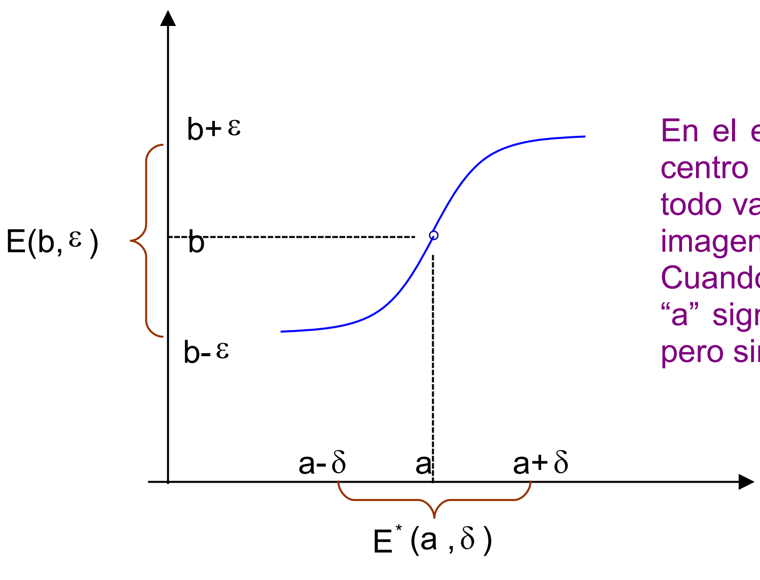
Límites de Funciones

1. DEFINICIÓN TOPOLÓGICA DE LÍMITE

a) Límite finito para x finito

Dada una función f / a es un punto de acumulación de su dominio,

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \quad \Leftrightarrow \quad \forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ \ \delta = \delta(\varepsilon) > 0\ \ /\ \ \forall\ x \in E^{*}(a,\delta) \cap \mathrm{Dom}(f)\ \ \text{s.c.q.}\ \ f(x) \in E(b,\varepsilon)$$



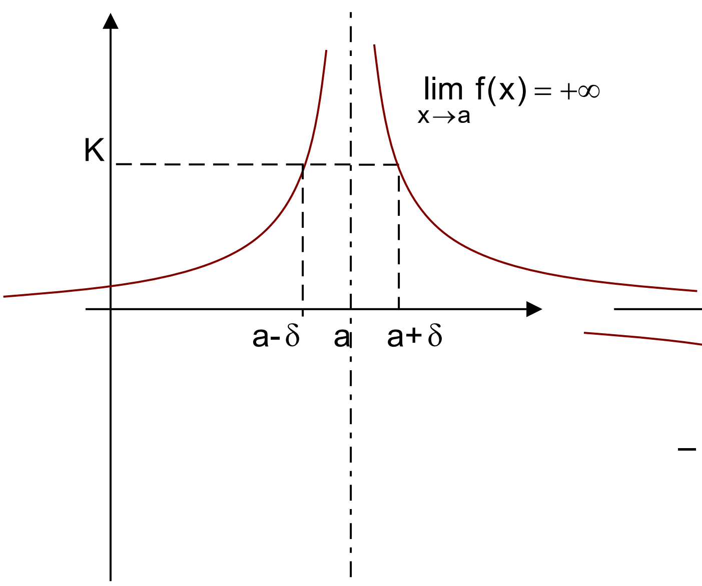
En el entorno reducido de “a”_el centro “a” queda excluido. Para todo valor de x en ese entorno la imagen cae en el entorno de b. Cuando decimos que x tiende a “a” significa que se acerca a “a” pero sin llegar a alcanzarlo.

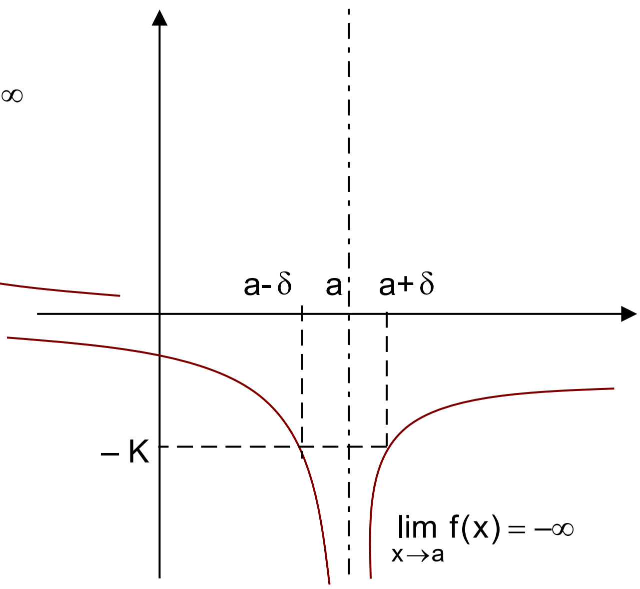
b) Límite infinito para x finito

Dada una función $f: D \to R$ / $a \in R$ es un punto de acumulación de D

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \iff \forall\ K > 0\ \exists \delta = \delta(K) > 0 / \forall\ x \in E^*(a,\ \delta) \cap D\ \text{ s.c.q. }\ f(x) > K$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \iff \forall\ K > 0\ \exists \delta = \delta(K) > 0 / \forall\ x \in E^*(a,\ \delta) \cap D\ \text{ s.c.q. }\ f(x) < -K$$





Nota: en estos casos la recta x = a se llama asíntota vertical

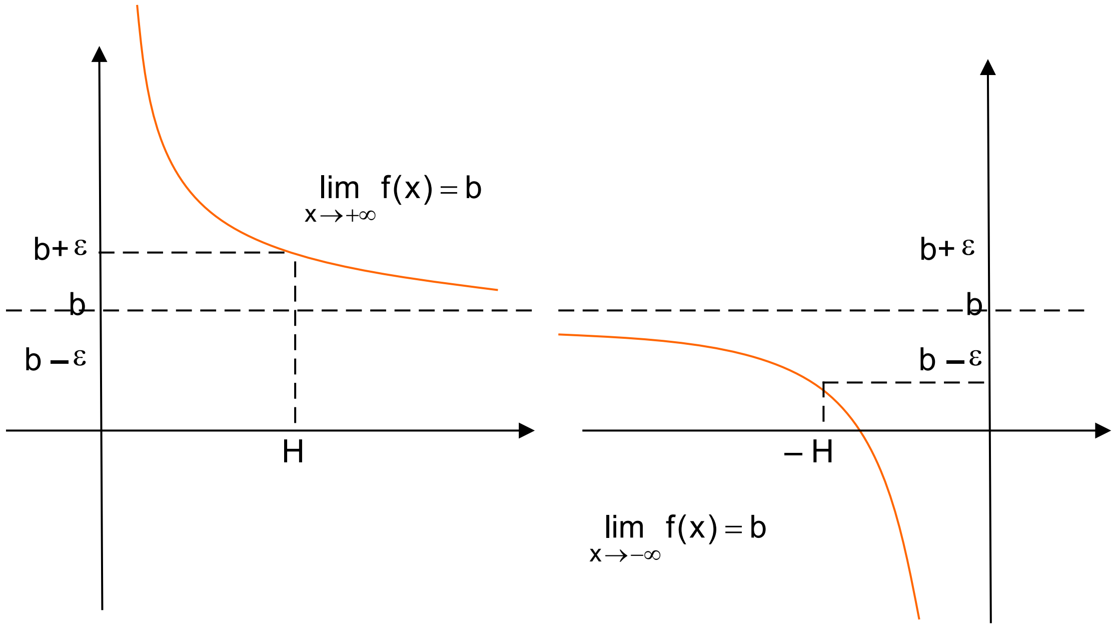
c) Límite finito para x infinito

Dada una función $f: D \to R$ / $\forall r \in R^+\ \exists\ x \in D$ / $x > r$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists\ H = H(\varepsilon) > 0 /\ \forall x \in D \wedge\ x > H\ \text{ s.c.q. }\ |f(x) - b| < \varepsilon$$

Dada una función $f: D \to R$ / $\forall r \in R^+\ \exists\ x \in D$ / $x < -r$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists\ H = H(\varepsilon) > 0 /\ \forall x \in D \wedge\ x < -H\ \text{ s.c.q. }\ |f(x) - b| < \varepsilon$$



Nota: en estos casos la recta $y = b$ se llama asíntota horizontal

d) Límite infinito para x infinito

Dada una función $f: D \to R \ / \ \forall r \in R^+ \ \exists \ x \in D / x > r$

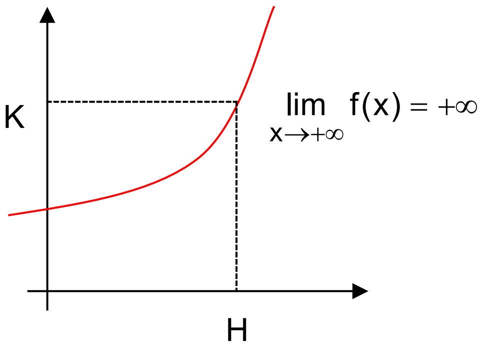
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall \ K > 0 \ \exists \ H = H(K) > 0 \ / \ \forall \ x \in D \ \wedge \ x > H \quad \text{s.c.q.} \ f(x) > K$

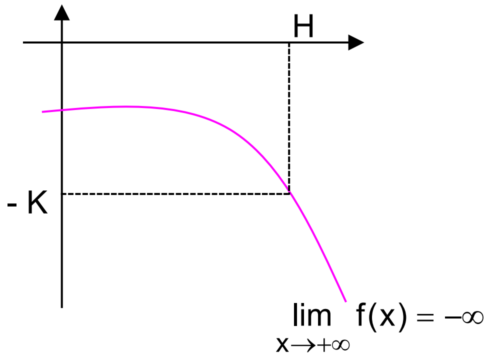
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall \ K > 0 \ \exists \ H = H(K) > 0 \ / \ \forall \ x \in D \ \wedge \ x > H \quad \text{s.c.q.} \ f(x) < -K$

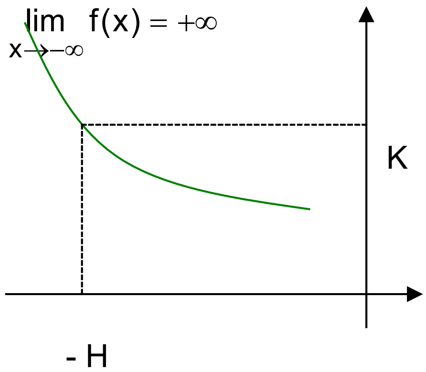
Dada una función $f: D \to R \ / \ \forall r \in R^+ \ \exists \ x \in D / x < -r$

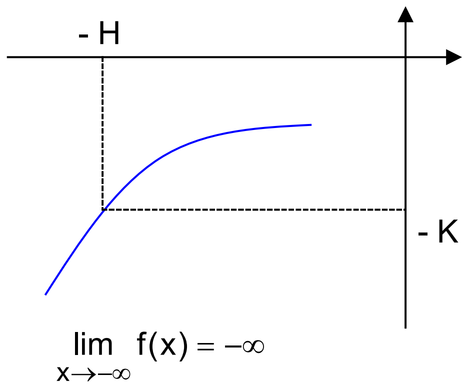
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall \ K > 0 \ \exists \ H = H(K) > 0 \ / \ \forall \ x \in D \ \wedge \ x < -H \quad \text{s.c.q.} \ f(x) > K$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall \ K > 0 \ \exists \ H = H(K) > 0 \ / \ \forall \ x \in D \ \wedge \ x < -H \quad \text{s.c.q.} \ f(x) < -K$









Ejemplos

1º) Utilizando la definición de límite mostrar que: $\lim_{x \to 2} \frac{x+3}{x-1} = 5$

Resolución:

Se debe comprobar que cualquiera sea $\varepsilon > 0 \;\; \exists \delta = \delta(\varepsilon) \;/\; \forall x \in E^{*}(2, \delta)$

s.c.q. $\left| \frac{x+3}{x-1} - 5 \right| < \varepsilon$

$$\left| \frac{x+3}{x-1} - 5 \right| = \left| \frac{x+3-5x+5}{x-1} \right| = \left| \frac{-4x+8}{x-1} \right| = \left| \frac{4(x-2)}{x-1} \right| = \frac{4}{|x-1|} |x-2| < \varepsilon$$

$\Leftrightarrow |x-2| < \frac{\varepsilon}{4} |x-1| \leq \frac{\varepsilon}{4}$

para esta última desigualdad suponemos que x debe estar en un entorno

de centro 2 y radio a lo sumo 1, donde $|x - 1| \leq 1$.

Finalmente concluimos que si $x \in E^*(2, \frac{\varepsilon}{4}) \Rightarrow f(x) \in E(5, \varepsilon)$ #

2º) Utilizando la definición de límite mostrar que: $\lim_{x \to 1} \frac{x+3}{x-1} = \infty$

Ahora se debe comprobar que cualquiera sea $K > 0 \ \exists \ \delta = \delta(K) > 0$ /

$\forall x \in E^*(1, \delta)$ s.c.q. $\left| \frac{x+3}{x-1} \right| > K$

$\left| \frac{x+3}{x-1} \right| < K \Leftrightarrow |x + 3| < K \cdot |x - 1| \Leftrightarrow |x - 1| < \frac{|x+3|}{K} \leq \frac{4}{K}$

esta última desigualdad se justifica admitiendo que x debe estar en un

entorno de centro 1 y radio a lo sumo 1.

En conclusión: si $x \in E^*(1, \frac{4}{K}) \Rightarrow |f(x)| > K$ #

1. TEOREMA DE UNICIDAD DEL LÍMITE.

"Si una función tiene límite, cuando $x \to a$ **dicho límite es único"**

H) $\lim_{x \to a} f(x) = b \wedge \lim_{x \to a} f(x) = c$

T) b = c

2. ALGEBRA DE LÍMITES.

a) Linealidad.

1º) Propiedad homogénea.

H) $\lim_{x \to a} f(x) = b$ y $K \in R$

T) $\lim_{x \to a} K \cdot f(x) = K \cdot b$

2º) Propiedad aditiva. (Teorema del límite de la suma)

H) $\lim_{x \to a} f(x) = b \wedge \lim_{x \to a} g(x) = c$

T) $\lim_{x \to a} \left(f(x) + g(x) \right) = b + c$

3º) Propiedad lineal.

H) $\lim_{x \to a} f(x) = b \wedge \lim_{x \to a} g(x) = c$; $k, m \in R$

T) $\lim_{x \to a} \left(k\, f(x) + m\, g(x) \right) = k\, b + m\, c$

b) Teorema del límite del producto

H) $\lim_{x \to a} f(x) = b \wedge \lim_{x \to a} g(x) = c$

T) $\lim_{x \to a} \left(f(x) \cdot g(x) \right) = b \cdot c$

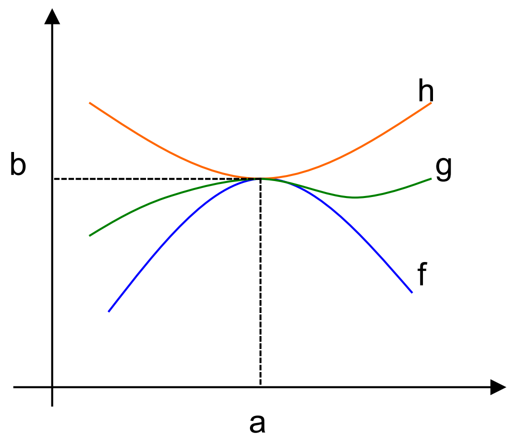
c) Teorema del límite del cociente

H) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \wedge \lim\limits_{x \to a} g(x) = c \neq 0$

T) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{b}{c}$

3. TEOREMA DEL LÍMITE DE LA FUNCIÓN COMPRENDIDA

"Si una función está constantemente comprendida, en un entorno de a, entre otras dos que tienen igual límite, cuando $x \to a$, entonces ella también tiene ese límite para $x \to a$"



H) $\begin{cases} f,\ g,\ h: D \to R \ /\ a \in R \text{ es punto de acumulación de } D \\ \exists \delta_1 > 0 \ /\ \forall\ x \in E^*(a,\delta_1) \cap D \text{ s.c.q. } f(x) < g(x) < h(x) \\ \lim\limits_{x \to a} f(x) = b \wedge \lim\limits_{x \to a} h(x) = b \end{cases}$

T) $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b$

D/ **Por entornos:**

Dado $\varepsilon > 0$ hay que probar que $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \ /\ \forall x \in E^*(a,\ \delta) \cap D$

s.c.q. $|\, g(x) - b \,| < \varepsilon$ (o, lo que es igual: $b - \varepsilon < g(x) < b + \varepsilon$)

1º) $\lim_{x \to a} f(x) = b \Rightarrow$ Por definición de límite: $\exists \delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$ /

$\forall x \in E^*(a, \delta_2) \cap D$ s.c.q. $b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$

2º) $\lim_{x \to a} h(x) = b \Rightarrow$ Por definición de límite: $\exists \delta_3 = \delta_3(\varepsilon) > 0$ /

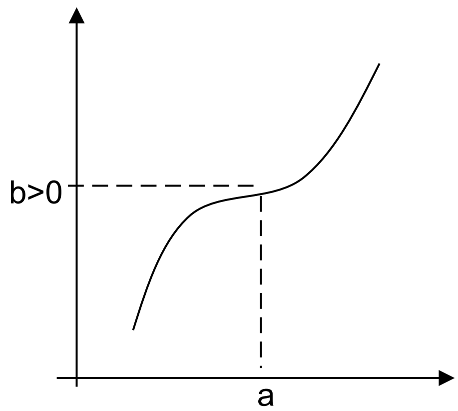
$\forall x \in E^*(a, \delta_3) \cap D$ s.c.q. $b - \varepsilon < h(x) < b + \varepsilon$

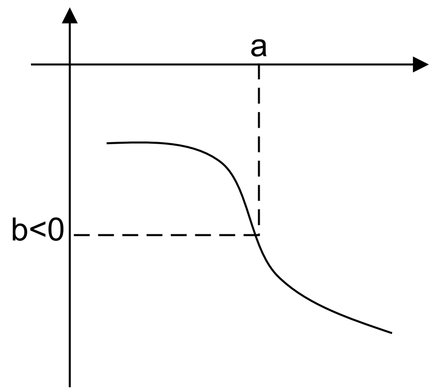
Entonces si ahora se elige $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, $\forall x \in E^*(a, \delta) \cap D$ s.c.q.:

$b - \varepsilon < f(x) < g(x) < h(x) < b + \varepsilon \Rightarrow b - \varepsilon < g(x) < b + \varepsilon$

$\therefore$ por definición de límite: $\lim_{x \to a} g(x) = b$ #

4. TEOREMA DE CONSERVACIÓN DEL SIGNO





"Si una función tiene límite $b \neq 0$, cuando $x \to a$, entonces existe un entorno reducido de "a" donde el signo de f(x) coincide con el de b"

H) $f : D \to R / a \in R$ es punto de acumulación de D, $\lim_{x \to a} f(x) = b \neq 0$

T) $\exists \delta > 0$ / $\forall x \in E^*(a, \delta) \cap D$ s.c.q. $f(x) \cdot b > 0$

D/ Por definición de límite $\forall\varepsilon>0 \ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0 \ / \ \forall x\in E^{*}(a,\delta)\cap D$

s.c.q. $b-\varepsilon<f(x)<b+\varepsilon$

Entonces se consideran dos casos de acuerdo al signo de b.

Caso 1: si b > 0 elegimos $\varepsilon=\frac{b}{2}>0$

$\Rightarrow 0<b-\varepsilon=b-\frac{b}{2}=\frac{b}{2}<f(x)$ si $x\in E^{*}(a,\delta)\cap D$ #

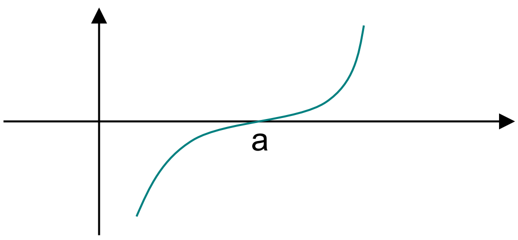
Caso 2: si b < 0 elegimos $\varepsilon=-\frac{b}{2}>0$

$\Rightarrow f(x)<b+\varepsilon=b+\left(-\frac{b}{2}\right)=\frac{b}{2}<0$ si $x\in E^{*}(a,\delta)\cap D$ #

Contrarrecíproco

" Si en todo entorno reducido de a, f(x) admite signos positivos y negativos,

y existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b \ \Rightarrow$ b = 0"



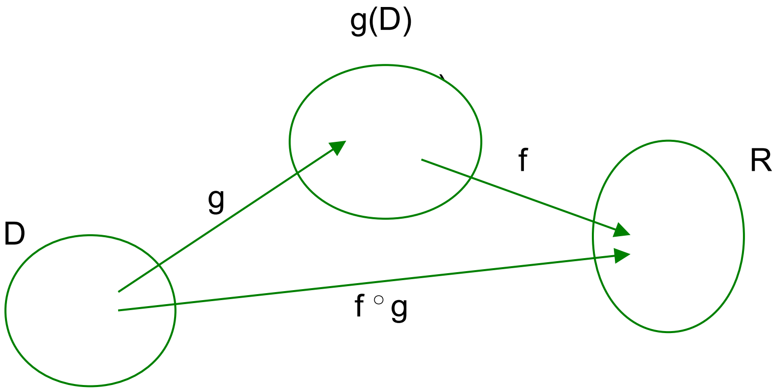
D/ Si suponemos $b\neq 0$, por el teorema de conservación del signo existe un entorno de a donde el signo de f(x) es constante (igual al de b), y esto contradice la hipótesis, por lo tanto se debe admitir que b = 0. #

6. LÍMITE DE LA FUNCIÓN COMPUESTA

a) Definición:

Dadas dos funciones reales de variable real: $g: D \to R \quad \wedge \quad f: g(D) \to R$

se define la función compuesta $f \circ g : D \to R \,/\, (f \circ g)(x) = f(g(x))$



Obs: el dominio de la función compuesta es $\mathrm{Dom}(f \circ g) = g^{-1}(\mathrm{Dom}(f))$.

Ejemplos:

1º) Dadas $f: f(x) = \dfrac{3x+2}{\mathrm{sen}(x)}$ y $g: g(x) = L(3-x)$ hallar $f \circ g$, $g \circ f$ y determinar sus respectivos dominios.

¿la composición de funciones es conmutativa?

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{3g(x)+2}{\mathrm{sen}(g(x))} = \frac{3L(3-x)+2}{\mathrm{sen}(L(3-x))}$$

$$\mathrm{Dom}(f \circ g) = g^{-1}(\mathrm{Dom}(f)) = g^{-1}(R - \{k\pi / k \in Z\}) = \{x \in R / L(3-x) \neq k\pi\} =$$

$$\{x \in R / x < 3 \wedge 3 - x \neq e^{k\pi}\} = \{x \in R / x < 3 \wedge x \neq 3 - e^{k\pi}\}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = L(3 - f(x)) = L\left(3 - \frac{3x+2}{\mathrm{sen}(x)}\right)$$

$$\mathrm{Dom}(g \circ f) = f^{-1}(\mathrm{Dom}(g)\} = f^{-1}(-\infty, 3) = \{x \in R / \frac{3x+2}{\mathrm{sen}(x)} < 3\}$$

Se observa que $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$ $\therefore$ la composición no es conmutativa.

2º) Dadas las funciones polinómicas $f: f(x) = 2x^3 + 3x \wedge g: g(x) = 5x^2 - 2x$

Hallar $f \circ g$ y $g \circ f$.

¿Qué se observa con respecto al grado de la composición?

Generalice el resultado para polinomios de grados m y n.

$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(5x^2 - 2x) = 2(5x^2 - 2x)^3 + 3(5x^2 - 2x)$

queda: $f \circ g(x) = 250x^6 - 300x^5 + 120x^4 - 16x^3 + 15x^2 - 6x$

Análogamente: $g \circ f(x) = 20x^6 + 60x^4 - 4x^3 + 45x^2 - 6x$

El grado de la composición es igual al producto de los grados de las componentes

b) Teorema del límite de la función compuesta

H) $\lim_{x \to a} g(x) = b \wedge \lim_{z \to b} f(z) = c$, donde f y g son funciones tales que $Dom(f) \cap Im(g) \neq \phi$, $a \in R$ es punto de acumulación del $Dom(g)$ y $b \in R$ es punto de acumulación de $Dom(f) \cap Im(g) / g(x) \neq b$.

T) $\lim_{x \to a} (f \circ g)(x) = c$

D / Se tiene que demostrar que dado $\varepsilon > 0$ $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ /

$\forall x \in E^*(a, \delta) \cap Dom(f \circ g)$ s.c.q. $(f \circ g)(x) \in E(c, \varepsilon)$

1º) $\lim_{z \to b} f(z) = c$ $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\exists \gamma = \gamma(\varepsilon) > 0$ /

$\forall z \in E^*(b, \gamma) \cap [Dom(f) \cap Im(g)]$ s.c.q. $f(z) \in E(c, \varepsilon)$

2º) $\lim_{x \to a} g(x) = b$ $\Rightarrow$ Con γ de la parte (1º), $\exists \delta' = \delta'(\gamma) > 0$,

pero a su vez $\gamma = \gamma(\varepsilon) \Rightarrow \delta' = \delta'(\gamma(\varepsilon)) = \delta(\varepsilon)$ y se verifica:

$\forall x \in E^*(a, \delta) \cap Dom(f \circ g)$ s.c.q. $g(x) \in E(b, \gamma)$, además $g(x) \neq b$

3º) Observamos que g(x) de 2º) verifica las condiciones de z en 1º)

$\therefore$ si se sustituye z por g(x) resulta la tesis.#

7. FUNCIONES EQUIVALENTES

a) Definición.

Dos funciones $f \wedge g : D \to R \;/\; a \in R$ es punto de acumulación de D, son equivalentes cuando $x \to a$ si y sólo si el límite del cociente entre ellas cuando $x \to a$ es igual a 1.

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \iff \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Ejemplos.

1º) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2+5x-6}{6x} = 1 \Rightarrow x^2+5x-6 \underset{x\to 3}{\sim} 6x$

2º) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^2-3x+5}{2x^2} = 1 \Rightarrow 2x^2-3x+5 \underset{x\to +\infty}{\sim} 2x^2$

3º) El resultado del ejemplo (2º) vale en general:

Si $a \neq 0$ y $\alpha > \beta > \gamma > \ldots . \Rightarrow ax^\alpha \pm bx^\beta \pm cx^\gamma \pm \ldots .. \underset{x\to\infty}{\sim} ax^\alpha$

"Cuando $x \to \infty$, todo polinomio es equivalente a su monomio de mayor grado"

b) Teorema.

La relación que hemos definido con el símbolo "$\underset{x\to a}{\sim}$" es de equivalencia.

D/ Hay que demostrar que se cumplen las propiedades idéntica, recíproca y transitiva:

Idéntica: $f(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$

D/ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{f(x)}=1$ #

Recíproca: si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \Rightarrow g(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$

D/ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{\dfrac{f(x)}{g(x)}}=\dfrac{1}{1}=1$ #

Transitiva: si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \wedge g(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x) \Rightarrow f(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$

D/ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{h(x)}=\dfrac{f(x)/g(x)}{h(x)/g(x)}=\dfrac{1}{1}=1$ #

c) Teoremas relativos a las funciones equivalentes.

Teorema 1:

"Toda función es equivalente a su límite si éste es distinto de cero"

H) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b\neq 0$

T) $f(x) \underset{x\to a}{\sim} b$

D/ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{b}=\dfrac{b}{b}=1$ #

Teorema 2:

"Si el límite del cociente de dos funciones es un real distinto de 0, entonces el numerador es equivalente al producto del límite multiplicado por el denominador"

H) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = b \neq 0$

T) $f(x) \underset{x\to a}{\sim} b\cdot g(x)$

D/ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{b\cdot g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)/g(x)}{b} = \dfrac{b}{b} = 1$ #

Teorema 3:

Principio de sustitución de la función equivalente: "En el cálculo de un límite se puede sustituir un factor o divisor por otro equivalente y el límite no cambia"

H) $f(x), g(x), h(x)$ son funciones y $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$

T) $\lim\limits_{x\to a} h(x)\cdot f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x)\cdot g(x)$

D/ $\lim\limits_{x\to a} h(x)\cdot f(x) = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{h(x)f(x)\cdot g(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} h(x)\cdot\dfrac{f(x)}{g(x)}\cdot g(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x)\cdot g(x)$ #

8. EQUIVALENCIAS FUNDAMENTALES. LÍMITES TIPO

Límites tipo:

i. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{L(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\cdot L(1+x) = \lim\limits_{x\to 0} L(1+x)^{\frac{1}{x}} = Le = 1$ #

ii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - 1}{x} = \lim\limits_{z\to 0}\dfrac{z}{L(1+z)} = 1$ #

Se realizó el cambio de variable z = $e^x - 1$ $\therefore$ $e^x = 1 + z$ $\therefore$ x = L(1+z)

Además como $x \to 0 \Rightarrow z = e^x - 1 \to 0$

iii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{La^x} - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x\cdot La} - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot La}{x} = La$ #

En el penúltimo paso se aplicó la equivalencia (ii)

iv. $$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^m-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{L(1+x)^m}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{m\cdot L(1+x)}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{m\cdot L(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{m\cdot x}{x}=m \quad \#$$

En el antepenúltimo paso se aplicó la equivalencia (ii) y en el penúltimo se aplicó la equivalencia (i).

v. $$\lim_{x\to 1}\frac{Lx}{x-1}=\lim_{z\to 0}\frac{L(1+z)}{z}=1 \quad \#$$

Se realizó el cambio de variable $z = x - 1$ y en el último paso se aplicó el límite tipo (i)

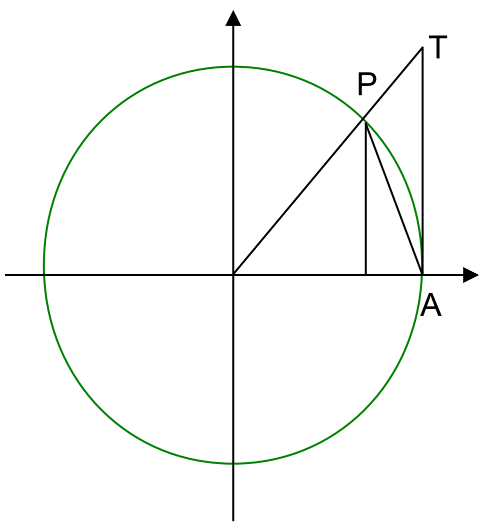
vi. $$\lim_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x-1}=\lim_{z\to 0}\frac{(1+z)^m-1}{z}=m \quad \#$$

Se realizó el cambio de variable $z = x - 1$ y se aplicó el límite tipo (iv)

vii. $$\lim_{x\to a}\frac{x^m-a^m}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{a^m\left(\frac{x^m}{a^m}-1\right)}{a\left(\frac{x}{a}-1\right)}=\lim_{z\to 1}a^{m-1}\left(\frac{z^m-1}{z-1}\right)=m\cdot a^{m-1} \quad \#$$

Se hizo el cambio de variable $z=\frac{x}{a}$ y se usó el límite tipo (vi)

viii.



Se considera el círculo trigonométrico de la figura. Designaremos con «x» al arco AP medido en radianes.
Entonces:
sen(x) = BP
cos(x) = OB
tg(x) = AT
$\lim_{x\to 0}\text{sen}(x)=0 \wedge \lim_{x\to 0}\cos(x)=1$

Además, geométricamente tenemos que: el triángulo OAP está contenido en el sector circular OAP el que a su vez está contenido en el triángulo OAT, entonces sus respectivas áreas (suponiendo x > 0) verifican la desigualdad:

$$\frac{(OA)\cdot(BP)}{2} < \frac{x\cdot(OP)^2}{2} < \frac{(OA)\cdot(AT)}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1\cdot \text{sen}(x)}{2} < \frac{x\cdot 1^2}{2} < \frac{1\cdot \text{tg}(x)}{2} \quad \Rightarrow$$

$$\text{sen}(x) < x < \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)} \quad \Rightarrow \quad 1 < \frac{x}{\text{sen}(x)} < \frac{1}{\cos(x)}$$

En esta última desigualdad, tomando límite para $x \to 0$, como $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\cos(x)} = 1$, por el teorema del límite de la función comprendida, se deduce que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\text{sen}(x)} = 1 \qquad \therefore \qquad x \underset{x\to 0}{\sim} \text{sen}(x) \qquad \#$$

ix. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{(1-\cos(x))\cdot(1+\cos(x))}{x^2\cdot(1+\cos(x))} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos^2(x)}{2x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{sen}^2(x)}{2x^2} = \frac{1}{2}$ #

x. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{tg}(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{sen}(x)/\cos(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1$ #

xi. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{Arc}\,\text{sen}(x)}{x} = \lim\limits_{z\to 0} \frac{z}{\text{sen}(z)} = 1$ #

Se efectuó el cambio de variable z = Arcsen(x)

xii. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{Arc}\,\text{tg}(x)}{x} = \lim\limits_{z\to 0} \frac{z}{\text{tg}(z)} = 1$ #

Se realizó el cambio de variable z = Arctg(x)

TABLA DE EQUIVALENCIAS		LÍMITES TIPO
i)	$L(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{L(1+x)}{x} = 1$
ii)	$e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
iii)	$a^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x \cdot La$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = La$
iv)	$(1+x)^m - 1 \underset{x\to 0}{\sim} m \cdot x$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^m - 1}{x} = m$
iv')	$\sqrt{1+x} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2} \cdot x$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{2}$
iv'')	$\sqrt[n]{1+x} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{n} \cdot x$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{n}$
v)	$Lx \underset{x\to 1}{\sim} x - 1$	$\lim\limits_{x\to 1} \frac{Lx}{x-1} = 1$
vi)	$x^m - 1 \underset{x\to 1}{\sim} m \cdot (x-1)$	$\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^m - 1}{x-1} = m$
vi')	$\sqrt{x} - 1 \underset{x\to 1}{\sim} \frac{1}{2} \cdot (x-1)$	$\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x-1} = \frac{1}{2}$
vi'')	$\sqrt[n]{x} - 1 \underset{x\to 1}{\sim} \frac{1}{n} \cdot (x-1)$	$\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt[n]{x} - 1}{x-1} = \frac{1}{n}$
vii)	$x^m - a^m \underset{x\to a}{\sim} m \cdot a^{m-1}(x-a)$	$\lim\limits_{x\to a} \frac{x^m - a^m}{x-a} = m \cdot a^{m-1}$
viii)	$sen(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1$
ix)	$1 - cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2} \cdot x^2$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$
x)	$tg(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{tg(x)}{x} = 1$
xi)	$Arc\,sen(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{Arc\,sen(x)}{x} = 1$

xii) $\quad \mathrm{Arc\,tg}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{Arc\,tg}(x)}{x} = 1$

9. INFINITOS

a) Definición:

"Una función f es un infinito, cuando x→a , si y sólo si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$"

Ejemplos:

1. $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x-2}$ es infinito cuando x→2 y cuando x→∞

2. $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ es infinito si x→ +∞ y si x→ 0

b) Órdenes (comparación de infinitos)

Suponiendo que f(x) y g(x) son infinitos cuando x → a:

Simbolizaremos con *O*: "orden de", entonces:

i. $\quad O\,[f(x)] = O\,[g(x)] \;\Leftrightarrow\; \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = b \in R^*$,

Dos infinitos son de igual orden cuando el límite de su cociente es un real distinto de 0.

En el caso particular que sea b = 1, diremos que los infinitos son equivalentes.

ii. $\mathcal{O}\,[f(x)] < \mathcal{O}\,[g(x)] \iff \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

Si el límite del cociente de dos infinitos es 0, el infinito del numerador es de menor orden que el del denominador.

iii. $\mathcal{O}\,[f(x)] > \mathcal{O}\,[g(x)] \iff \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$

Si el límite del cociente de dos infinitos es ∞, el infinito del numerador es de mayor orden que el del denominador.

iv Infinitos no comparables:

Si no existe el limite del cociente de dos infinitos entonces no son de órdenes comparables.

c) Teoremas relativos a los infinitos.

Los teoremas que a continuación se exponen constituyen la base para resolver los problemas de límites donde intervengan los infinitos.

Teorema 1:

"La suma algebraica de varios infinitos de diferentes órdenes es equivalente al de mayor orden de ellos"

H) $\begin{cases} f(x)\,,\ g(x)\,,\ h(x) \text{ son infinitos para } x\to a \\ \mathcal{O}\,[f(x)] > \mathcal{O}\,g(x)] > \mathcal{O}\,h(x)] \end{cases}$

T) $f(x) \pm g(x) \pm h(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$

D/ $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) \pm g(x) \pm h(x)}{f(x)} = \lim\limits_{x \to a} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)} \pm \dfrac{g(x)}{f(x)} \pm \dfrac{h(x)}{f(x)} \right] = 1$

Porque por hipótesis f(x) es el de mayor orden, entonces:

$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 0$ y $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{h(x)}{f(x)} = 0$ #

Teorema 2:

"La diferencia entre dos infinitos equivalentes es de menor orden que cualquiera de ellos"

H) f(x) y g(x) son infinitos equivalentes para $x \to a$

T) *O* [f(x)-g(x)] < *O* [f(x)]

D/ $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - g(x)}{f(x)} = \lim\limits_{x \to a} \left(\dfrac{f(x)}{f(x)} - \dfrac{g(x)}{f(x)} \right) = 1 - 1 = 0$ porque por hipótesis

$f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$, por ende: $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 1$ #

10. INFINITOS FUNDAMENTALES

Definiciones

Las siguientes funciones son infinitos cuando $x \to +\infty$

i. **Infinito logarítmico:** $(\log_b(x))^m$ con $b > 1$ y $m > 0$

ii. **Infinito potencial:** x^α con $\alpha > 0$

iii. **Infinito exponencial:** a^x con $a > 1$

iv. **Infinito potencial-exponencial:** x^{kx} con $k > 0$

Estos infinitos están ordenados de menor a mayor, como lo establecen los siguientes teoremas.

b) Teorema sobre los órdenes de los infinitos:

Teorema 1

$$O\ \left\lfloor (\log_b(x))^m \right\rfloor \underset{x\to+\infty}{<} O\ \left\lfloor x^{\alpha} \right\rfloor \quad \text{donde } b > 1,\ m > 0 \text{ y } \alpha > 0$$

Teorema 2

$$O\ \left\lfloor x^{\alpha} \right\rfloor \underset{x\to+\infty}{<} O\ \left\lfloor a^x \right\rfloor \quad \text{donde } \alpha > 0 \text{ y } a > 1$$

Teorema 3

$$O\ \left\lfloor a^x \right\rfloor \underset{x\to+\infty}{<} O\ \left\lfloor x^{kx} \right\rfloor \quad \text{donde } a > 1 \text{ y } k > 0$$

Previo a la demostración veamos una propiedad de las sucesiones:

Propiedad ⟨∗⟩

H) $\{a_n : n \in N\}$ / $a_n > 0\ \ \forall n \in N$ y $\exists\ k < 1 \ /\ \dfrac{a_n}{a_{n-1}} \le k \quad \forall n \in N^*$

T) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$

D/ Por hipótesis $\forall n \in N^*$ s.c.q. $a_n \le k \cdot a_{n-1}$,

entonces aplicando esta condición sucesivamente se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 \le k \cdot a_0 \\ a_2 \le k \cdot a_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n \le k \cdot a_{n-1} \end{array}\right\} \Rightarrow a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots\ldots\ldots \cdot a_n \le k \cdot a_0 \cdot k \cdot a_1 \cdot \ldots\ldots\ldots \cdot k \cdot a_{n-1}$$

$$\Rightarrow a_n \le k^n \cdot a_0 \Rightarrow 0 \le \lim_{n\to+\infty} a_n \le \lim_{n\to+\infty} k^n \cdot a_0 = 0$$

#

Demostración de los teoremas de órdenes de los infinitos.

Comenzaremos demostrando el teorema 2:

D/ Hay que demostrar que $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0 \quad \forall \alpha > 0 \wedge a > 1$

1º) Consideramos el caso x = n $\in N$, entonces hay que demostrar que la sucesión $a_n = \frac{n^\alpha}{a^n}$ tiene límite 0, para esto utilizamos la propiedad $\langle * \rangle$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n^\alpha / a^n}{(n-1)^\alpha / a^{n-1}} = \frac{n^\alpha}{a^n} \cdot \frac{a^{n-1}}{(n-1)^\alpha} = \frac{1}{a} \cdot \left(\frac{n}{n-1}\right)^\alpha < \frac{1}{a} < 1 \;\Rightarrow\; \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

con esto queda demostrado que: $O\,(n^\alpha) \underset{n\to+\infty}{<} O\,(a^n)$ #

2º) Ahora generalizamos para $x \in R^+$.

Consideramos la parte entera de x, que es un número natural

n = E(x) $\Rightarrow$ $n \le x < n+1$ $\Rightarrow$ $n^\alpha \le x^\alpha < (n+1)^\alpha$ (1)

Por otro lado: $a^n \le a^x < a^{n+1}$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{a^{n+1}} < \frac{1}{a^x} \le \frac{1}{a^n}$ (2)

de las desigualdades (1) y (2) $\frac{n^\alpha}{a^{n+1}} < \frac{x^\alpha}{a^x} < \frac{(n+1)^\alpha}{a^n}$ (3)

Ahora bien, si $x \to +\infty \;\Rightarrow\; n \to +\infty \;\Rightarrow$

Usando el resultado obtenido en la parte (1º)

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^{\alpha}}{a^{n+1}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{n^{\alpha}}{a^{n}} = \dfrac{1}{a}\cdot \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^{\alpha}}{a^{n}} = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(n+1)^{\alpha}}{a^{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a\cdot(n+1)^{\alpha}}{a^{n+1}} = a\cdot \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(n+1)^{\alpha}}{a^{n+1}} = a\cdot \lim\limits_{m\to+\infty} \dfrac{m^{\alpha}}{a^{m}} = 0 \end{cases}$$

Finalmente, de estos dos resultados y de la desigualdad (3) se concluye

que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{\alpha}}{a^{x}} = 0$, de donde: $O\,(x^{\alpha}) \underset{x\to+\infty}{<} O\,(a^{x})$ #

Veamos ahora la demostración del teorema 1

D/ Hay que comprobar que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\log_b x)^m}{x^{\alpha}} = 0$ siendo $\begin{cases} b > 1 \wedge m > 0 \\ \alpha > 0 \end{cases}$

Vamos a realizar el cambio de variable: $z = \log_b x$

entonces $z \to +\infty$ y $x = b^z$, luego:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\log_b x)^m}{x^{\alpha}} = \lim_{z\to+\infty} \frac{z^m}{\left(b^z\right)^{\alpha}} = \lim_{z\to+\infty} \frac{z^m}{\left(b^{\alpha}\right)^{z}} = 0$$

observase que se ha aplicado, en el último paso, el teorema 2. #

La demostración del teorema 3 no ofrece dificultades:

D/ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{a^x}{x^{kx}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{a}{x^k}\right)^x = 0$ #

11. INFINITÉSIMOS

a) Definición:

"Una función f(x) es un infinitésimo cuando $x \to a$ $\Leftrightarrow$ $\lim_{x \to a} f(x) = 0$"

Ejemplos:

1. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^3}$ es infinitésimo cuando $x \to \pm 2$ y cuando $x \to \pm\infty$

2. $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$ es infinitésimo cuando $x \to 0$ y cuando $x \to +\infty$

b) Órdenes (comparación de infinitésimos)

Si f(x) y g(x) son infinitésimos cuando $x \to$ a:

i) O [f(x)] = O [g(x)] $\Leftrightarrow$ $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = b \neq 0$

Dos infinitésimos son de igual orden cuando el límite del cociente es un número real "b" distinto de 0

En el caso b = 1 los infinitésimos son equivalentes.

ii) O [f(x)] > O [g(x)] $\Leftrightarrow$ $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$

El límite del cociente de dos infinitésimos es 0 si y sólo si el infinitésimo del numerador es de mayor orden que el infinitésimo del denominador

iii) O [f(x)] < O [g(x)] $\Leftrightarrow$ $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$

El límite del cociente de dos infinitésimos es ∞ si y sólo si el infinitésimo del numerador es de menor orden que el del denominador

c) Teoremas relativos a los infinitésimos

Teorema 1

“ La suma algebraica de varios infinitésimos de diferentes órdenes es equivalente al de menor orden de ellos”

H) f(x) , g(x) , h(x) son infinitésimos para $x \to a$ tales que:

O [f(x)] < O [g(x)] < O [h(x)]

T) $f(x) \pm g(x) \pm h(x) \underset{x \to a}{\sim} f(x)$

D/ $$\lim_{x \to a} \frac{f(x) \pm g(x) \pm h(x)}{f(x)} = \lim_{x \to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \pm \frac{g(x)}{f(x)} \pm \frac{h(x)}{f(x)} \right] = 1$$

Porque por hipótesis f(x) es el de menor orden, entonces:

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = 0 \text{ y } \lim_{x \to a} \frac{h(x)}{f(x)} = 0 \quad \#$$

Teorema 2:

“La diferencia entre dos infinitésimos equivalentes es de mayor orden que cualquiera de ellos”

H) f(x) y g(x) son infinitésimos equivalentes para $x \to a$

T) O [f(x) - g(x)] > O [f(x)]

D/ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-g(x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f(x)}{f(x)}-\dfrac{g(x)}{f(x)}\right)=1-1=0$ porque por hipótesis

$f(x)\underset{x\to a}{\sim}g(x)$, por ende: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{f(x)}=1$ #

Ejemplo

Ya hemos visto que $\operatorname{sen}(x)\underset{x\to 0}{\sim}x$ y $\operatorname{tg}(x)\underset{x\to 0}{\sim}x \Rightarrow \operatorname{sen}(x)\underset{x\to 0}{\sim}\operatorname{tg}(x)$

Por otro lado $\operatorname{tg}(x)-\operatorname{sen}(x)=\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}-\operatorname{sen}(x)=\dfrac{\operatorname{sen}(x)-\operatorname{sen}(x)\cdot\cos(x)}{\cos(x)}=$

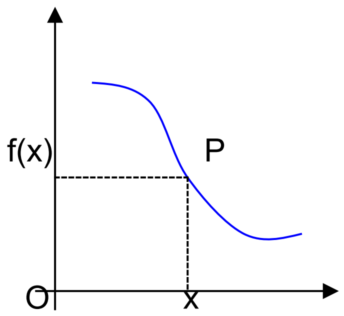
$$\frac{\operatorname{sen}(x)\cdot(1-\cos(x))}{\cos(x)}\underset{x\to 0}{\sim}\frac{x\cdot\frac{1}{2}\cdot x^2}{1}=\frac{1}{2}\cdot x^3 \quad\therefore\quad \operatorname{tg}(x)-\operatorname{sen}(x)\underset{x\to 0}{\sim}\frac{1}{2}\cdot x^3$$

En este ejemplo se aprecia que en la diferencia de dos infinitésimos equivalentes se obtiene otro infinitésimo de orden superior.

12. RAMAS INFINITAS Y ASÍNTOTAS

a) Definición de rama infinita (R.I.)

Si G(f) es el gráfico de una función y = f(x) y el punto P(x, f(x)) $\in$ G(f)



La distancia desde el origen al punto P

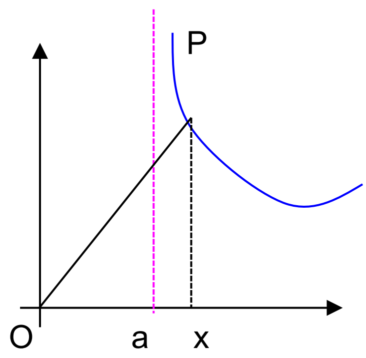
está dada por $\overline{OP} = \sqrt{x^2 + (f(x))^2}$

La función y = f(x) tiene una R.I.

cuando $x \to \begin{cases} a^{\pm} \\ \pm\infty \end{cases} \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to \begin{cases} a^{\pm} \\ \pm\infty \end{cases}} \overline{OP} = \infty$

Obs.1 Si $x \to a^{\pm}$

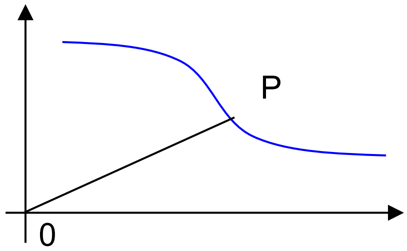
$$\lim_{x \to a^{\pm}} \overline{OP} = \infty \Leftrightarrow \lim_{x \to a^{\pm}} \sqrt{x^2 + (f(x))^2} = \infty \Leftrightarrow \lim_{x \to a^{\pm}} f(x) = \infty$$



Cuando x tiende a un valor finito una función presenta una R.I. si y sólo si el límite de la función es infinito

Obs.2 Si $x \to \pm\infty$

$\lim_{x\to\pm\infty} \overline{OP} = \infty \Leftrightarrow \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{x^2 + (f(x))^2} = \infty$ y este resultado se cumple siempre con la única condición de que $Dom(f) \cap (H, +\infty) \neq \phi \quad \forall\ H \in R$

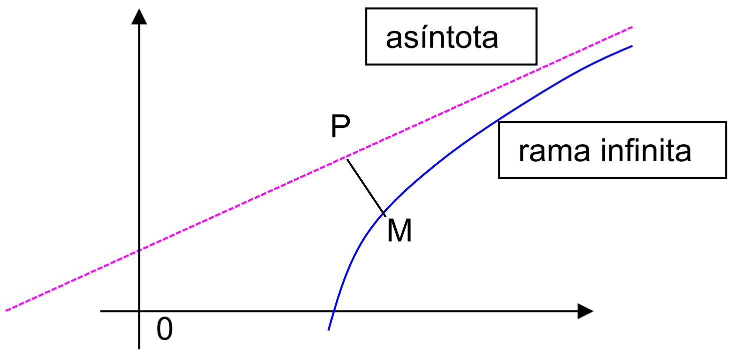


Cuando la variable x tiende a infinito, si la función está definida, siempre presenta una R.I.

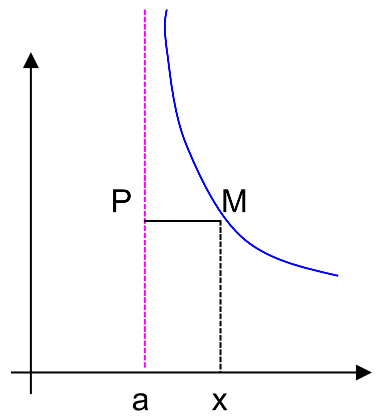
b) Definición de asíntota

Una R.I. cuando $x \to \begin{cases} a^{\pm} \\ \pm\infty \end{cases}$ admite como asíntota a una recta (r)

si y sólo si $\lim_{x\to\begin{cases} a^{\pm} \\ \pm\infty \end{cases}} \overline{PM} = 0$, donde $\overline{PM}$ representa la distancia de la R.I. a la asíntota



c) Asíntota vertical



H) $\lim_{x \to a^{\pm}} f(x) = \infty$

T) La recta $x = a$ es asíntota

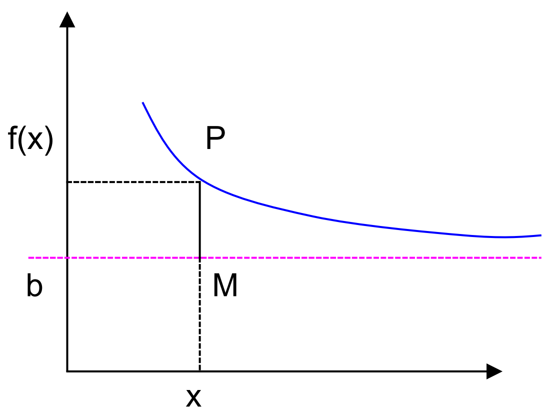
D/ Estamos como en el caso de la observación 1, entonces la función presenta una R.I.

Solo resta demostrar que $\lim_{x \to a^{\pm}} \overline{PM} = 0$

$$\overline{PM} = |x - a| \Rightarrow \lim_{x \to a^{\pm}} \overline{PM} = \lim_{x \to a^{\pm}} |x - a| = 0 \qquad \#$$

d) Asíntota horizontal

$$\begin{cases} \text{H)} \quad \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b \quad \text{donde } b \in R \\ \\ \text{T)} \quad \text{La recta } y = b \text{ es asíntota} \end{cases}$$



D/ Estamos como en el caso de la observación 2 , por lo tanto

la función presenta una R.I.

Solo resta demostrar que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \overline{PM} = 0$

$\overline{PM} = |\, f(x) - b \,| \Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} \overline{PM} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} |\, f(x) - b \,| = 0$ #

e) Asíntota oblicua

La condición necesaria y suficiente para que la recta y = mx + n sea asíntota de la función y = f(x) es que s.c.q.:

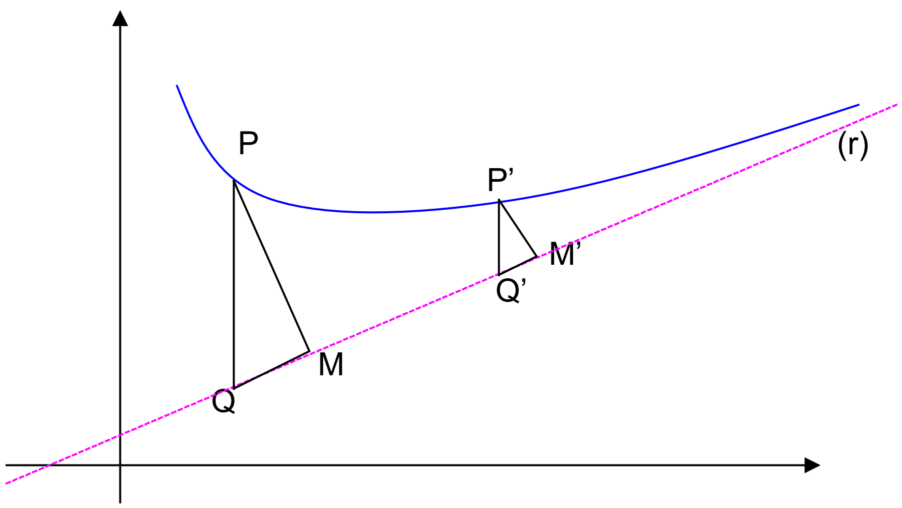
$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{y} \quad n = \lim_{x\to\infty} \left(f(x) - mx\right)$$

1º) Condición necesaria

H) La recta (r) y = mx + n es asíntota de y = f(x)

T) $m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ y $n = \lim\limits_{x\to\infty} \left(f(x) - mx\right)$

D/ Por hipótesis y por definición de asíntota $\lim\limits_{x\to\infty} \overline{PM} = 0$



Consideremos los triángulos de la forma PMQ donde P(x , f(x)) es un punto genérico del gráfico de f , $\overline{PM} \perp (r)$, $\overline{PQ} \parallel (OY)$ y $\overline{QM} \subset (r)$.

PMQ y P'M'Q' son semejantes $\Rightarrow \dfrac{\overline{PQ}}{\overline{PM}} = \dfrac{\overline{P'Q'}}{\overline{P'M'}} = k$ (constante)

$$\Rightarrow \quad \overline{PQ} = k \cdot \overline{PM} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to\infty} \overline{PQ} = \lim_{x\to\infty} k \cdot \overline{PM} = 0$$

$\overline{PQ}$ = | f(x) – (mx+n) | porque Q(x , mx+n) es un punto de la recta (r).

$\Rightarrow$ g(x) = f(x) – (mx+n) es un infinitésimo cuando $x \to \infty$

Podemos escribir f(x) = mx+n +g(x)

$$\Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{mx+n+g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(m + \dfrac{n+g(x)}{x}\right) = m \\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x) - mx\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(n + g(x)\right) = n \end{cases}$$

#

2º) Condición suficiente

H) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m$ y $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x) - mx\right) = n$

T) La recta y = mx + n es asíntota

D/ Utilizando la misma semejanza de triángulos que en el teorema directo

$\dfrac{\overline{PM}}{\overline{PQ}} = \dfrac{\overline{P'M'}}{\overline{P'Q'}} = c$ (constante) $\Rightarrow \overline{PM} = c \cdot \overline{PQ}$ de donde, para demostrar que

$\lim\limits_{x\to\infty} \overline{PM} = 0$, será suficiente con demostrar que $\lim\limits_{x\to\infty} \overline{PQ} = 0$.

Ahora bien $\overline{PQ}$ = | f(x) – (mx+n) | = | f(x) – mx –n |

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \overline{PQ} = \lim\limits_{x\to\infty} \left|\left(f(x) - mx\right) - n\right| = n - n = 0$ #

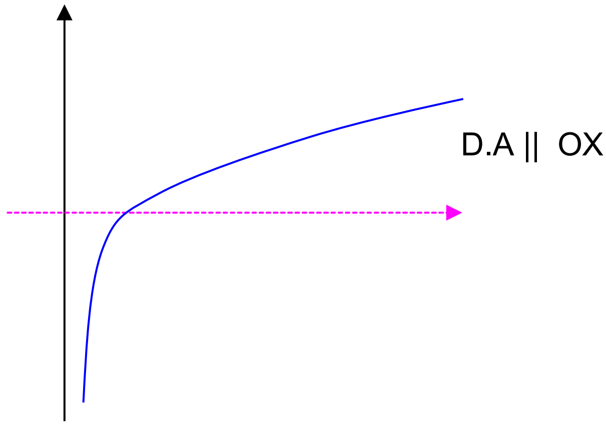
f) Direcciones asintóticas

i) Dirección asintótica paralela al eje OX (D.A. || OX)

Una función y = f(x) presenta una D.A. || OX cuando

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$

Ejemplo: f(x) = Lx $\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} L(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{L(x)}{x} = 0$

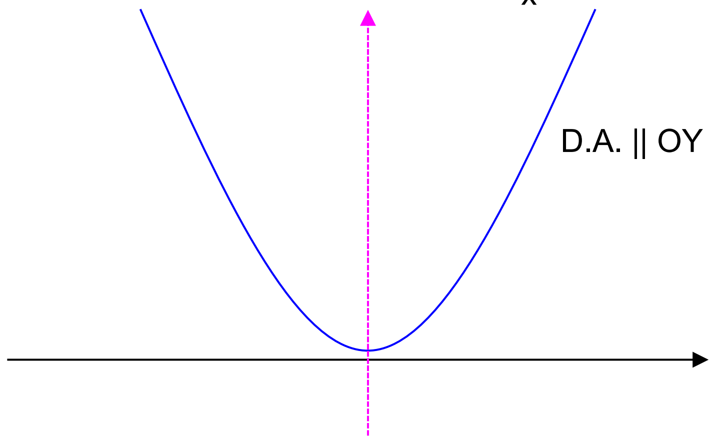


ii) Dirección asintótica paralela al eje OY (D.A. || OY)

Una función presenta una dirección asintótica paralela al eje OY

cuando $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$

Ejemplo: $f(x) = x^2 \Rightarrow \lim_{x\to\infty} x^2 = \infty$ y $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x} = \infty$



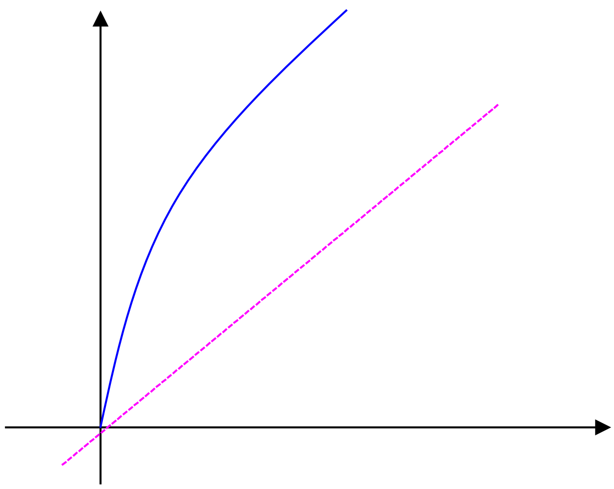
iii) Dirección asintótica paralela a una recta y = mx

Una función presenta una D.A.|| y = mx cuando:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = m \quad \text{y} \quad \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \infty$$

Ejemplo: $f(x) = x + \sqrt{x} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{x+\sqrt{x}}{x} = 1$ y $\lim_{x\to\infty} (\cancel{x} + \sqrt{x} - \cancel{x}) = \infty$

Tiene una dirección asintótica paralela a la recta y = x



EJERCICIOS

I. Calcular los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\to\pm\infty}} \dfrac{\sqrt{x-2}}{x-1}$

2. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\to\pm\infty}} \dfrac{x^2-1}{x-1}$

3. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x\to\pm\infty}} \dfrac{x^2-x-2}{x^3-4x}$

4. $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x\to\pm\infty}} \dfrac{x^2-6x+9}{x^3-7x^2+15x-9}$

5. $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x\to\pm\infty}} \dfrac{x^4+x^3}{5x^2+x-4}$

6. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x\to 5}} \dfrac{(x^2+3)(x^2-5x+6)}{(x-5)(x^2+5x-14)}$

7. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\to 3}} \dfrac{x^3-9x}{x^2-4x+3}$

8. $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x\to -3\\ x\to\pm\infty}} \dfrac{\sqrt{9-x^2}}{x-3}$

9. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\to\pm\infty}} \dfrac{\sqrt{9x^2+4x+3}}{x-1}$

10. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2-5x+3}{x^2-1}$

11. $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{2^{x-1}-1}$

12. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+2}\right)$

13. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\sqrt{x+6}-\sqrt{x+4}\right)$

14. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}$

15. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\sqrt{x^2-5x+6}-\sqrt{x^2-3x+2}\right)$

16. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$

17. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x}$

18. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}$

19. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$

20. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+4}-2}$

21. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{x^3+10}+3x}{\sqrt{x^2-x+2}+2x}$

22. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{4x+8}-\sqrt{7x+2}}{\sqrt{3x+3}-3}$

23. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\sqrt{x^2-4x}+x\right)$

24. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+4x^2-x}-\sqrt[3]{x^3+2x^2-x+1}\right)$

25. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\sqrt[3]{-8x^3+5x^2}+2x\right)$

26. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{2}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$

27. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{5x+1}-\sqrt{5x+1}}{2x}$

28. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\sqrt[3]{(x+1)^2(x+8)}-x\right)$

Resolución Ejercicio I

En la resolución del límite de una función entra en juego el manejo de varias técnicas operatorias, el conocimiento de los teoremas y propiedades de los límites, el reconocimiento de los casos indeterminados y los caminos que conduzcan a su determinación.

1) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x-2}}{x-1}$ $\nexists$ porque el dominio de esta función es $\{ x \in R : x \geq 2 \}$

Por igual razón $\nexists$ $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{x-2}}{x-1}$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x-2}}{x-1} = 0$ es del tipo de indeterminación $\dfrac{\infty}{\infty}$ y se resuelve por órdenes, el numerador es infinito de menor orden que el del numerador.

2) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 2} (x+1) = 3$ es del tipo indeterminado $\dfrac{0}{0}$ se resuelve aplicando el teorema de descomposición factorial, aprovechando que el valor al que tiende x es raíz del polinomio, luego se simplifica y el límite queda determinado

$\lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{x^2-1}{x-1} = \pm\infty$ en este caso el numerador es infinito de mayor orden que el denominador.

3) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-x-2}{x^3-4x} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x^2+2x)} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+1}{x^2+2x} = \dfrac{3}{8}$

$\lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{x^2-x-2}{x^3-4x} = 0$

4) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-6x+9}{x^3-7x^2+15x-9} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{(x-3)^2}{(x-3)^2(x-1)} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{x^2-6x+9}{x^3-7x^2+15x-9} = 0$

5) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^4+x^3}{5x^2+x-4} = \lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)x^3}{(x+1)(5x-4)} = \lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3}{5x-4} = \dfrac{1}{9}$

$\lim\limits_{x\to \pm\infty}\dfrac{x^4+x^3}{5x^2+x-4} = +\infty$

6) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^2+3)(x^2-5x+6)}{(x-5)(x^2+5x-14)} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{7(x-2)(x-3)}{-3(x-2)(x+7)} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-7(x-3)}{3(x+7)} = \dfrac{7}{27}$

$\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{(x^2+3)(x^2-5x+6)}{(x-5)(x^2+5x-14)} = \lim\limits_{x\to 5^{\pm}}\dfrac{28\times 6}{(x-5)\times 36} = \pm\infty$

es de la forma constante distinta de 0 sobre 0 que es infinito, se consideran los límites laterales porque en 5 cambia el signo.

7) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-9x}{x^2-4x+3} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-8}{(x-1)(x-3)} = \lim\limits_{x\to 1^{\pm}}\dfrac{4}{x-1} = \pm\infty$

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-9x}{x^2-4x+3} = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x^2+3x)}{(x-3)(x-1)} = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+3x}{x-1} = 9$

8) $\lim\limits_{x\to 3^{-}}\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{x-3} =$

$\lim\limits_{x\to 3^{-}}\dfrac{\sqrt{(3-x)(3+x)}}{-(3-x)} = \lim\limits_{x\to 3^{-}} -\dfrac{\sqrt{6}\,(3-x)^{1/2}}{(3-x)^{2/2}} = \lim\limits_{x\to 3^{-}}\dfrac{-\sqrt{6}}{(3-x)^{1/2}} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to -3^{+}}\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{x-3} = 0$

Se calcula sólo estos límites laterales porque el dominio de la función es el intervalo [-3 , 3) : los límites para $x\to 3^{+}$, $x\to -3^{-}$, $x\to\pm\infty$ no existen.

9) $\lim\limits_{x\to 1^{\pm}} \dfrac{\sqrt{9x^2+4x+3}}{x-1} = \pm\infty$

$\lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{\sqrt{9x^2+4x+3}}{x-1} = \lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{3\,|\,x\,|}{x} = \pm 3$

10) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2-5x+3}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(2x-3)}{(x-1)(x+1)} = -\dfrac{1}{2}$

11) $\lim\limits_{x\to 1^{+}} \sqrt{2^{x-1}-1} = 0$

El límite por la izquierda de 1 no existe ya que el dominio de esta función es $\{\, x \in R : x \geq 1 \,\}$

12) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+2}\right) = +\infty$

Es del tipo indeterminado $\infty - \infty$ pero el primero es superior al segundo. Por otro lado el dominio de la función es $\{\, x \in R : x \geq -2 \,\}$, entonces no se puede calcular el límite para $x \to -\infty$

13) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x+6} - \sqrt{x+4}\right) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x+6-x-4}{\sqrt{x+6}+\sqrt{x+4}} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2}{\sqrt{x+6}+\sqrt{x+4}} = 0$

Es del tipo indeterminado $\infty - \infty$, con ambos infinitos equivalentes, para resolver esta indeterminación se utiliza el producto de expresiones conjugadas: $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right) = a - b \;\Rightarrow\; \sqrt{a}-\sqrt{b} = \dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

Por otro lado, para $x \to -\infty$ no existe la función, entonces no tiene sentido plantear su límite.

14) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x+\sqrt{x}-x}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2}$

15) $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \left(\sqrt{x^2-5x+6} - \sqrt{x^2-3x+2}\right) = \lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{x^2-5x+6-x^2+3x-2}{\sqrt{x^2-5x+6}+\sqrt{x^2-3x+2}} =$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x}{2|x|}=\mp 1$$

16) $$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\frac{x-3}{\sqrt{x}+\sqrt{3}}}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{3}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

17) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2+x+1-1}{\sqrt{x^2+x+1}+1}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}+1}=\frac{1}{2}$$

18) $$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x+6-x^2-2x+6}{(x^2-4x+3)(\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6})}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{-4(x-3)}{6(x-3)(x-1)}=\lim_{x\to 3}\frac{-2}{3(x-1)}=-\frac{1}{3}$$

19) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x+2-2}{x(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

20) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+4}-2}=\lim_{x\to 0}\frac{(x+1-1)(\sqrt{x+4}+2)}{(\sqrt{x+1}+1)(x+4-4)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}+2}{\sqrt{x+1}+1}=2$$

21) $$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^3+10}+3x}{\sqrt{x^2-x+2}+2x}=\lim_{x\to -1}\frac{(x^3+10-9x^2)(\sqrt{x^2-x+2}-2x)}{(x^2-x+2-4x^2)(\sqrt{x^3+10}-3x)}=$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{4(x^3-9x^2+10)}{6(-3x^2-x+2)}=\lim_{x\to -1}\frac{2(x+1)(x^2-10x+10)}{3(x+1)(-3x+2)}=\frac{42}{15}$$

22) $$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{4x+8}-\sqrt{7x+2}}{\sqrt{3x+3}-3}=\lim_{x\to 2}\frac{(4x+8-7x-2)(\sqrt{3x+3}+3)}{(3x+3-9)(\sqrt{4x+8}+\sqrt{7x+2})}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{6(-3x+6)}{8(3x-6)} = -\frac{3}{4}$$

23) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-4x}+x\right)=+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-4x}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{x^2-4x}+x)(\sqrt{x^2-4x}-x)}{\sqrt{x^2-4x}-x} =$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-4x-x^2}{2|x|} = \lim_{x\to-\infty}\frac{4|x|}{2|x|}=2$$

Se ha utilizado que $\sqrt{x^2}=|x|$ y que para $x < 0$: $|x| = -x$

24) En éste y los ejercicios que siguen se utilizan las expresiones conjugadas:

$$(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})=a-b \quad \Rightarrow \quad \sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}=\frac{a-b}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+4x^2-x}-\sqrt[3]{x^3+2x^2-x+1}\right) =$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3+4x^2-x-x^3-2x^2+x-1}{\sqrt[3]{(x^3+4x^2-x)^2}+\sqrt[3]{(x^3+4x^2-x)(x^3+2x^2-x+1)}+\sqrt[3]{(x^3+2x^2-x+1)^2}} =$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2}{3x^2}=\frac{2}{3}$$

25) $\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt[3]{-8x^3+5x^2}+2x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}(2x-\sqrt[3]{8x^3-5x^2-2x}) =$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{8x^3-8x^3+5x^2+2}{4x^2+2x\sqrt[3]{8x^3-5x^2-2x}+\sqrt[3]{(8x^3-5x^2-2x)^2}} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{5x^2}{12x^2}=\frac{5}{12}$$

26) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{2}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}} = \lim_{x\to 0}\frac{(x+2-2)(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})}{(\sqrt[3]{(x+2)^2}+\sqrt[3]{(x+2)2}+\sqrt[3]{4})(x+2-2)} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt[3]{4}}$

27) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{5x+1}-\sqrt{5x+1}}{2x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt[3]{5x+1}-1)+(1-\sqrt{5x+1})}{2x} =$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}(5x)-\frac{1}{2}(5x)}{2x} = \lim_{x\to 0}-\frac{5x}{12x}=-\frac{5}{12}$$

28) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt[3]{(x+1)^2(x+8)}-x\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{(x^2+2x+1)(x+8)-x^3}{\sqrt[3]{(x+1)^4(x+8)^3}+x\sqrt[3]{(x+1)^2(x+8)}+x^2} =$

II. Hallar a y b tales que cumplan las condiciones dadas:

a) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+a\cdot x+2b-2}{2x^2+(b+4)\cdot x+2b}=\dfrac{1}{2}$ b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2+1}-5a\cdot x+7b\right)=0$

c) $\lim\limits_{\substack{x\to -1^+\\ x\to 2^-}}\dfrac{e^{x-2}}{x^2+a\cdot x+b}=-\infty$ d) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{4x^2+6x-3}-(a\cdot x+b)\right)=0$

III. Calcular los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$ 2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$ 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-1}{e^{2x}-1}$ 4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{L(1+5x)}{L(1+3x^2)}$

5. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{L(2x-3)}{x^5-32}$ 6. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{e^{4x}-e^8}{16-x^4}$ 7. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2^{x+1}-8}{4-2x}$ 8. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{L(\frac{x+1}{3})}$

9. $\lim\limits_{x\to +\infty}x\cdot L\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$ 10. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{L3-L(2+x)}{x-1}$ 11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{L(1+x+x^2)-L(1-x+x^2)}{x^2-2x}$

12. $\lim_{x\to\pm\infty} x\cdot L\left|\frac{3x-2}{3x+1}\right|$ 13. $\lim_{x\to 2}\frac{L\left|1+2x-x^2\right|}{x-2}$ 14. $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{L\left|\frac{x-2}{x+1}\right|}{e^{\frac{1}{x}}-1}$

15. $\lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot e^{\frac{1}{x}}-x\right)$ 16. $\lim_{x\to+\infty}\left((x+2)\cdot e^{\frac{1}{x}}-x\right)$ 17. $\lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot e^{\frac{x+1}{x}}-e\cdot x\right)$

18. $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2}{x}\cdot e^{\frac{x+1}{x}}-e\cdot x\right)$ 19. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-e^{3x}}{x^2-3x}$ 20. $\lim_{x\to 0}\frac{\cos(2x)-1}{L(1+\operatorname{tg}x^2)}$

21. $\lim_{x\to 0}\frac{L(\cos x+\operatorname{sen}x)}{x}$ 22. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x+\operatorname{sen}^2 x}{x^2}$ 23. $\lim_{x\to\frac{3}{2}}\frac{L(1+\cos\pi x)}{e^{2x-3}-1}$

24. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos(2x)}}{\operatorname{sen}(x^3)\cdot\cos x}$ 25. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos(\frac{x}{2})}}{\operatorname{tg}x^2}$ 26. $\lim_{x\to+\infty}\frac{L\left(1+\operatorname{sen}\frac{2}{x}\right)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}\frac{2}{x}}-1}$

27. $\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$

RESOLUCIÓN

Ejercicio II

Hallar a y b tales que cumplan las condiciones dadas:

a) $\lim_{x\to -2}\frac{x^2+a\cdot x+2b-2}{2x^2+(b+4)\cdot x+2b}=\frac{1}{2}$

Primero observemos que el denominador tiene límite 0, entonces para que el límite sea finito es necesario que el numerador también tenga límite 0.

$\Rightarrow \lim_{x\to -2}(x^2+ax+2b-2)=4-2a+2b-2=0 \Rightarrow$ a = b + 1

Ahora para calcular el límite debemos considerar que –2 es raíz del numerador y el denominador, podemos aplicar el teorema de descomposición factorial:

$$\lim_{x \to -2} \frac{(x+2)(x+b-1)}{(x+2)(2x+b)} = \lim_{x \to -2} \frac{x+b-1}{2x+b} = \frac{b-3}{b-4} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2b - 6 = b - 4$$

$\Rightarrow \qquad b = 2 \qquad a = 3$

b) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^3}{x^2+1} - 5a \cdot x + 7b\right) = 0$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 5ax^3 - 5ax}{x^2+1} + 7b = \lim_{x \to +\infty} \frac{(1-5a)x^3 - 5ax}{x^2+1} + 7b$$

Para que este límite sea 0, una primer condición es que 1 – 5a = 0 (sino el límite sería infinito) con esa condición el límite es 7b que también debe ser 0

$$\Rightarrow \qquad a = \frac{1}{5} \qquad b = 0$$

c) $\lim_{\substack{x \to -1^+ \\ x \to 2^-}} \frac{e^{x-2}}{x^2 + a \cdot x + b} = -\infty$

En ambos casos el límite del numerador es finito y distinto de 0, para que el límite sea infinito será condición que el límite del denominador sea 0, de donde se concluye que –1 y 2 son raíces del denominador.

D(x) = $x^2 + ax + b$ tiene raíces –1 y 2

$$\begin{cases} D(-1) = 1 - a + b = 0 \\ D(2) = 4 + 2a + b = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad a = -1 \quad b = -2$$

d) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+6x-3}-(a\cdot x+b)\right)=0$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2+6x-3-(a^2x^2+2abx+b^2)}{\sqrt{4x^2+6x-3}+ax+b}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(4-a^2)x^2+(6-2ab)x-(3+b^2)}{(2+a)x}$$

Primero observamos que debe ser a > 0, sino el límite sería +∞, aplicamos el producto de conjugadas y ordenamos. Para que el límite sea 0 el numerador debe ser de menor orden que el denominador instancia que se verificará si se cumplen las condiciones: $4-a^2=0$ y $6-2ab=0$, de donde

$$a = 2 \qquad b = \frac{3}{2}$$

Ejercicio III

En la resolución de esta lista de límites se debe aplicar la tabla de equivalencias:

1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x}{\frac{1}{3}x}=\frac{3}{2}$

2) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{3}(x-1)}{\frac{1}{4}(x-1)}=\frac{4}{3}$

3) $\lim_{x\to 0}\frac{3^x-1}{e^{2x}-1} = \lim_{x\to 0}\frac{xL(3)}{2x}=\frac{L(3)}{2}=L(3^{1/2})=L(\sqrt{3})$

4) $\lim_{x\to 0}\frac{L(1+5x)}{L(1+3x^2)} = \lim_{x\to 0^{\pm}}\frac{5x}{3x^2}=\pm\infty$

5) $\lim_{x\to 2}\frac{L(2x-3)}{x^5-32} = \lim_{x\to 2}\frac{2x-4}{x^5-2^5}=\lim_{x\to 2}\frac{2(x-2)}{5\,2^4(x-2)}=\frac{1}{40}$

6) $\lim_{x\to 2}\frac{e^{4x}-e^{8}}{16-x^{4}} = \lim_{x\to 2}\frac{e^{8}(e^{4x-8}-1)}{-(x^{4}-2^{4})}=\lim_{x\to 2}-\frac{e^{8}(4x-8)}{4{\cdot}2^{3}(x-2)}=-\frac{e^{8}}{8}$

7) $\lim_{x\to 2}\frac{2^{x+1}-8}{4-2x} = \lim_{x\to 2}\frac{2^{3}(2^{x-2}-1)}{-2(x-2)}=-\lim_{x\to 2}\frac{2^{3}(x-2)L(2)}{2(x-2)}=-4L(2)$

8) $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{L(\frac{x+1}{3})} = \lim_{x\to 2}\frac{(x+2)^{1/2}-4^{1/2}}{\left(\frac{x+1}{3}-1\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{2}4^{-1/2}(x+2-4)}{\frac{x+1-3}{3}}=\frac{3}{4}$

9) $\lim_{x\to +\infty}x{\cdot}L\left(\frac{x+1}{x}\right) = \lim_{x\to +\infty}x\left(\frac{x+1}{x}-1\right)=\lim_{x\to +\infty}x\frac{x+1-x}{x}=1$

10) $\lim_{x\to 1}\frac{L3-L(2+x)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{L\left(\frac{3}{2+x}\right)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{3}{x+2}-1}{x-1}=\lim_{x\to 2}\frac{3-x-2}{(x+2)(x-1)} =$

$\lim_{x\to 1}\frac{-(x-1)}{3(x-1)}=-\frac{1}{3}$

11)

$\lim_{x\to 0}\frac{L(1+x+x^{2})-L(1-x+x^{2})}{x^{2}-2x}= \lim_{x\to 0}\frac{L\left(\frac{1+x+x^{2}}{1-x+x^{2}}\right)}{x(x-2)}= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1+x+x^{2}}{1-x+x^{2}}-1}{x(x-2)}=$

$\lim_{x\to 0}\frac{1+x+x^{2}-1+x-x^{2}}{x(x-2)(1-x+x^{2})}= \lim_{x\to 0}\frac{2x}{x(-2)(1)}=-1$

12) $\lim_{x\to \pm\infty}x{\cdot}L\left|\frac{3x-2}{3x+1}\right| = \lim_{x\to \pm\infty}x\left(\frac{3x-2}{3x+1}-1\right) = \lim_{x\to \pm\infty}x\left(\frac{3x-2-3x-1}{3x+1}\right)= -1$

13) $\lim_{x\to 2}\frac{L\left|1+2x-x^{2}\right|}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{2x-x^{2}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{-x(x-2)}{x-2}=-2$

14) $\lim_{x\to \pm\infty}\frac{L\left|\frac{x-2}{x+1}\right|}{e^{\frac{1}{x}}-1} = \lim_{x\to \mp\infty}\frac{\frac{x-2}{x+1}-1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to \pm\infty}\frac{(x-2-x-1)x}{x+1} = -3$

15) $\lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot e^{\frac{1}{x}}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)=\lim_{x\to+\infty}x\,\frac{1}{x}=1$

16) $\lim_{x\to+\infty}\left((x+2)\cdot e^{\frac{1}{x}}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x e^{\frac{1}{x}}+2e^{\frac{1}{x}}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)+2e^{\frac{1}{x}}\right]=3$

17) $\lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot e^{\frac{x+1}{x}}-e\cdot x\right)=\lim_{x\to+\infty}ex\left(e^{\frac{x+1}{x}-1}-1\right)=\lim_{x\to+\infty}ex\frac{x+1-x}{x}=e$

18) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2}{x}\cdot e^{\frac{x+1}{x}}-e\cdot x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(x+\frac{2}{x}\right)e^{\frac{x+1}{x}}-ex\right]=$

$\lim_{x\to+\infty}\left[ex\left(e^{\frac{x+1}{x}-1}-1\right)+\frac{2}{x}e^{\frac{x+1}{x}}\right]=\lim_{x\to+\infty}ex\frac{1}{x}=e$

19) $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-e^{3x}}{x^2-3x}=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt[3]{x+1}-1)+(1-e^{3x})}{x(x-3)}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{3}x-3x}{-3x}=\frac{\frac{1}{3}-3}{-3}=\frac{8}{9}$

20) $\lim_{x\to0}\frac{\cos(2x)-1}{L(1+\operatorname{tg}x^2)}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}(2x)^2}{\operatorname{tg}(x^2)}=\lim_{x\to0}\frac{-2x^2}{x^2}=-2$

21) $\lim_{x\to0}\frac{L(\cos x+\operatorname{sen}x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\cos(x)+\operatorname{sen}(x)-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x-\frac{1}{2}x^2}{x}=1$

22) $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^3x+\operatorname{sen}^2x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos(x))(1+\cos(x)+\cos^2(x))+\operatorname{sen}^2(x)}{x^2}=$

$\lim_{x\to0}\frac{\frac{3}{2}x^2+x^2}{x^2}=\frac{5}{2}$

23) $\lim_{x\to\frac{3}{2}}\frac{L(1+\cos\pi x)}{e^{2x-3}-1}=\lim_{x\to\frac{3}{2}}\frac{\cos(\pi x)}{2x-3}=\lim_{x\to\frac{3}{2}}\frac{\cos(\pi x)-\cos(\frac{3\pi}{2})}{2(x-\frac{3}{2})}=$

$$\lim_{x\to\frac{3}{2}} \frac{-2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi x+\frac{3}{2}\pi}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{\pi x-\frac{3}{2}\pi}{2}\right)}{2(x-\frac{3}{2})} = \lim_{x\to\frac{3}{2}} \frac{-2\,\mathrm{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)\left(\frac{(x-\frac{3}{2})\pi}{2}\right)}{2(x-\frac{3}{2})} = \frac{\pi}{2}$$

24) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos(2x)}}{\mathrm{sen}(x^3)\cdot\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2x^2}}{x^3} = \lim_{x\to 0^{\pm}} \frac{\sqrt{2}\,|x|}{x^3} = \pm\infty$$

25) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos(\frac{x}{2})}}{\mathrm{tg}\,x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\frac{x^2}{8}}}{x^2} = \lim_{x\to 0^{\pm}} \frac{|x|}{\sqrt{8}\,x^2} = +\infty$$

26) $$\lim_{x\to +\infty} \frac{L\left(1+\mathrm{sen}\frac{2}{x}\right)}{\sqrt{1+\mathrm{tg}\frac{2}{x}}-1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\mathrm{sen}\left(\frac{2}{x}\right)}{\frac{1}{2}\mathrm{tg}\left(\frac{2}{x}\right)} = 2$$

27) $$\lim_{x\to 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} e^{(\cos 2x-1)\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{2}x^2\frac{1}{x^2}} = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$