformada de la geodésica y la cuerda, y se denomina *deflexión angular*. Este valor depende de la curvatura de la geodésica que está dada por la

expresión:
$$C = -\frac{Y_M \cdot \cos a}{\rho N}$$

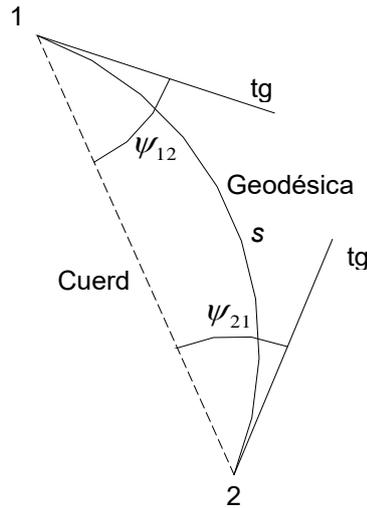


Fig. VII - 17

En definitiva, si s es la transformada de una geodésica en el plano de Gauss, las deflexiones angulares ψ vienen dadas por las expresiones:

$$\boxed{\psi_{12} = \frac{\Delta X \left(Y_M - \frac{\Delta Y}{6} \right)}{2\rho_M N_M}} ; \quad \boxed{\psi_{21} = -\frac{\Delta X \left(Y_M + \frac{\Delta Y}{6} \right)}{2\rho_M N_M}}$$

Cálculos geodésicos

Cálculo de los acimutes y del lado geodésico

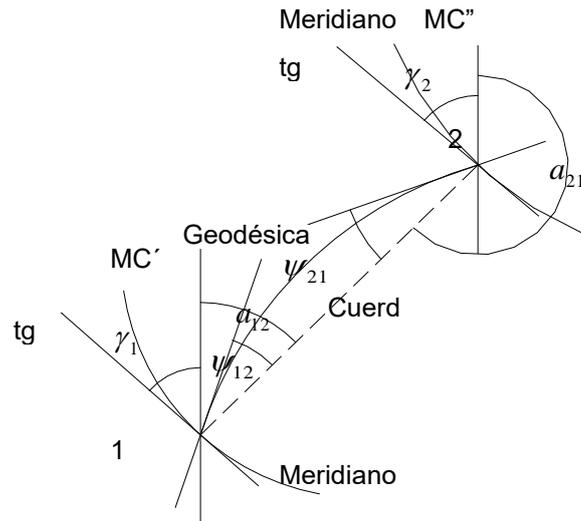


Fig. VII - 18

Los *Datos* son las coordenadas de los extremos: 1(φ_1, λ_1) y 2(φ_2, λ_2) y las *Incógnitas* son: A_{c12} = acimut 1-2, A_{c21} = acimut 2-1, y L_{12} = longitud de la geodésica en el elipsoide.

Los pasos a seguir son:

1- Hallar las coordenadas cartesianas de los extremos 1 y 2

- 1.1- (φ_1, λ_1) \Rightarrow (X_1, Y_1)
 1.2- (φ_2, λ_2) \Rightarrow (X_2, Y_2) } aplicando las ecuaciones de la ley de la proyección

2- Cálculo del acimut geodésico

2.1- Cálculo del acimut plano a

$$2.1.1- a_{12} = \text{Arctg} \frac{\Delta Y_{21}}{\Delta X_{21}} = \text{Arctg} \frac{\Delta Y_{12}}{\Delta X_{12}}$$

$$2.1.2- a_{21} = a_{12} \pm \pi$$

2.2- Cálculo de la deflexión angular ψ

$$2.2.1- \psi_{12} = \frac{\Delta X \left(Y_M - \frac{\Delta Y}{6} \right)}{2\rho_M N_M}$$

$$2.2.2- \psi_{21} = - \frac{\Delta X \left(Y_M + \frac{\Delta Y}{6} \right)}{2\rho_M N_M}$$

2.3- Cálculo de la convergencia plana

$$2.3.1- \gamma_1 = \Delta\lambda_1 \text{sen}\varphi_1 + \frac{\Delta\lambda_1^3}{3} \text{sen}\varphi_1 \cos^2 \varphi_1 \text{sen}^2 1'' (1 + 3n^2 + 2n^4) + \dots$$

$$2.3.2- \gamma_2 = \Delta\lambda_2 \text{sen}\varphi_2 + \frac{\Delta\lambda_2^3}{3} \text{sen}\varphi_2 \cos^2 \varphi_2 \text{sen}^2 1'' (1 + 3n^2 + 2n^4) + \dots$$

2.4- Cálculo del acimut geodésico $A_c = \alpha$

$$2.4.1- \boxed{\alpha_{12} = a_{12} \pm \gamma_1 \pm \psi_{12}}$$

2.4.2- $\alpha_{21} = a_{21} \pm \gamma_2 \pm \psi_{21}$

3- Cálculo del lado geodésico L

3.1- Cálculo del coeficiente de deformación lineal k

$$k = 1 + \frac{1}{2\rho_M N_M} \left(Y_M^2 + \frac{\Delta Y^2}{12} \right)$$

3.2- Cálculo del lado plano l

Podemos considerar que $l \cong l_c$ (longitud de la cuerda) pues para Uruguay y para lados menores a 100km., $l - l_c < 2.3\text{mm}$.

$$l_{12} = l_{21} = l \cong l_c = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2} = \frac{\Delta Y_{21}}{\text{sena}_{a_{12}}} = \frac{\Delta X_{21}}{\text{cos } a_{12}}$$

3.3- Cálculo del lado geodésico L

Por definición es $k = \frac{l}{L} \Rightarrow L = \frac{l}{k}$

Resolución de un triángulo geodésico en el plano de Gauss.

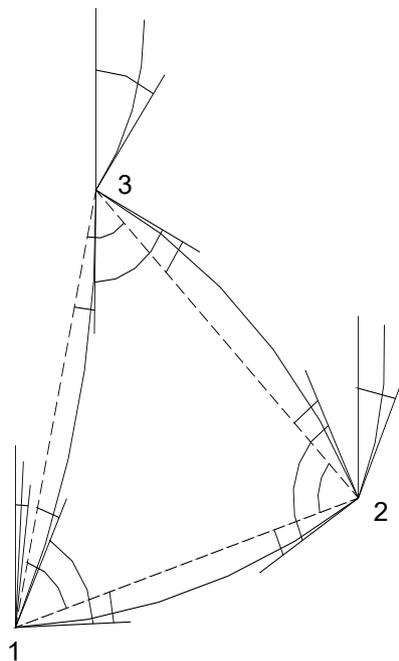


Fig. VII - 19

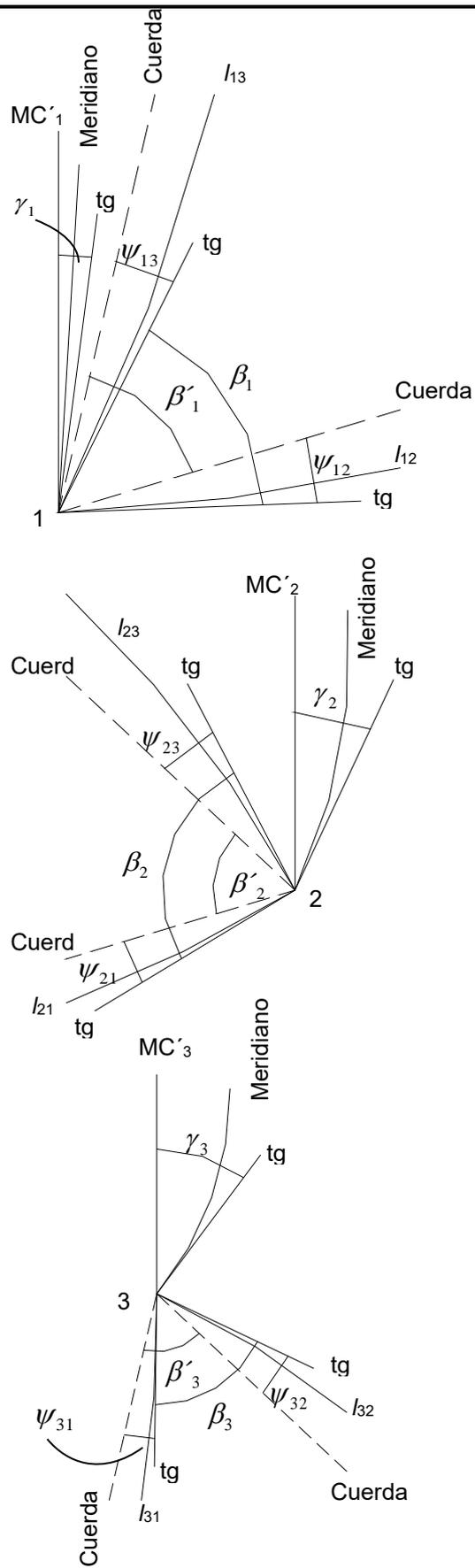


Fig. VII - 20

Los Datos son las coordenadas de los vértices:

$$\left. \begin{aligned} (\varphi_1, \lambda_1) &\Rightarrow (X_1, Y_1) \\ (\varphi_2, \lambda_2) &\Rightarrow (X_2, Y_2) \\ (\varphi_3, \lambda_3) &\Rightarrow (X_3, Y_3) \end{aligned} \right\} \text{ aplicando las ecuaciones de la ley de la proyección}$$

Las Incógnitas son los ángulos geodésicos: $\beta_1, \beta_2, \beta_3$,
 los acimutes geodésicos: $Ac_{12}, Ac_{21}, Ac_{23}, Ac_{32}, Ac_{13}, Ac_{31}$,
 los lados geodésicos: L_{12}, L_{13}, L_{23} .

Los pasos a seguir son:

1- Cálculo de ángulos y acimutes

1.1- Cálculo de los acimutes planos a

$$a_{12} = \text{Arctg} \frac{\Delta Y_{21}}{\Delta X_{21}} \Rightarrow a_{21} = a_{12} \pm \pi$$

$$a_{13} = \text{Arctg} \frac{\Delta Y_{31}}{\Delta X_{31}} \Rightarrow a_{31} = a_{13} \pm \pi$$

$$a_{23} = \text{Arctg} \frac{\Delta Y_{32}}{\Delta X_{32}} \Rightarrow a_{32} = a_{23} \pm \pi$$

1.2- Cálculo de las deflexiones angulares ψ

$$\psi_{12} = \frac{(X_2 - X_1) \left(Y_M - \frac{\Delta Y}{6} \right)}{2\rho_M N_M} \qquad \psi_{21} = - \frac{(X_1 - X_2) \left(Y_M + \frac{\Delta Y}{6} \right)}{2\rho_M N_M}$$

$$\psi_{13} = \frac{(X_3 - X_1) \left(Y_M - \frac{\Delta Y}{6} \right)}{2\rho_M N_M} \qquad \psi_{31} = - \frac{(X_1 - X_3) \left(Y_M + \frac{\Delta Y}{6} \right)}{2\rho_M N_M}$$

$$\psi_{23} = \frac{(X_3 - X_2) \left(Y_M - \frac{\Delta Y}{6} \right)}{2\rho_M N_M} \qquad \psi_{32} = - \frac{(X_2 - X_3) \left(Y_M + \frac{\Delta Y}{6} \right)}{2\rho_M N_M}$$

1.3- Cálculo de la convergencia plana de los meridianos

$$\gamma_1 = \Delta\lambda_1 \text{sen} \varphi_1 + \frac{\Delta\lambda_1^3}{3} \text{sen} \varphi_1 \cos^2 \varphi_1 \text{sen}^2 1'' (1 + 3n^2 + 2n^4) + \dots$$

$$\gamma_2 = \Delta\lambda_2 \text{sen} \varphi_2 + \frac{\Delta\lambda_2^3}{3} \text{sen} \varphi_2 \cos^2 \varphi_2 \text{sen}^2 1'' (1 + 3n^2 + 2n^4) + \dots$$

$$\gamma_3 = \Delta\lambda_3 \text{sen} \varphi_3 + \frac{\Delta\lambda_3^3}{3} \text{sen} \varphi_3 \cos^2 \varphi_3 \text{sen}^2 1'' (1 + 3n^2 + 2n^4) + \dots$$

1.4- Cálculo de los ángulos del triángulo plano β'

$$\beta'_1 = a_{12} - a_{31} \pm 180^\circ = a_{13} - a_{12}$$

$$\beta'_2 = a_{23} - a_{12} \pm 180^\circ = a_{21} - a_{23}$$

$$\beta'_3 = a_{31} - a_{23} \pm 180^\circ = a_{32} - a_{31}$$

1.5- Cálculo de los ángulos geodésicos β

$$\beta_1 = \beta'_1 \pm \psi_{12} \pm \psi_{13}$$

$$\beta_2 = \beta'_2 \pm \psi_{21} \pm \psi_{23}$$

$$\beta_3 = \beta'_3 \pm \psi_{31} \pm \psi_{32}$$

1.6- Cálculo de los acimutes Ac

$$Ac_{12} = a_{12} \pm \gamma_1 \pm \psi_{12}$$

$$Ac_{21} = a_{21} \pm \gamma_2 \pm \psi_{21}$$

$$Ac_{13} = a_{13} \pm \gamma_1 \pm \psi_{13}$$

$$Ac_{31} = a_{31} \pm \gamma_3 \pm \psi_{31}$$

$$Ac_{23} = a_{23} \pm \gamma_2 \pm \psi_{23}$$

$$Ac_{32} = a_{32} \pm \gamma_3 \pm \psi_{32}$$

2- Cálculo de los lados geodésicos L

2.1- Cálculo de los lados planos l

$$l_{12} = \frac{\Delta Y_{21}}{\text{sena}_{a_{12}}} = \frac{\Delta X_{21}}{\text{cos } a_{12}} = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2} = l_{21}$$

$$l_{13} = \frac{\Delta Y_{31}}{\text{sena}_{a_{13}}} = \frac{\Delta X_{31}}{\text{cos } a_{13}} = \sqrt{(X_3 - X_1)^2 + (Y_3 - Y_1)^2} = l_{31}$$

$$l_{23} = \frac{\Delta Y_{32}}{\text{sena}_{a_{23}}} = \frac{\Delta X_{32}}{\text{cos } a_{23}} = \sqrt{(X_3 - X_2)^2 + (Y_3 - Y_2)^2} = l_{32}$$

2.2- Cálculo de los coeficientes de deformación lineal k

$$k_{12} = 1 + \frac{1}{2\rho_M N_M} \left(Y_M^2 + \frac{\Delta Y^2}{12} \right) = k_{21}$$

$$k_{13} = 1 + \frac{1}{2\rho_M N_M} \left(Y_M^2 + \frac{\Delta Y^2}{12} \right) = k_{31}$$

$$k_{23} = 1 + \frac{1}{2\rho_M N_M} \left(Y_M^2 + \frac{\Delta Y^2}{12} \right) = k_{32}$$

2.3- Cálculo de los lados geodésicos

$$L_{12} = \frac{l_{12}}{k_{12}} = L_{21}$$

$$L_{13} = \frac{l_{13}}{k_{13}} = L_{31}$$

$$L_{23} = \frac{l_{23}}{k_{23}} = L_{32}$$

Transporte de coordenadas

Dado un triángulo geodésico 1 – 2 – 3, los *Datos* son las coordenadas de los vértices:

1 $(\varphi_1, \lambda_1) \Rightarrow (X_1, Y_1)$ y 2 $(\varphi_2, \lambda_2) \Rightarrow (X_2, Y_2)$ y los ángulos geodésicos: $\beta_1, \beta_2, \beta_3$

Las *Incógnitas* son las coordenadas del tercer vértice (X_3, Y_3) y por integración numérica, las coordenadas geodésicas 3 (φ_3, λ_3)

Los pasos a seguir son:

1- Cálculo de a_{12}, l_{12}, ψ

$$1.1- a_{12} = \text{Arctg} \frac{\Delta Y_{21}}{\Delta X_{21}}$$

$$1.1.1- l_{12} = l_{21} = \frac{\Delta Y_{21}}{\text{sen} a_{12}} = \frac{\Delta X_{21}}{\text{cos} a_{12}}$$

1.2- Cálculo de ψ

$$\psi_{12} = \frac{(X_2 - X_1) \left(Y_M - \frac{\Delta Y}{6} \right)}{2 \rho_M N_M} \quad \psi_{21} = - \frac{(X_1 - X_2) \left(Y_M + \frac{\Delta Y}{6} \right)}{2 \rho_M N_M}$$

2- Cálculo de las coordenadas aproximadas del vértice 3: 3' (X'_3, Y'_3)

2.1- Como primera aproximación de los β' se define β'' por:

$$\beta''_1 = \beta_1 \pm \psi_{12}$$

$$\beta''_2 = \beta_2 \pm \psi_{21}$$

$$\beta''_3 = \beta_3 \text{ (como no se conoce la deflexión angular no se suma nada)}$$

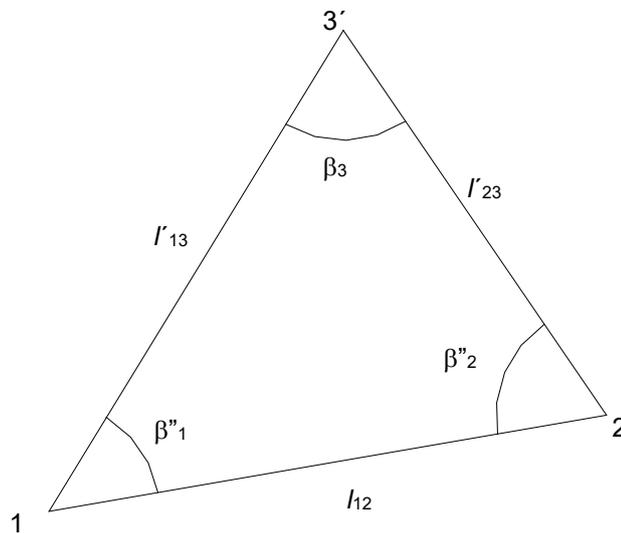


Fig. VII - 21

Por el teorema del seno es:

$$\frac{l_{12}}{\text{sen} \beta_3} = \frac{l'_{13}}{\text{sen} \beta''_2} = \frac{l'_{23}}{\text{sen} \beta''_1} \text{ por lo tanto,}$$

$$l'_{13} = l_{12} \frac{\text{sen}\beta''_2}{\text{sen}\beta''_3}; \quad l'_{23} = l_{12} \frac{\text{sen}\beta''_1}{\text{sen}\beta''_3}, \text{ son valores aproximados de las}$$

cuerdas del triángulo plano

2.2- Cálculo de las coordenadas cartesianas aproximadas del vértice 3 partiendo de los vértices 1 y 2

En general es:

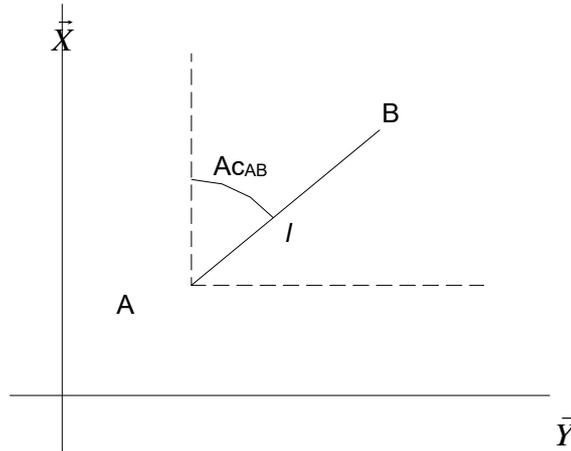


Fig. VII - 22

$$X_B = X_A + l \cdot \cos ACAB$$

$$Y_B = Y_A + l \cdot \text{sen} ACAB$$

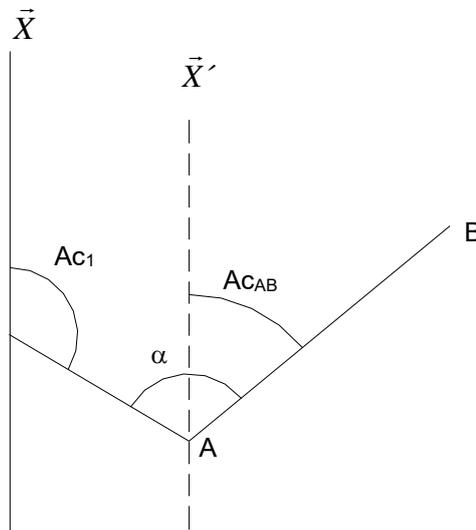


Fig. VII - 23

$$ACAB = AC1 + \alpha \pm \pi$$

En este caso es:

$$X'_3 = X_1 + l'_{13} \cos a'_{13}$$

$$Y'_3 = Y_1 + l'_{13} \text{sen} a'_{13} \quad \text{con } a'_{13} = a_{21} + \beta''_1 \pm \pi$$

$$X''_3 = X_2 + l'_{23} \cos a'_{23} \quad \text{con } a'_{23} = a_{12} + \beta''_2 \pm \pi$$

$$Y''_3 = Y_2 + l'_{23} \text{sen } a'_{23}$$

y promediando, las coordenadas aproximadas del vértice 3 serán:

$$X_{3AP} = \frac{X'_3 + X''_3}{2}$$

$$Y_{3AP} = \frac{Y'_3 + Y''_3}{2}$$

3- Cálculo de las deflexiones angulares ψ

Ahora si se pueden calcular las deflexiones con las coordenadas aproximadas del vértice 3

$$\psi_{13} = \frac{(X_{3AP} - X_1) \left(Y_M - \frac{\Delta Y}{6} \right)}{2\rho_M N_M}$$

$$\psi_{31} = - \frac{(X_1 - X_{3AP}) \left(Y_M + \frac{\Delta Y}{6} \right)}{2\rho_M N_M}$$

$$\psi_{23} = \frac{(X_{3AP} - X_2) \left(Y_M - \frac{\Delta Y}{6} \right)}{2\rho_M N_M}$$

$$\psi_{32} = - \frac{(X_2 - X_{3AP}) \left(Y_M + \frac{\Delta Y}{6} \right)}{2\rho_M N_M}$$

4- Cálculo de los ángulos planos:

$$\left. \begin{aligned} \beta'_1 &= \beta_1 \pm \psi_{12} \pm \psi_{13} \\ \beta'_2 &= \beta_2 \pm \psi_{23} \pm \psi_{21} \\ \beta'_3 &= \beta_3 \pm \psi_{31} \pm \psi_{32} \end{aligned} \right\} \text{verificación: } \beta'_1 + \beta'_2 + \beta'_3 = \pi$$

5- Cálculo de los acimutes planos y de los lados planos

5.1- a_{12} ya fue calculado en el paso 1.1

$$a_{13} = a_{12} + \beta'_1 \pm \pi$$

$$a_{23} = a_{12} + \beta'_2 \pm \pi$$

5.2- Por el teorema del seno es:

$$\frac{l_{12}}{\text{sen } \beta'_3} = \frac{l_{13}}{\text{sen } \beta'_2} = \frac{l_{23}}{\text{sen } \beta'_1} \Rightarrow$$

$$l_{13} = l_{12} \frac{\text{sen } \beta'_2}{\text{sen } \beta'_3} ; \quad l_{23} = l_{12} \frac{\text{sen } \beta'_1}{\text{sen } \beta'_3}$$

6- Cálculo de las coordenadas definitivas del vértice 3 por dos caminos distintos: partiendo del vértice 1 y partiendo del vértice 2

$$\begin{aligned} 6.1- X'_3 &= X_1 + l_{13} \cdot \cos a_{13} \\ Y'_3 &= Y_1 + l_{13} \cdot \text{sen } a_{13} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6.2- X''_3 &= X_2 + l_{23} \cdot \cos a_{23} \\ Y''_3 &= Y_2 + l_{23} \cdot \text{sen } a_{23} \end{aligned}$$

6.3- Coordenadas definitivas del vértice 3

$$X_3 = \frac{X'_3 + X''_3}{2}$$

$$Y_3 = \frac{Y'_3 + Y''_3}{2}$$

7- Cálculo de las coordenadas geodésicas del vértice 3

Por regresión numérica, a partir de las ecuaciones de X y de Y, se calculan φ_3 y λ_3 .

$$(X_3, Y_3) \Rightarrow (\varphi_3, \lambda_3)$$

VIII – PROYECCIÓN U.T.M. (UNIVERSAL TRANSVERSAL MERCATOR)

La proyección U.T.M. al igual que la proyección Gauss – Kruger, es una proyección cilíndrica transversa conforme. No obstante, una de las principales diferencias es que el cilindro en vez de ser tangente al elipsoide, es secante - Fig. VIII - 1 -.

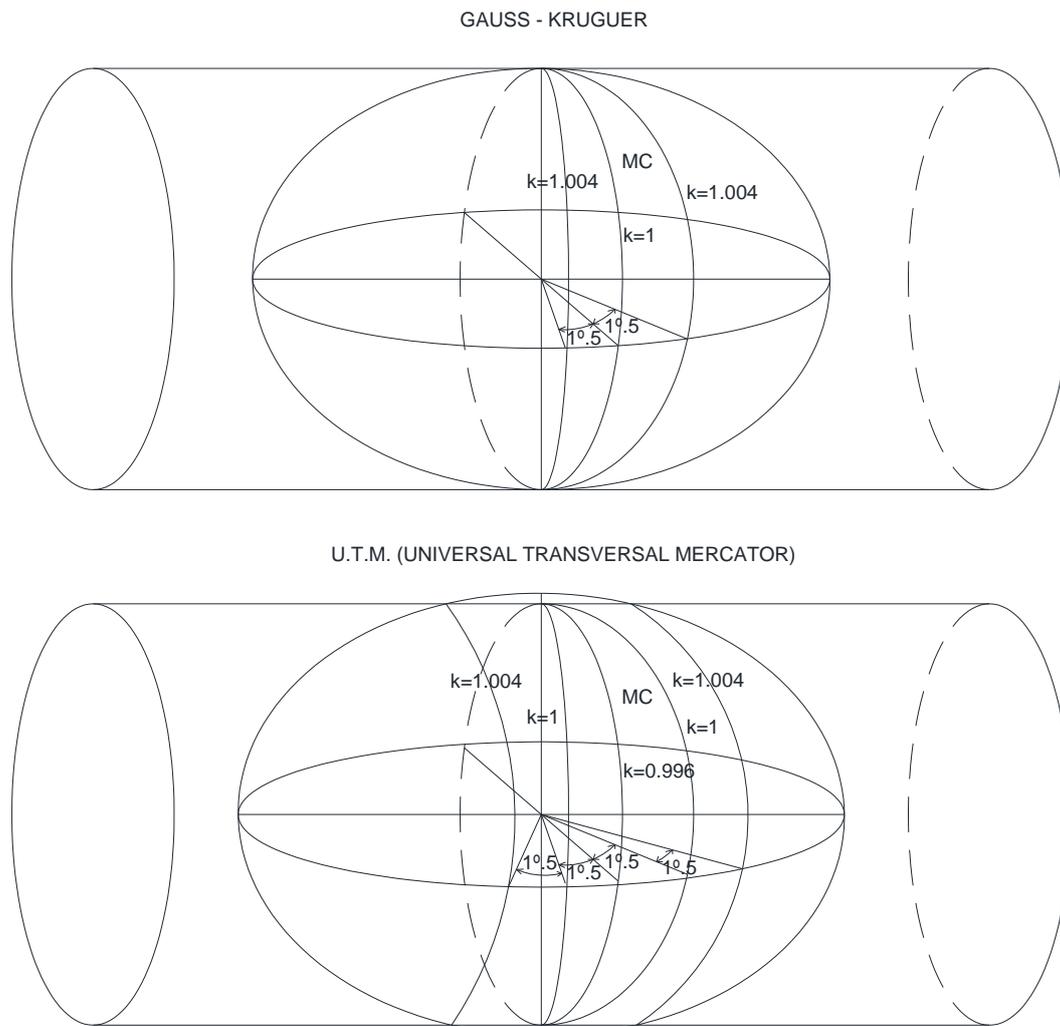


Fig. VIII - 1

En la proyección Gauss – Kruger, el valor de la anamorfosis lineal K es 1 en el meridiano de contacto (MC), y a $1,5^\circ$ al este y al oeste, k vale 1.004 que es la máxima deformación lineal admisible. Por lo tanto, la elongación total de cada huso es de 3° . Esto determina que para realizar una representación de todo el globo terrestre sean necesarias 120 zonas ($360^\circ/3$).

En cambio, en la proyección U.T.M., al ser el cilindro secante, en el meridiano central (MC), el valor de k es 0.996, o sea menor que 1. A $1,5^\circ$ al este y al oeste, sobre las curvas de intersección del cilindro con el elipsoide, k vale 1, y a los 3° a cada lado, k vale 1.004, o sea el mismo valor de la deformación lineal que se tenía en el caso de Gauss – Kruger para $1,5^\circ$, vale decir que se logra de este modo reducir a la mitad las zonas necesarias para representar a todo el globo

terrestre, o sea 60 zonas ($360^\circ/6$), manteniendo los valores de la anamorfosis lineal dentro del mismo entorno.

Se puede visualizar en un esquema comparativo, el comportamiento de la alteración lineal k en ambos casos – Fig. VIII - 2 –

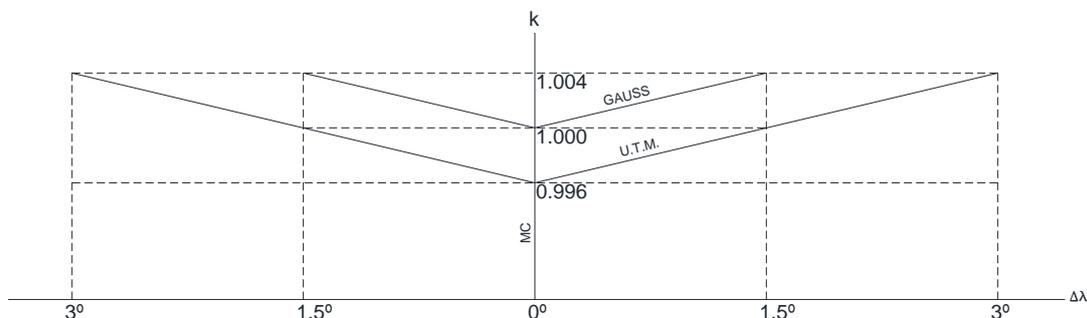


Fig. VIII - 2

Un análisis similar al realizado para la proyección Mercator, cuando se veía que la relación entre la proyección para la escala natural y una escala de referencia era simplemente una relación de homotecia entre ambas, el vínculo entre las proyecciones de Gauss – Kruger y U.T.M. también es una relación de homotecia de modo que, para pasar de la primera a la segunda, es necesario afectarla por un factor de homotecia igual a 0.996. De esta forma se concluye que, a menos de ese factor, son válidas para la proyección U.T.M., todas las fórmulas y conceptualizaciones realizadas para Gauss – Kruger.

El vértice del cono se encontrará en la prolongación del eje polar, y la proyección será entonces una proyección cónica normal o directa (ni oblicua, con el eje del cono inclinado, ni paralela, con el eje del cono en el ecuador).

Al proyectar los paralelos y meridianos sobre la superficie del cono, es decir al construir el canevas de la proyección, los paralelos se representarán por arcos de circunferencias concéntricas en el vértice, y los meridianos por rectas correspondientes a las generatrices del cono y por tanto concurrentes en el vértice. El desarrollo del cono será un sector circular (Ver Fig. IX - 2)

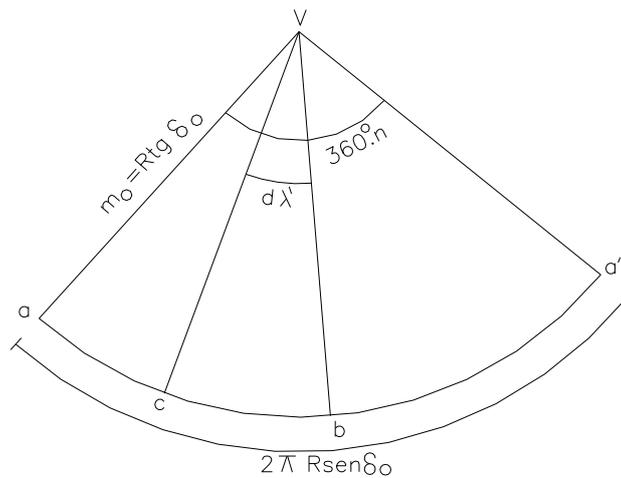


Fig. IX - 2

El arco aba' del sector circular correspondiente al paralelo de tangencia de colatitud δ_0 será igual a la circunferencia de este paralelo. Entonces podemos escribir:

$$aba' = 2\pi R \text{sen} \delta_0$$

siendo $R \text{sen} \delta_0$ el radio del paralelo de tangencia de latitud φ_0 , o colatitud δ_0 (Fig. IX - 1)

En el desarrollo de la superficie cónica en un plano, al ángulo de 360° o 2π radianes, descrito por una generatriz como VA (Fig. IX - 1), le corresponderá el ángulo central del sector circular aVa' (Fig. IX - 2)

Entonces:

$$a\hat{V}a' = \frac{\text{arco } aba'}{m_0}$$

llamando m_0 al radio de la transformada del paralelo de tangencia.

De la Fig. IX - 1 obtenemos:

$$m_0 = R \text{tg} \delta_0$$

por lo tanto

$$a\hat{V}a' = \frac{2\pi R \text{sen } \delta_0}{R \text{tg } \delta_0} = 2\pi \cos \delta_0$$

Vemos entonces que cuando desarrollamos la superficie cónica en un plano, el ángulo de 360° o 2π radianes en el vértice del cono es reducido en la proporción de

$$\frac{2\pi \cos \delta_0}{2\pi} = \cos \delta_0 = n$$

Entonces, llamando $d\lambda$ al ángulo entre dos meridianos cualesquiera, podemos decir que, en la proyección desarrollada, a tal ángulo le corresponderá un ángulo $d\lambda'$ igual a $n \cdot d\lambda$.

El coeficiente n es llamado coeficiente de reducción.

Conocida la Ley de la Proyección: $m=f(\delta)$, y el coeficiente de reducción $n=\cos\delta_0$, se podrá trazar el canevas de una proyección cónica normal, determinándose los puntos a representar, por sus coordenadas polares:

$$m = f(\delta); \Delta\lambda' = n\Delta\lambda$$

calculadas en función de las coordenadas geográficas $(\varphi;\lambda)$ de los puntos considerados (Fig. IX - 3)

Se podrá también emplear un sistema de coordenadas rectangulares, considerando como origen un determinado punto O del paralelo de tangencia, y como ejes coordenados el meridiano en ese punto y una perpendicular a ese meridiano por el punto O . Las coordenadas rectangulares x e y , o también llamadas este (E), norte (N) se calculan por las fórmulas (Fig. IX - 3):

$$E = x = m \cdot \text{sen} \Delta\lambda' = m \cdot \text{sen}(n\Delta\lambda)$$

$$N = y = \overline{OV} - \overline{P'V} = R \text{tg } \delta_0 - m \cdot \cos \Delta\lambda' = R \text{tg } \delta_0 - m \cdot \cos(n\Delta\lambda)$$

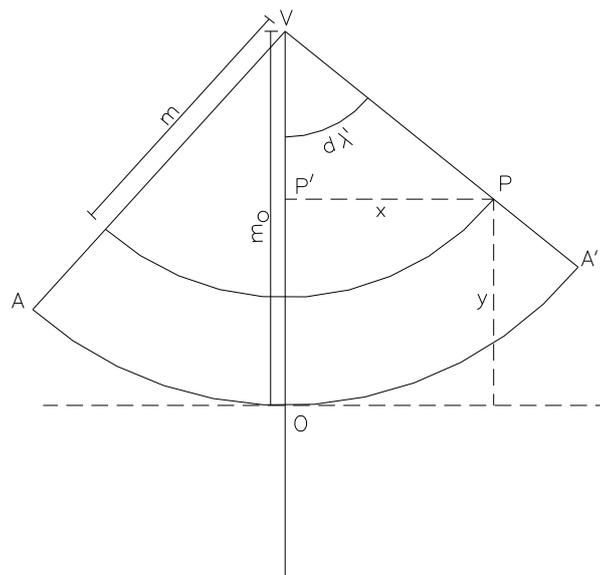


Fig. IX - 3

Coefficientes de anamorfosis

Los coeficientes de deformación están dados por la relación entre la magnitud de un elemento infinitesimal en la proyección y la magnitud del elemento correspondiente en la esfera modelo.

a) Coeficiente de deformación meridiano

Consideremos un elemento infinitesimal en la representación plana dado por dm , al que le corresponde en la esfera modelo un arco $Rd\delta$

Por tanto el coeficiente de deformación meridiano es

$$\beta = \frac{dm}{Rd\delta}$$

b) Coeficiente de deformación transversal o paralelo

Consideremos un elemento infinitesimal de arco de paralelo de colatitud δ en la esfera modelo. Su longitud es: $R\text{sen}\delta.d\lambda$

Siendo m el radio de la transformada del paralelo considerado y sabiendo que el ángulo $d\lambda$ en el desarrollo del cono será reducido a $d\lambda' = n.d\lambda$, el coeficiente de deformación transversal será

$$\alpha = \frac{m.n.d\lambda}{R\text{sen}\delta.d\lambda} = \frac{m.n}{R\text{sen}\delta}$$

c) Coeficiente de deformación superficial

El coeficiente de deformación superficial está dado por el producto de los coeficientes de deformaciones meridiano y paralelo

$$\mu = \alpha.\beta = \frac{m.n.dm}{R^2\text{sen}\delta.d\delta}$$

d) Deformación angular máxima

El desarrollo de este coeficiente resulta de poco interés dado que la proyección en análisis es conforme. No obstante, de forma genérica viene dado por la expresión

$$\Delta u_{MAX} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}$$

Condición de conformidad

La condición de conformidad se obtiene por la igualdad de los coeficientes de deformación en las direcciones principales, en este caso, paralelo y meridiano, por tanto $\alpha = \beta$. Así tenemos:

$$\alpha = \beta \Rightarrow \frac{m.n}{R\text{sen}\delta} = \frac{dm}{Rd\delta}$$

entonces

$$\frac{dm}{m} = n \frac{d\delta}{\text{sen}\delta} = n.\text{cosec}\delta.d\delta$$

Integrando esta ecuación diferencial tenemos:

$$Lm + c' = nL(\operatorname{cosec}\delta - \cotg\delta) + c''$$

Pero,

$$L(\operatorname{cosec}\delta - \cotg\delta) = L\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\delta} - \frac{\cos\delta}{\operatorname{sen}\delta}\right) = L\left(\frac{2\operatorname{sen}^2\frac{\delta}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{\delta}{2}\cos\frac{\delta}{2}}\right) = L\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}$$

Podemos escribir entonces

$$Lm + c' = nL\operatorname{tg}\frac{\delta}{2} + c''$$

Haciendo $c'' - c' = c_1$, tenemos

$$Lm = nL\operatorname{tg}\frac{\delta}{2} + c_1$$

Considerando $c_1 = Lc$, tenemos

$$Lm = nL\operatorname{tg}\frac{\delta}{2} + Lc$$

Finalmente

$$m = c\left(\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}\right)^n$$

El valor de la constante de integración c se determina por la condición de borde dada por la colatitud del ecuador $\delta=90^\circ$, entonces m corresponderá al radio de la transformada del ecuador

Tenemos en este caso $\operatorname{tg}\frac{\delta}{2} = \operatorname{tg}45^\circ = 1$, y llamando m_e al radio de la transformada del ecuador obtenemos $m_e=c$; por lo tanto la Ley de la Proyección es:

$$m = m_e\left(\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}\right)^n \quad \text{y} \quad \Delta\lambda' = n\Delta\lambda$$

Los coeficientes de deformación son:

Coficiente de deformación meridiano β igual al coeficiente de deformación paralelo α por la condición de conformidad impuesta:

$$\alpha = \beta = \frac{m \cdot n}{R \operatorname{sen}\delta} = \frac{n \cdot m_e \left(\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}\right)^n}{R \operatorname{sen}\delta}$$

Coficiente de deformación superficial μ

$$\mu = \alpha \cdot \beta = n^2 m_e^2 \frac{\left(\operatorname{tg} \frac{\delta}{2} \right)^{2n}}{R^2 \operatorname{sen}^2 \delta}$$

Deformación angular máxima

Dado que la proyección es conforme, la deformación angular es nula: $\Delta u_{\text{MAX}}=0$

Proyección cónica conforme con un paralelo padrón

Además de la condición general de conformidad que tiene esta proyección, se pueden obtener deformaciones lineales nulas en determinado paralelo llamado paralelo padrón o de referencia, mediante la atribución de valores convenientes a los parámetros involucrados en la Ley de la Proyección, esto es n y m_e .

Supongamos que el paralelo padrón es el paralelo de tangencia de colatitud δ_0 . En estas condiciones, si atribuimos a n el valor $\cos \delta_0$, el radio de la transformada del paralelo de tangencia estará dado por la expresión (Fig. IX - 1)

$$m_0 = R \operatorname{tg} \delta_0$$

entonces podemos establecer la siguiente relación

$$m_0 = R \operatorname{tg} \delta_0 = m_e \left(\operatorname{tg} \frac{\delta_0}{2} \right)^{\cos \delta_0}$$

que nos permite calcular el valor de m_e

$$m_e = \frac{R \operatorname{tg} \delta_0}{\left(\operatorname{tg} \frac{\delta_0}{2} \right)^{\cos \delta_0}} = R \operatorname{tg} \delta_0 \left(\operatorname{tg} \frac{\delta_0}{2} \right)^{-\cos \delta_0}$$

Introduciendo pues este valor de m_e en la expresión de la Ley de la Proyección, tenemos

$$m = m_e \left(\operatorname{tg} \frac{\delta}{2} \right)^n = R \operatorname{tg} \delta_0 \left(\operatorname{tg} \frac{\delta_0}{2} \right)^{-\cos \delta_0} \cdot \left(\operatorname{tg} \frac{\delta}{2} \right)^{\cos \delta_0}$$

por lo tanto,

$$m = R \operatorname{tg} \delta_0 \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{\delta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\delta_0}{2}} \right)^{\cos \delta_0} ; \Delta \lambda' = \cos \delta_0 \Delta \lambda$$

constituyen la Ley de la Proyección Cónica Conforme con un paralelo padrón o de referencia.

Coefficientes de anamorfosis

Coefficientes de deformación paralelo y meridiano

$$\alpha = \beta = \frac{m.n}{R \operatorname{sen} \delta} = \frac{\cos \delta_0}{R \operatorname{sen} \delta} R \operatorname{tg} \delta_0 \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{\delta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\delta_0}{2}} \right)^{\cos \delta_0}$$

$$\alpha = \beta = \frac{\operatorname{sen} \delta_0}{\operatorname{sen} \delta} \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{\delta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\delta_0}{2}} \right)^{\cos \delta_0}$$

Se verifica que, para el paralelo padrón, es decir para $\delta = \delta_0$, tendremos $\alpha = \beta = 1$.

Coefficiente de deformación superficial

$$\mu = \alpha \cdot \beta = \frac{\operatorname{sen}^2 \delta_0}{\operatorname{sen}^2 \delta} \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{\delta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\delta_0}{2}} \right)^{2 \cos \delta_0}$$

Deformación angular máxima

Dado que la proyección es conforme, la deformación angular es nula: $\Delta_{UMAX} = 0$

Propiedades

En esta proyección, la escala varía de forma continua al variar la latitud. No obstante, la escala en el paralelo y en el meridiano de cualquier punto es la misma, por lo que se conservan los ángulos. Esto es válido estrictamente en términos infinitesimales, pues como se dijo, la variación de escala por variación de la latitud implica, para entornos finitos, variación en los ángulos. En la práctica, en tanto, se considera la propiedad de conservación de los ángulos (conservación de las formas u ortomorfismo) como verdadera, también para áreas pequeñas.

Sobre el paralelo padrón la escala es verdadera; a partir de él, la escala aumenta hacia el ecuador y disminuye hacia el polo. Estas variaciones de escala se tornan muy significativas a medida que nos apartamos de la latitud del paralelo padrón, por lo que, esta proyección está limitada por la extensión en latitud del área a representar.

Esta proyección pues es adecuada para la representación de regiones con pequeñas diferencias de latitud. En este caso, no sólo la forma de las áreas se conserva, sino que la precisión de la escala es satisfactoria. Siendo así, ella se presta para cartas de utilidad general.

Proyección cónica conforme con dos paralelos padrones

Es posible exigir a la proyección, que en vez del paralelo de tangencia, sean dos los paralelos representados sin deformación: los correspondientes a las colatitudes δ_1 y δ_2 .

En ese caso, las ecuaciones de condición para establecer la Ley de la Proyección, son dos, pues tanto para $\delta = \delta_1$, como para $\delta = \delta_2$, debe cumplirse que $\alpha = \beta = 1$; por tanto las ecuaciones de condición serán:

$$\frac{n \cdot m_e}{R \operatorname{sen} \delta_1} \left(\operatorname{tg} \frac{\delta_1}{2} \right)^n = 1$$

$$\frac{n \cdot m_e}{R \operatorname{sen} \delta_2} \left(\operatorname{tg} \frac{\delta_2}{2} \right)^n = 1$$

El problema implica resolver este sistema de ecuaciones cuyas incógnitas son n y m_e . En efecto, despejando el valor de m_e en función de δ_1 y δ_2 podemos escribir:

$$m_e = \frac{R \operatorname{sen} \delta_1}{n \left(\operatorname{tg} \frac{\delta_1}{2} \right)^n} = \frac{R \operatorname{sen} \delta_2}{n \left(\operatorname{tg} \frac{\delta_2}{2} \right)^n}$$

Para determinar el valor de n tenemos:

$$\frac{\left(\operatorname{tg} \frac{\delta_1}{2} \right)^n}{\left(\operatorname{tg} \frac{\delta_2}{2} \right)^n} = \frac{\operatorname{sen} \delta_1}{\operatorname{sen} \delta_2} \quad \text{ó} \quad \frac{\left(\operatorname{tg} \frac{\delta_1}{2} \right)^n}{\left(\operatorname{tg} \frac{\delta_2}{2} \right)^n} = \frac{\operatorname{sen} \delta_1}{\operatorname{sen} \delta_2}$$

Aplicando las propiedades de los logaritmos, tenemos:

$$n \cdot \log \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{\delta_1}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\delta_2}{2}} \right) = \log \left(\frac{\operatorname{sen} \delta_1}{\operatorname{sen} \delta_2} \right)$$

entonces

$$n = \frac{\log \left(\frac{\operatorname{sen} \delta_1}{\operatorname{sen} \delta_2} \right)}{\log \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{\delta_1}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\delta_2}{2}} \right)}$$

finalmente, n será:

$$n = \frac{\log(\operatorname{sen} \delta_1) - \log(\operatorname{sen} \delta_2)}{\log \left(\operatorname{tg} \frac{\delta_1}{2} \right) - \log \left(\operatorname{tg} \frac{\delta_2}{2} \right)}$$

Recordando la Ley General de la Proyección:

$$m = m_e \left(\operatorname{tg} \frac{\delta}{2} \right)^n \quad \text{para un valor de } c = m_e$$

y sustituyendo el valor de m_e por el hallado, es:

$$m = \frac{R \operatorname{sen} \delta_1}{n \left(\operatorname{tg} \frac{\delta_1}{2} \right)^n} \left(\operatorname{tg} \frac{\delta}{2} \right)^n = \frac{R \operatorname{sen} \delta_1}{n} \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{\delta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\delta_1}{2}} \right)^n$$

ecuación que representa la Ley de la Proyección Cónica Conforme con dos paralelos padrones, o Proyección Cónica Conforme de Lambert.

Entonces, la expresión completa de la Ley de la Proyección en función de δ_1 , y considerando la expresión del coeficiente de reducción n , en función de δ_1 es:

$$m = \frac{R \operatorname{sen} \delta_1}{n} \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{\delta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\delta_1}{2}} \right)^n ; \Delta \lambda' = n \Delta \lambda$$

$$n = \frac{\log(\operatorname{sen} \delta_1) - \log(\operatorname{sen} \delta_2)}{\log \left(\operatorname{tg} \frac{\delta_1}{2} \right) - \log \left(\operatorname{tg} \frac{\delta_2}{2} \right)}$$

y en función de δ_2 :

$$m = \frac{R \operatorname{sen} \delta_2}{n} \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{\delta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\delta_2}{2}} \right)^n ; \Delta \lambda' = n \Delta \lambda$$

$$n = \frac{\log(\operatorname{sen} \delta_1) - \log(\operatorname{sen} \delta_2)}{\log \left(\operatorname{tg} \frac{\delta_1}{2} \right) - \log \left(\operatorname{tg} \frac{\delta_2}{2} \right)}$$

En esta proyección, por tratarse de dos paralelos padrones, el cono deja de ser tangente a la esfera en el paralelo de colatitud δ_0 , para ser secante en los paralelos de colatitudes δ_1 y δ_2 (Fig. IX - 4)

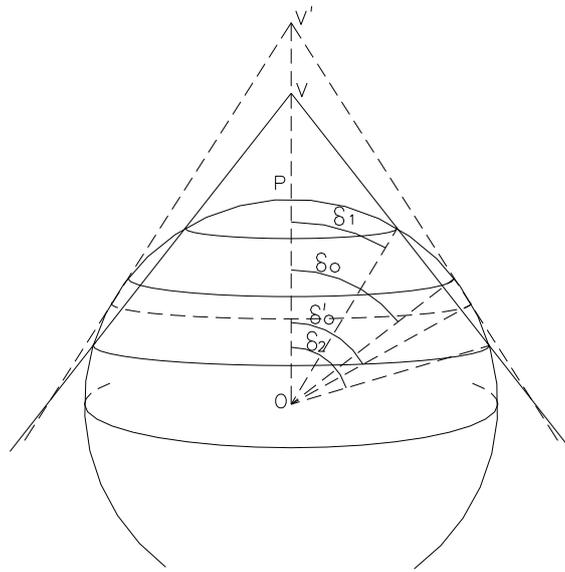


Fig. IX - 4

Podemos imaginar un cono ficticio, tangente a la esfera modelo en un paralelo δ_0' , determinado por

$$\cos \delta_0' = n = \frac{\log(\text{sen} \delta_1) - \log(\text{sen} \delta_2)}{\log\left(\text{tg} \frac{\delta_1}{2}\right) - \log\left(\text{tg} \frac{\delta_2}{2}\right)}$$

Finalmente, y en función de las expresiones de las coordenadas cartesianas vistas más arriba es:

$$E = x = m \cdot \text{sen}(n\Delta\lambda)$$

$$N = y = R \text{tg} \delta_0' - m \cdot \text{cos}(n\Delta\lambda)$$

Coefficientes de anamorfosis

Coefficientes de deformación paralelo y meridiano

$$\alpha = \beta = \frac{m \cdot n}{R \text{sen} \delta} = \frac{n}{R \text{sen} \delta} \frac{R \text{sen} \delta_1}{n} \left(\frac{\text{tg} \frac{\delta}{2}}{\text{tg} \frac{\delta_1}{2}} \right)^n$$

o

$$\alpha = \beta = \frac{\text{sen} \delta_1}{\text{sen} \delta} \left(\frac{\text{tg} \frac{\delta}{2}}{\text{tg} \frac{\delta_1}{2}} \right)^n$$

Coefficiente de deformación superficial

$$\mu = \alpha\beta = \frac{\text{sen}^2 \delta_1}{\text{sen}^2 \delta} \left(\frac{\text{tg} \frac{\delta}{2}}{\text{tg} \frac{\delta_1}{2}} \right)^{2n}$$

Se verifica que tanto para $\delta=\delta_1$ como para $\delta=\delta_2$ es $\alpha=\beta=1$.

Deformación angular máxima

Dado que la proyección es conforme, la deformación angular es nula: $\Delta u_{\text{MAX}}=0$

Propiedades

La propiedad de conformidad se mantiene en toda la proyección. Esa propiedad como se vio, se obtiene introduciendo para cada punto de la proyección la condición de igualdad en las deformaciones paralela y meridiana ($\alpha=\beta$). O sea que en cada punto de la proyección, la escala sobre el paralelo es igual a la escala sobre el meridiano. Como consecuencia de este ajuste de escalas, los ángulos se conservan con sus verdaderos valores, y en consecuencia se conservan las formas de las figuras. Esta propiedad es válida rigurosamente para figuras elementales; pues cuando se trata de figuras más extensas en latitud, la variación de escalas produce necesariamente deformaciones.

Sobre los paralelos padrones, la escala es verdadera ($\alpha=\beta=1$). Entre los paralelos padrones, la escala sobre los paralelos y sobre los meridianos es reducida pero conservando la igualdad entre ellas ($\alpha<1$), ($\beta<1$); fuera de la faja definida por los paralelos padrón, la escala sobre paralelos y meridianos es ampliada pero también conservándose iguales entre ambas ($\alpha>1$), ($\beta>1$). El polo en tanto, es representado por un punto.

En cuanto a la escala, la proyección cónica conforme de Lambert presenta gran precisión. A modo de ejemplo, consideremos la representación de una faja con una extensión de 25° en latitud ($24^\circ \leq \varphi \leq 49^\circ$), con los paralelos padrones correspondientes a $\varphi_1=45^\circ$ y $\varphi_2=33^\circ$. En estas condiciones, y de la aplicación de las expresiones desarrollada hasta ahora, los coeficientes de deformación en los paralelos extremos 24° y 49° son respectivamente, 1.0276 y 1.0104. El error en escala será entonces de 2.76% en el límite Sur y de 1.04% en el límite Norte. Entre los paralelos padrones, el error máximo será del orden del 0.5%.

Otra propiedad importante de esta proyección es la de representar círculos máximos, aproximadamente, como líneas rectas. A pesar de ser apenas una aproximación (porque sabemos que solamente en la proyección plana gnómica los círculos máximos son exactamente representados por líneas rectas), esto es suficiente para diversas finalidades prácticas. De este modo, la proyección cónica conforme de Lambert con esa propiedad, junto con la de la conformidad y la gran precisión de escala, permite resolver, con precisión y rapidez, los problemas de distancia y dirección.

Ejemplos

Veamos algunos ejemplos de canevas correspondientes a esta proyección

Conic Projections

Basic conic projections involve the transformations to a cone either secant or tangent to the Earth's surface. Specification of the latitudes of secant intersection are made with the $lat_1=\phi_1$ and $lat_2=\phi_2$ parameters ($\phi_1 = \phi_2$ for tangent form). Cylindrical ($\phi_1 = -\phi_2$) or azimuthal ($\phi_1 = \phi_2 = 90^\circ$) limiting forms should not be performed by these projections.

Lambert Conformal Conic Projection

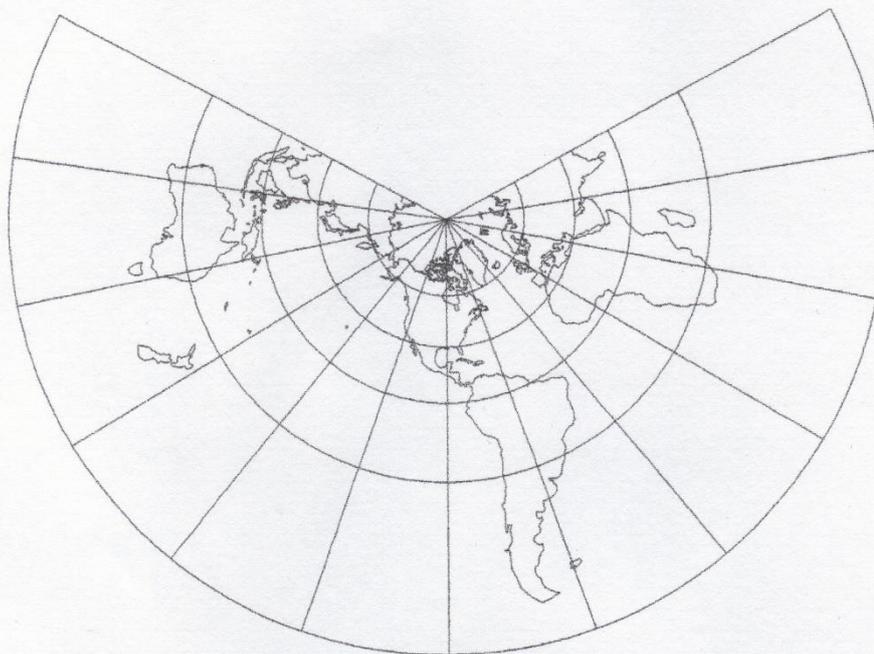


Figure 37: Lambert Conformal Conic projection, with shorelines and 30° graticule. Central Meridian 90° W. and standard parallels at 20° N and 60° N (+proj=lcc +lon_0=90w +lat_1=20n +lat_2=60n).

Classifications: Conformal conic.

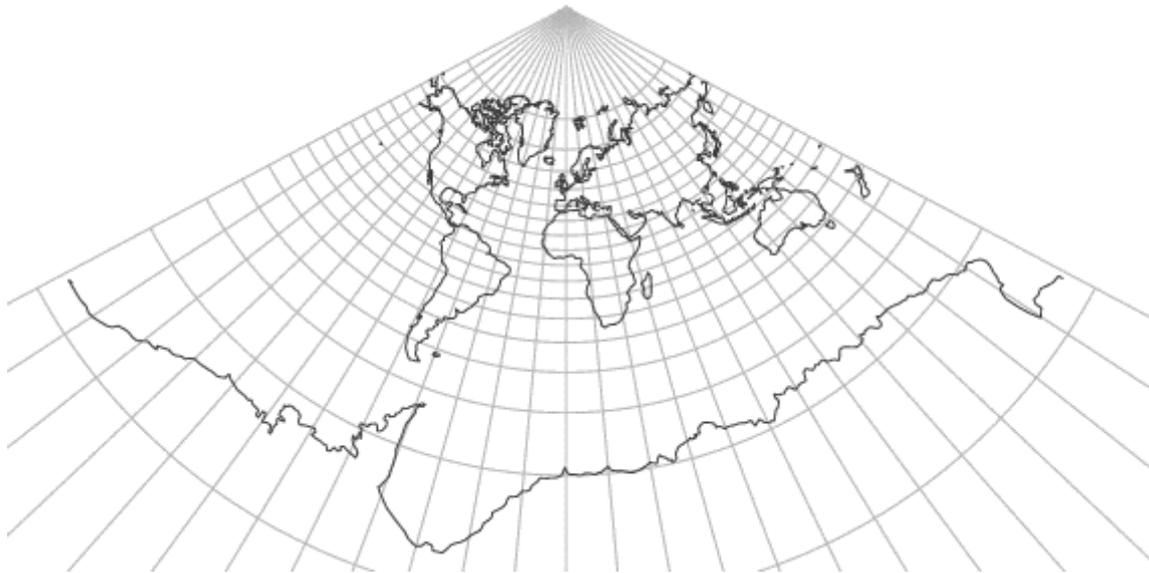
Available forms: Forward and inverse, spherical and elliptical projection.

Usage and options: +proj=lcc +lat_1= ϕ_1 +lat_2= ϕ_2 +lat_0= ϕ_0

Default values for ϕ_1 and ϕ_2 are respectively 33° N and 45° N (values normally used for maps of the conterminous United States). Limiting forms are Polar Stereographic and Mercator.

Fuente: *Cartographic Projection Procedures for the UNIS Environment – A User's Manual*

Gerald I. Evenden – September 24, 1995



Let λ be the longitude, λ_0 the reference longitude, ϕ the latitude, ϕ_0 the reference latitude, and ϕ_1 and ϕ_2 the standard parallels. Then the transformation of spherical coordinates to the plane via the Lambert conformal conic projection is given by

$$X = \rho \sin [n (\lambda - \lambda_0)]$$

$$Y = \rho_0 - \rho \cos [n (\lambda - \lambda_0)],$$

where

$$F = \frac{\cos \phi_1 \tan^n \left(\frac{1}{4} \pi + \frac{1}{2} \phi_1 \right)}{n}$$

$$n = \frac{\ln (\cos \phi_1 \sec \phi_2)}{\ln \left[\tan \left(\frac{1}{4} \pi + \frac{1}{2} \phi_2 \right) \cot \left(\frac{1}{4} \pi + \frac{1}{2} \phi_1 \right) \right]}$$

$$\rho_0 = F \cot^n \left(\frac{1}{4} \pi + \frac{1}{2} \phi \right)$$

$$\rho_{00} = F \cot^n \left(\frac{1}{4} \pi + \frac{1}{2} \phi_0 \right).$$

The inverse formulas are

$$\phi = 2 \tan^{-1} \left[\left(\frac{F}{\rho} \right)^{1/n} \right] - \frac{1}{2} \pi$$

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{\theta}{n},$$

where

$$\rho = \operatorname{sgn}(n) \sqrt{x^2 + (\rho_0 - y)^2}$$

$$\text{tita} = \tan^{-1} \left(\frac{x}{\rho_0 - y} \right),$$

with F , ρ_0 , and N as defined above.

Fuente: <http://mathworld.wolfram.com/ProjectiveGeometry.html>

Proyección cónica conforme considerando la Tierra elipsoidal

La deducción de las fórmulas seguirá un proceso en todo similar al desarrollado anteriormente. En este caso consideraremos a la Tierra representada no por una esfera sino por un elipsoide de revolución cuyos radios de curvatura principales son ρ y N , y la excentricidad es e .

Para imponer la condición de conformidad, basta con establecer la igualdad de anamorfosis a lo largo de los paralelos y de los meridianos.

Para el caso de la Tierra elipsoidal, la condición de conformidad queda expresada entonces por:

$$-\frac{\rho d\varphi}{dm} = \frac{N \cos \varphi d\lambda}{m d\lambda'}$$

Al considerar las expresiones en función de la latitud φ y no de la colatitud δ , corresponde el signo de “-” pues al aumentar φ , m disminuye. Ahora bien, como ya vimos,

$$d\lambda' = d\lambda \cos \delta_0 = d\lambda \sin \varphi_0$$

luego, sustituyendo y operando convenientemente:

$$\frac{dm}{m} = -n \frac{\rho d\varphi}{N \cos \varphi}$$

siendo $n = \sin \varphi_0 = \cos \delta_0$ como ya vimos

Como $\frac{\rho}{N \cos \varphi}$ se descompone en fracciones simples en la forma:

$$\frac{1}{\cos \varphi} - \frac{e^2}{2} \left(\frac{\cos \varphi}{1 + e \sin \varphi} + \frac{\cos \varphi}{1 - e \sin \varphi} \right)$$

Sustituyendo e integrando es:

$$\int \frac{dm}{m} = - \left[\int \frac{d\varphi}{\cos \varphi} - \frac{e}{2} \int \left(\frac{e \cos \varphi}{1 + e \sin \varphi} + \frac{e \cos \varphi}{1 - e \sin \varphi} \right) d\varphi \right]$$

$$Lm = -n \left[\text{Ltg} \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + \frac{e}{2} L \left(\frac{1 - e \sin \varphi}{1 + e \sin \varphi} \right) \right] + Lc$$

donde “c” es la constante de integración; luego

$$m = \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \left(\frac{1 - e \operatorname{sen} \varphi}{1 + e \operatorname{sen} \varphi} \right)^{\frac{e}{2}} \right]^{-n} c$$

Si ahora, como en el caso de la Tierra esférica, consideramos la colatitud $\delta = 90^\circ - \varphi$, deducimos que:

$$\frac{\varphi}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{\delta}{2}$$

y sumando $\frac{\pi}{4}$ a los dos miembros

$$\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2}$$

tenemos

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2} \right) = \cot g \frac{\delta}{2}$$

y

$$m = \left[\cot g \frac{\delta}{2} \left(\frac{1 + e \cos \delta}{1 - e \cos \delta} \right)^{\frac{e}{2}} \right]^{-n} c$$

con lo que llegamos finalmente al valor del radio del paralelo de colatitud δ después de introducir m_0 como constante de integración, y que al igual que en el supuesto de la Tierra esférica representa el radio correspondiente al Ecuador.

$$m = m_0 \left[\operatorname{tg} \frac{\delta}{2} \left(\frac{1 - e \cos \delta}{1 + e \cos \delta} \right)^{\frac{e}{2}} \right]^{\cos \delta_0} ; d\lambda' = d\lambda \cos \delta_0$$

Esta es en definitiva la Ley de la Proyección, considerando la Tierra elipsoidal.

Una vez obtenido el valor de m y de $d\lambda'$, el cálculo de las coordenadas planas (E;N) es el mismo que el visto para la Tierra esférica.

BIBLIOGRAFÍA

Lluberas, H. A. (1983). *Cartografía Tomo I*. Instituto de Agrimensura, Facultad de Ingeniería, UdelaR. Depósito Legal N°184.779

Lluberas, H. A. (1979). *Cartografía Tomo II*. Instituto de Agrimensura, Facultad de Ingeniería, UdelaR. Depósito Legal N°109.784/79

Asin, F. M. (1983). *Geodesia y cartografía matemática*. Paraninfo. ISBN: 84-398-0248-X

Rey Pastor, J., Pi Calleja, P., & Trejo, C. A. (1963). *Análisis matemático* (7th ed.). Kapelusz S. A.

ÍNDICE

I – INTRODUCCIÓN A LA CARTOGRAFÍA MATEMÁTICA.....	1
CONCEPTOS BASICOS.....	1
POSTULADO DE GAUSS.....	2
CLASIFICACION DE LAS PROYECCIONES CARTOGRAFICAS.....	6
II – PARÁMETROS Y SISTEMAS.....	7
INTRODUCCION.....	7
SISTEMAS DE REFERENCIA GEODESICOS.....	7
SISTEMA DE REFERENCIA GEODESICO GEOCENTRICO	7
SISTEMAS DE REFERENCIA GEODESICOS LOCALES.....	7
SISTEMAS DE REFERENCIA CONVENCIONALES EN NUESTRO PAIS	7
MARCOS DE REFERENCIA	8
PROYECCIONES CARTOGRAFICAS	8
MODOS DE MEDICION GNSS.....	8
Modo absoluto	8
Modo absoluto pos calculado.....	9
Modo diferencial	9
Modo diferencial en tiempo real	9
TRANSFORMACIONES ENTRE SISTEMAS DE REFERENCIA	9
Transformación de 7 parámetros	10
PARAMETROS DE TRANSFORMACION	10
PROCEDIMIENTO TIPO PARA TRANSFORMACION DE COORDENADAS	12
DIAGRAMA DE FLUJOS	13
III – ELEMENTOS DIFERENCIALES.....	14
ELEMENTOS DIFERENCIALES EN EL ELIPSOIDE.....	14
Elemento lineal dl	14
Elemento angular θ	15
Elemento superficial ds	15
ELEMENTOS DIFERENCIALES EN EL PLANO.....	15
Elemento lineal $dl1$	16
Elemento angular $\theta1$	17
Elemento superficial $ds1$	18
COEFICIENTES DE ANAMORFOSIS	18
Módulo de deformación lineal L	19
Módulo de deformación angular A	19
Módulo de deformación superficial S	19
ELIPSE INDICATRIZ DE TISSOT.....	19

Direcciones Principales	20
Teorema de Apolonio – Semidiámetros Conjugados.....	21
Cálculo de a y b	21
Aplicación de la elipse de Tissot para el cálculo de las alteraciones.....	25
CONDICIONES DE CONFORMIDAD DE CAUCHY – RIEMANN.....	27
IV – PROYECCIONES PLANAS	29
PROYECCIÓN PLANA MODO POLAR	29
Coeficientes de anamorfosis	31
PROYECCIÓN PLANA POLAR EQUIDISTANTE MERIDIANA	32
Construcción del canevas	33
Coeficientes de anamorfosis	34
PROYECCION PLANA POLAR EQUIDISTANTE TRANSVERSAL O PARALELA	35
Construcción del canevas	35
Coeficientes de anamorfosis	36
PROYECCION PLANA POLAR EQUIVALENTE	37
Construcción del canevas	38
Coeficientes de anamorfosis	39
PROYECCION PLANA EQUIDISTANTE ACIMUTAL	40
Construcción del canevas	42
V – PROYECCIONES PLANAS PERSPECTIVAS	47
PROYECCIÓN ESCENOGRÁFICA	47
Modo acimutal u oblicuo: $\varphi_0 \neq 0$ y $\varphi_0 \neq \pm 90^\circ$	48
Modo polar: $\varphi_0 = \pm 90^\circ$	50
Modo ecuatorial: $\varphi_0 = 0^\circ$	50
PROYECCIÓN CENTRAL O GNÓMICA	50
Modo acimutal u oblicuo: $\varphi_0 \neq 0$ y $\varphi_0 \neq \pm 90^\circ$	50
Modo polar: $\varphi_0 = \pm 90^\circ$	50
Modo ecuatorial: $\varphi_0 = 0^\circ$	51
PROYECCIÓN ESTEREOGRÁFICA	51
Modo acimutal u oblicuo: $\varphi_0 \neq 0$ y $\varphi_0 \neq \pm 90^\circ$	51
Modo polar: $\varphi_0 = \pm 90^\circ$	51
Modo ecuatorial: $\varphi_0 = 0^\circ$	51
Modo acimutal u oblicuo: $\varphi_0 \neq 0$ y $\varphi_0 \neq \pm 90^\circ$	52
Modo polar: $\varphi_0 = \pm 90^\circ$	52
Modo ecuatorial: $\varphi_0 = 0^\circ$	52
CONFORMIDAD DE LA PROYECCIÓN ESTEREOGRÁFICA EN LA MODALIDAD POLAR	52
VI – PROYECCIÓN MERCATOR	54
LEY DE LA PROYECCIÓN	55

ECUACIÓN DE LA LOXODRÓMICA	58
Propiedades del canevas	60
Unidad de la carta μ	61
VII – PROYECCIÓN GAUSS-KRUGER	66
FUNCIONES HOLOMORFAS.....	66
Concepto de Isometría	68
Corolario muy importante	70
LEY DE LA PROYECCIÓN	70
Conclusión.....	72
CONDICIONES DE LA PROYECCIÓN	72
LEY DE LA PROYECCIÓN	77
Características del canevas o reticulado de Gauss – Kruger	78
Corolario	79
Aproximaciones	79
Convergencia plana de los meridianos	80
Coeficiente de deformación lineal k para elementos infinitesimales.....	82
Transformada de la geodésica en el plano de Gauss.....	88
Cálculos geodésicos.....	89
VIII – PROYECCIÓN U.T.M. (UNIVERSAL TRANSVERSAL MERCATOR)	98
IX – PROYECCIÓN CÓNICA CONFORME DE LAMBERT	100
Proyección cónica conforme con un paralelo padrón	105
Proyección cónica conforme con dos paralelos padrones.....	106
Proyección cónica conforme considerando la Tierra elipsoidal	113
BIBLIOGRAFÍA.....	115