Facultad de Ingeniería – Udelar

Departamento de Diseño industrial – IIMPI

MODELADO DE SISTEMAS MECÁNICOS EMPLEANDO EL MÉTODO DE LOS ELEMENTO FINITOS

Clase N^0 3

INTRODUCCIÓN AL MÉTODO DE RIGIDEZ (MÉTODO DE LOS DESPLAZAMIENTOS).

PROFESOR

Dr. Henry Figueredo Losada

Dr. Melchor Rodríguez Madrigal.

Montevideo. Uruguay.
Noviembre 2019

TEMA II. FORMULACIÓN DE ELEMENTOS FINITOS 1D-ESTÁTICOS.

Clase 3. INTRODUCCIÓN AL MÉTODO DE RIGIDEZ

Sumario.

1. Introducción.

2. Definición de Matriz de Rigidez.

3. Derivación de la Matriz de Rigidez para un Elemento Tipo Muelle.

4. Ejemplo de ensamblaje con elementos de muelle.

5. Ensamblaje de la matriz de rigidez total por superposición (Método de Rigidez Directo).

Objetivos.

Saber interpretar el concepto de matriz de rigidez de un elemento y de un sistema mecánico, así como la derivación de esta MATRIZ por el método de superposición o de rigidez directo

Bibliografía.

9. Klaus-Jurgen Bathe "Finite Element Procedures", 2da Edição.
10. G.R.Liu “The Finite element Method- A practical course”.
11. The Finite Element Method using MATLAB - Kwon and Bang

Bibliografía opcional portugués

12. Avelino Alves Filho "Elementos Finitos, A base da tecnologia CAE", 5ta Edição.

1. Introducción.

En el aula anterior vimos que, en el método de los elementos finitos en el ámbito de las aplicaciones estructurales, existe un interés del análisis para la determinación de la configuración deformada de la estructura, a partir del cálculo de los desplazamientos nodales. La gran tarea del análisis de estructuras es determinar la relación entre las cargas que actúan en los nodos de la estructura y los desplazamientos de la estructura entera. Al abordar el análisis estructural vimos que *la rigidez de la estructura entera depende de rigidez de cada uno de sus elementos*.

En esta aula serán introducidos algunos de los conceptos básicos en los cuales se fundamentan el Método de Rigidez, este método es el de más común aplicación en el Método de los Elementos Finitos (FEM). En particular, la mayoría de los programas comerciales del FEM son basados en el Método de Rigidez.

El concepto de resorte o rigidez equivalentes es un importante concepto aplicado en la Física Básica. Un muelle lineal es introducido como elemento base de herramienta instructiva para ilustrar estos conceptos. Comenzaremos con la definición general de matriz de rigidez para luego pasar a la derivación de la matriz de rigidez de un elemento tipo muelle lineal elástico. También se expondrán los criterios para el ensamblaje de la matriz de rigidez de una estructura formada por muelles, aplicando los conceptos de equilibrio y compatibilidad. Será demostrado como la matriz de rigidez global de la estructura se obtiene superponiendo las matrices de rigidez de los elementos que componen el ensamblaje de una manera directa. El término "**Método de Rigidez Directa**" (**Direct Stiffness Method**) proviene de esta técnica.

Después de establecer la matriz de rigidez de la estructura ensamblada será explicada la forma de imponer las condiciones de fronteras del modelo. La solución completa incluye la determinación de los desplazamientos y las fuerzas.

Finalmente será introducido el principio de mínima energía potencial, aplicando está a la derivación de las ecuaciones del ensamblaje de una estructura con elementos tipo muelles. Será ilustrado este principio con los elementos más simples de forma tal que este sea fácilmente comprendido en el caso de estructuras con elementos de mayor número de grados de libertad que se presentarán con el desarrollo del curso.

2. Definición de Matriz de Rigidez

Entender el concepto de Matriz de Rigidez es esencial para el entendimiento del Método de Rigidez.

Una situación simple involucrando la constante elástica de un resorte puede ser vista en la figura 2.1, denotada por *k en la ecuación (2.1) es la medida cuantitativa de la **rigidez del resorte*** y expresada por la relación entre la fuerza aplicada y el desplazamiento medido en la extremidad del resorte.

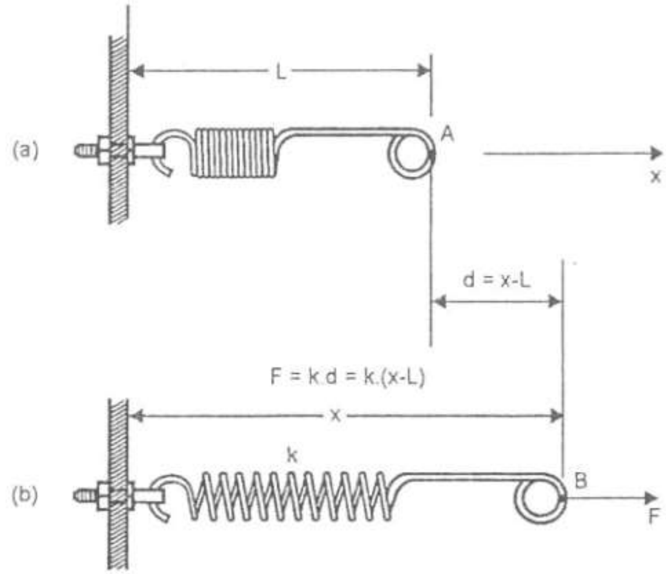

Figura 2.1 La rigidez del resorte puede ser representada por su constante elástica, o coeficiente de rigidez *k*. (Alves Filho 2018).

Se define la *Matriz de Rigidez* para un elemento dado como una matriz tal que:

$$\{f\} = [k]\{d\} \tag{2.1}$$

donde

k: relaciona los desplazamientos nodales con las fuerzas en un sistema de coordenadas locales.

Para un medio continuo o estructura que consta de una serie de elementos, una matriz de rigidez $\widehat{K}$ relaciona los desplazamientos nodales $\hat{d}$ con las fuerzas globales $\hat{F}$ en coordenadas globales (x,y,z).

$$\{\hat{F}\} = [\widehat{K}]\{\hat{d}\} \tag{2.2}$$

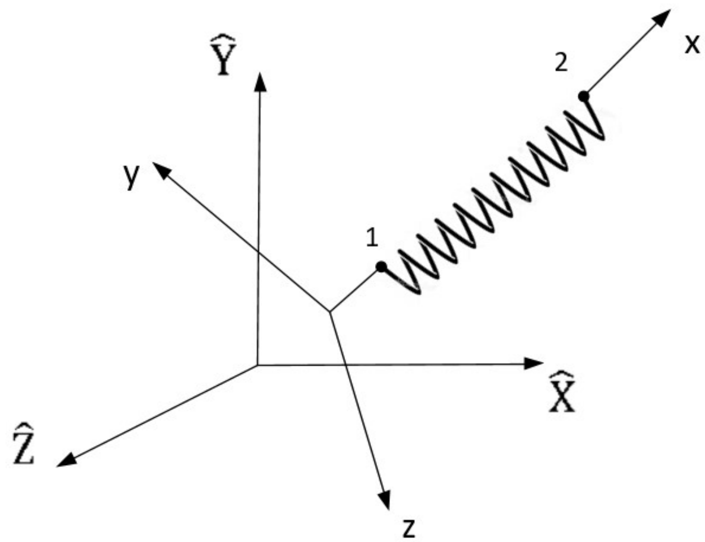

Figura 2.2 Sistema de coordenadas locales y globales

3. Derivación de la Matriz de Rigidez para un Elemento Tipo Resorte.

Usando una aproximación directa será derivada la matriz de rigidez de un elemento unidimensional lineal tipo resorte, este resorte obedece a la ley de Hooke y resiste fuerzas a lo largo de su eje axial. Considere el diagrama de cuerpo libre (DCL) de un elemento lineal tipo resorte mostrado en la figura 2.3. Los puntos de referencia 1 y 2 son localizados en los extremos del elemento, y los mismos son los nodos del elemento. Las fuerzas locales nodales son f_1 y f_2 para el elemento de resorte asociado con el eje de coordenadas locales x. El eje local actúa en la dirección del resorte de forma tal que se puede medir directamente los desplazamientos y las fuerzas a lo largo del resorte. Los desplazamientos locales nodales son u_1 y u_2 , para el elemento resorte. Estos desplazamientos nodales son llamados grados de libertad para cada nodo.

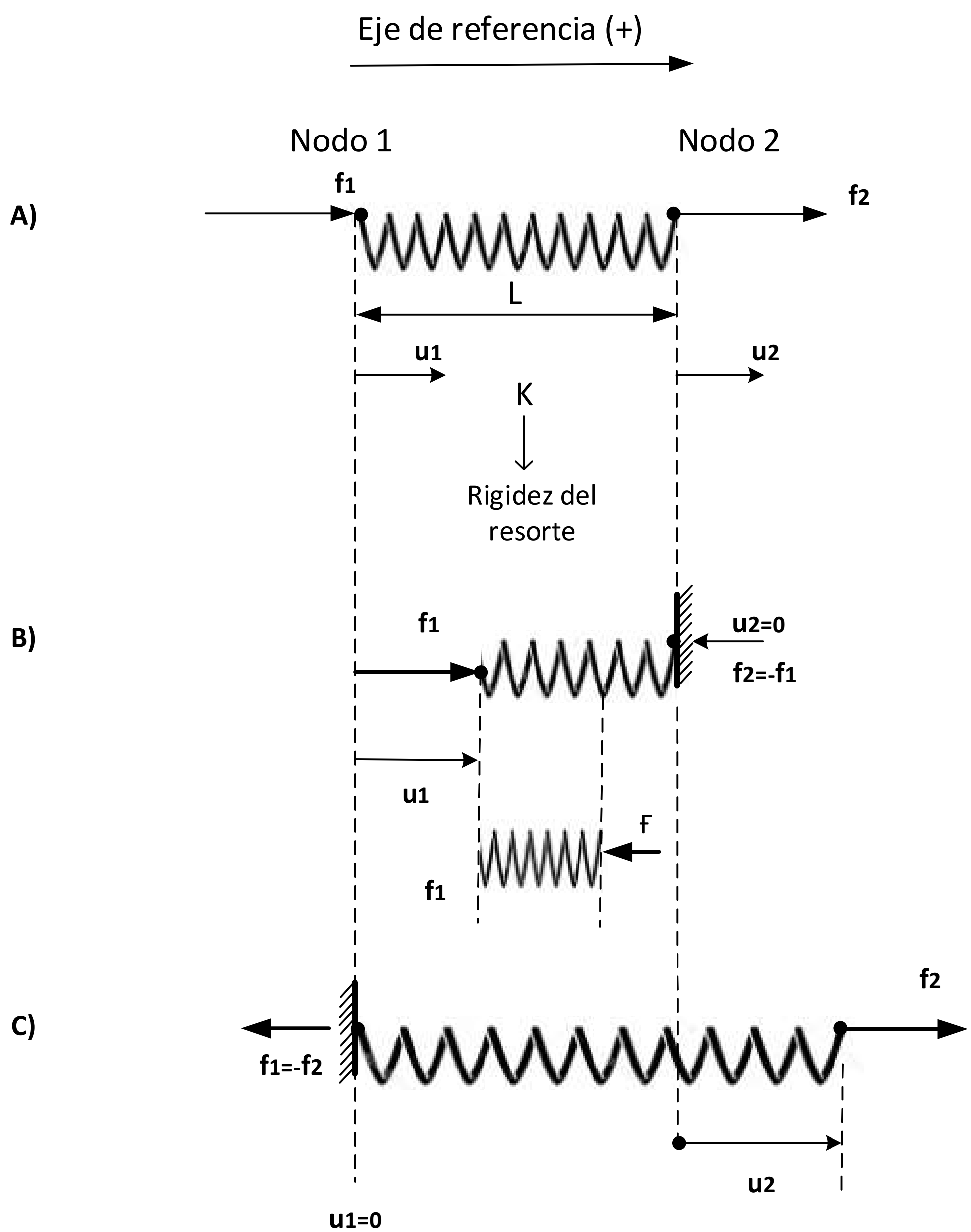

Figura 2.3 Diagrama de cuerpo libre de un elemento de resorte. En el caso B, el nodo 1 del elemento es sometido a un desplazamiento u_p manteniendo el nodo 2 bloqueado. En el caso C, tenemos la situación opuesta. Adaptado de (Alves Filho 2018)

En la figura 2.3 **caso B** el resorte es sometido a un desplazamiento u_1 , manteniendo $u_2 = 0$. En el **caso C** el resorte es sometido a un desplazamiento u_2 , manteniendo $u_1 = 0$. En analogías vamos a aplicar en cada uno de los casos las Leyes de Equilibrio de Fuerzas e de comportamiento material con las cuales determinaremos la matriz de rigidez para el elemento resorte.

CASO B

Condición de equilibrio: $f_2 = -f_1$ (las fuerzas nodales están en sentidos opuestos)

Fuerza Interna: $\mathcal{F} = \text{Fuerza Interna} = \mathrm{k} \cdot d$

donde

d: representa a la deformación del resorte.

Vamos a definir la deformación del resorte considerando los desplazamientos u_1 y u_2 como:

$$\mathrm{d} = u_2 - u_1 \tag{2.3}$$

Siendo el **caso B** , $u_2 = 0$

Tenemos

$$\mathrm{d} = -u_1 \tag{2.4}$$

Así

$$\mathcal{F} = \mathrm{k} \cdot d = -\mathrm{k} \cdot u_1 \tag{2.5}$$

Como u_1 es positivo, pues tiene la misma orientación del eje de referencia (x), la fuerza interna es negativa, lo que corresponde a la situación de compresión del resorte (Ⅎc{F} < 0).

Del punto de vista físico, la Fuerza aplicada en la extremidad del elemento (nodo 1) es transferida internamente al resorte. Debido al *equilibrio de fuerzas* el trecho del elemento debe estar en equilibrio. Así la fuerza f_1 debe ser equilibrada por la fuerza interna $\mathcal{F}$, siendo de sentido opuestos, siguiendo la convección de signos definidas anteriormente (ver figura 2.3) para las fuerzas Internas y Externas. Matemáticamente se debe respetar esta convención.

$$F_1 = -\mathcal{F} \tag{2.6}$$

Sustituyendo la Ec (2.5)

$$\mathrm{F}_1 = -\mathcal{F} = -\mathrm{k} \cdot u_1 \quad \therefore \quad \mathrm{f}_1 = \mathrm{k} \cdot u_1 \tag{2.7}$$

Utilizando la condición de equilibrio de las fuerzas externas

$$\mathrm{F}_2 = -\mathrm{f}_1 = -\mathrm{k} \cdot u_1 \tag{2.8}$$

Escribiendo la relación entre fuerzas y desplazamientos nodales para el elemento resorte en forma matricial.

$$\begin{Bmatrix} \mathrm{F}_1 \\ \mathrm{f}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 = 0 \end{Bmatrix} \tag{2.9}$$

Efectuando los productos y sustituyendo f_1 y f_2:

$$\begin{matrix} \mathrm{F}_1 = k_{11} \cdot u_1 + k_{12} \cdot 0 \\ \mathrm{f}_2 = k_{21} \cdot u_1 + k_{22} \cdot 0 \end{matrix} \quad = \quad \begin{matrix} k \cdot u_1 = k_{11} \cdot u_1 \\ -k \cdot u_1 = k_{21} \cdot u_1 \end{matrix} \qquad \therefore \quad \boxed{\begin{matrix} k_{11} = k \\ \\ k_{21} = -k \end{matrix}} \tag{2.10}$$

Por tanto, dos de los coeficientes para la relación de la Ec.(2.*9*) son determinados, tal relación será la *Matriz de Rigidez* para el elemento tipo resorte.

Utilizando el mismo procedimiento podemos determinar los otros dos coeficientes.

<u>CASO C</u>

Condición de equilibrio: $\mathrm{f}_1 = -\mathrm{f}_2$ (las fuerzas nodales están en sentidos opuestos)

Fuerza Interna: $u_1 = 0 \therefore \mathrm{d} = u_2 - u_1$ y $\mathcal{F} = \mathrm{k} \cdot d = \mathrm{k} \cdot u_2$

Como u_2 es positivo tiene la misma orientación del eje de referencia, la fuerza Interna es positiva, lo que corresponde a la situación de tracción del resorte ($\mathcal{F} > 0$).

La fuerza aplicada en la extremidad del elemento (nodo 2) es transferida internamente al resorte. Un trecho del elemento también debe estar en equilibrio, así la fuerza f_2 debe ser equilibrada por la fuerza interna $\mathcal{F}$ y en este caso sus signos son iguales, siguiendo la convección de signos definidas anteriormente (ver figura 2.3). para las fuerzas Internas y Externas. Matemáticamente se debe respetar esta convención.

$$\mathrm{F}_2 = \mathcal{F} \quad \therefore \quad \mathcal{F} = \mathrm{k} \cdot u_2 \tag{2.11}$$

Utilizando la condición de equilibrio de las fuerzas externas anterior, $\mathrm{f}_1 = -\mathrm{f}_2$ resulta:

$$\mathrm{F}_1 = -\mathrm{k} \cdot u_2 \tag{2.12}$$

Escribiendo la relación entre fuerzas y desplazamientos nodales para el elemento resorte en forma matricial.

$$\begin{Bmatrix} \mathrm{F}_1 \\ \mathrm{f}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 = 0 \\ u_2 \end{Bmatrix} \tag{2.13}$$

Efectuando los productos y sustituyendo f_1 y f_2:

$$\begin{matrix} \mathrm{F}_1 = k_{11} \cdot 0 + k_{12} \cdot u_2 \\ \mathrm{f}_2 = k_{21} \cdot 0 + k_{22} \cdot u_2 \end{matrix} \quad = \quad \begin{matrix} -k \cdot u_2 = k_{12} \cdot u_2 \\ k \cdot u_2 = k_{22} \cdot u_2 \end{matrix} \qquad \therefore \boxed{\begin{matrix} k_{12} = -k \\ \\ k_{22} = k \end{matrix}} \tag{2.14}$$

Por tanto, la relación entre las fuerzas y los desplazamientos nodales esta determina y será expresada por intermedio de la matriz de rigidez del elemento (resorte).

$$\boxed{Matriz\ de\ rigidez\ del\ elemento(resorte)} \Longrightarrow [k]^e = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

Aquí la matriz $[k]^e$ es llamada *matriz de rigidez local* para el elemento. De la Ec.(2.*15*) se observa que $[k]^e$ es una matriz simétrica ($k\_\{ij\} = k\_\{ji\}$) y que es una matriz cuadrada (el mismo número de líneas y columnas)

4. Análisis del significado físico de los términos de la matriz de rigidez de un elemento generalizada.

En el epígrafe anterior determinamos la matriz de rigidez de un elemento tipo resorte que está disponible en la biblioteca de elementos de cualquier programa de elementos finitos, resulta importante interpretar el *significado físico de los términos de esa matriz de rigidez*. A partir de este entendimiento, podemos generalizar el significado de la matriz de rigidez de cualquier elemento finito. Retomando la Ec.(2.*10*):

$$\begin{matrix} F_1 = k_{11} \cdot u_1 + k_{12} \cdot 0 \\ f_2 = k_{21} \cdot u_1 + k_{22} \cdot 0 \end{matrix} \quad \therefore \quad \begin{matrix} f_1 = k_{11} \cdot u_1 \\ f_2 = k_{21} \cdot u_1 \end{matrix} \tag{2.16}$$

Siendo $u_1 = 1$, esto seria considerar un *Desplazamiento Unitario impuesto*:

$$\boxed{\begin{matrix} F_1 = k_{11} \\ f_2 = k_{21} \end{matrix}} \tag{2.17}$$

Debemos notar que los **coeficientes k** de la matriz de rigidez del elemento finito ***representan fuerzas, asociadas a un desplazamiento unitario impuesto en un nodo, manteniendo el otro nodo fijado, o sea, bloqueado (desplazamiento nulo).***

Podemos decir así que:

- k_{21} – es la fuerza en el ***nodo 2***, debido al desplazamiento unitario en el ***nodo 1*** *(*$u\_1 = 1$*)*, manteniendo el desplazamiento $u_2 = 0$ (Bloqueado).
- k_{11} – es la fuerza en el ***nodo 1***, debido al desplazamiento unitario en el ***nodo 1*** *(*$u\_1 = 1$*)*, manteniendo el desplazamiento $u_2 = 0$ (Bloqueado).

Análogamente, a partir de la Ec.(2.*16*) y utilizando el procedimiento anterior:

- k_{12} – es la fuerza en el ***nodo 1***, debido al desplazamiento unitario en el ***nodo 2*** *(*$u\_2 = 1$*)*, manteniendo el desplazamiento $u_1 = 0$ (Bloqueado).
- k_{22} – es la fuerza en el ***nodo 2***, debido al desplazamiento unitario en el ***nodo 2*** *(*$u\_2 = 1$*)*, manteniendo el desplazamiento $u_1 = 0$ (Bloqueado).

Podemos asumir que los términos de la ***matriz de rigidez del elemento finito*** representan relaciones de *Causa y Efecto*. La *Causa* es un desplazamiento Unitario impuesto en un nodo, y los *Efectos* son las fuerzas que surgen en los nodos del elemento debido a ese desplazamiento. La notación matemática de representación de los índices de términos de la matriz, además de significar una línea y columna de la matriz, representa también la localización de la *Causa* y del *Efecto*.

$$k_{2,1}$$

Nodo em que surge la fuerza (**Efecto**). **Causa** (Nodo em que es aplicado el desplazamiento).

5. Generalización a partir del resorte de significado físico de la matriz de rigidez de cualquier elemento.

Como los términos de la *Matriz de Rigidez* del elemento representan fuerzas asociadas a los desplazamientos unitarios, *al conocer la Matriz de Rigidez del Elemento, la relación Fuerza x Desplazamientos ya está previamente definida para el elemento entero*. En el ámbito linear los desplazamientos actuando simultáneamente, los efectos de cada uno de los desplazamientos aplicados aisladamente serán superpuestos y tenemos la fuerza actuante en cada nodo, decurrente de la acción conjunta de todos los desplazamientos en el elemento. Esta idea, establecida a partir del elemento tipo resorte puede ser generalizado para los diversos elementos finitos.

En los elementos más generales la relación de desplazamientos puede ser más amplia, por ejemplo, una viga en el espacio (ver figura 2.4)

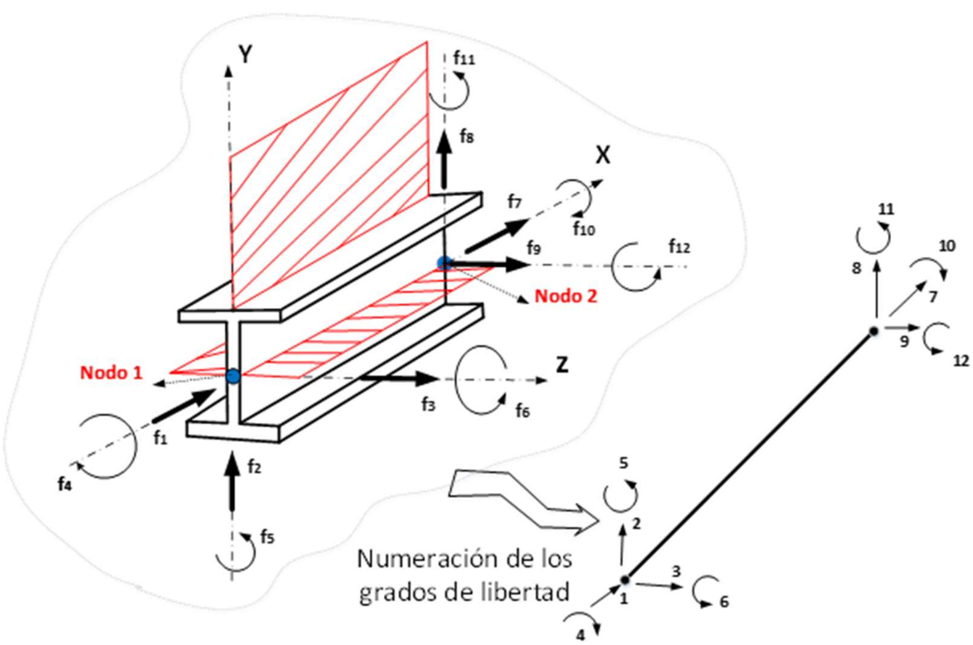

Figura 2.4 Elemento Viga en el caso más general admite en un mismo nodo, seis componentes de desplazamientos nodales, tres traslaciones y tres rotaciones.

Es más adecuado identificar los diversos componentes de desplazamientos asociados al nodo, como componentes de desplazamiento en la dirección *x*, en la dirección *y,* en la dirección *z*. Estos componentes son llamados de *Grados de Libertad del elemento.* A figura 2.4 representa un elemento de viga en el espacio y los posibles *Grados de Libertad.* El concepto de coeficiente de rigidez continua el mismo, pero ahora relacionando las fuerzas en los diversos grados de libertad.

El coeficiente $\boldsymbol{k_{i,j}}$ de la Matriz de Rigidez de un Elemento Finito representa la *Fuerza en el grado de libertad i* debido al Desplazamiento Unitario impuesto al grado de libertad *j*, manteniendo los otros grados de libertad bloqueados.

Ejemplo la fuerza en el grado de libertad 3, debido al efecto simultaneo de todos los desplazamientos, seria obtenido llevándose en cuenta el efecto de cada componente de desplazamiento en la fuerza obtenida en la dirección *3*. Como cada coeficiente de rigidez contabiliza la fuerza debido al desplazamiento unitario, debemos multiplicar cada coeficiente *k* por desplazamiento real y sumando todos los términos tenemos la fuerza en 3 debido a todos los desplazamientos actuando simultáneamente como:

$$\begin{aligned} f_3 = k_{3,1}\cdot\delta_1 + k_{3,2}\cdot\delta_2 + k_{3,3}\cdot\delta_3 + k_{3,4}\cdot\delta_4 + k_{3,5}\cdot\delta_5 + k_{3,6}\cdot\delta_6 \\ + \cdots \ldots . + k_{3,11}\cdot\delta_{11} + k_{3,12}\cdot\delta_{12} \end{aligned} \tag{2.18}$$

Así la fuerza en *3* es obtenida por intermedio de una *ecuación algebraica*. Repitiendo el mismo procedimiento tendremos las fuerzas en los otros *Grados de Libertad*, o sea, el proceso de discretización genera un *Sistema de Ecuaciones Algebraicas*.

En elementos unidimensionales como resortes, barras o de vigas el concepto anterior es exacto y permite la aplicación del **Método de Rigidez Directo** para la determinación de su matriz de rigidez y más adelante utilizaremos para ensamblar la Matriz de Rigidez Global de una Estructura.

6. Matriz de rigidez de una estructura a partir de las matrices de rigidez de sus elementos.

La rigidez de la estructura entera depende de la rigidez de cada uno de sus elementos, mencionado en aula 1. Ahora veremos cómo determinar y como consecuencia obtener la configuración deformada de la estructura como un todo.

En este texto usaremos el exponente entre paréntesis sobre las variables para referirnos al número de elementos con el cual estos desplazamientos están relacionados, los subíndices a la derecha identifican el nodo y la dirección del desplazamiento del ensamblaje local o global.

En este ejemplo el eje $\hat{X}$ global coincide con el eje x local para los dos elementos.

El diagrama de cuerpo libre de cada elemento y sus nodos es mostrado en la figura 2.6

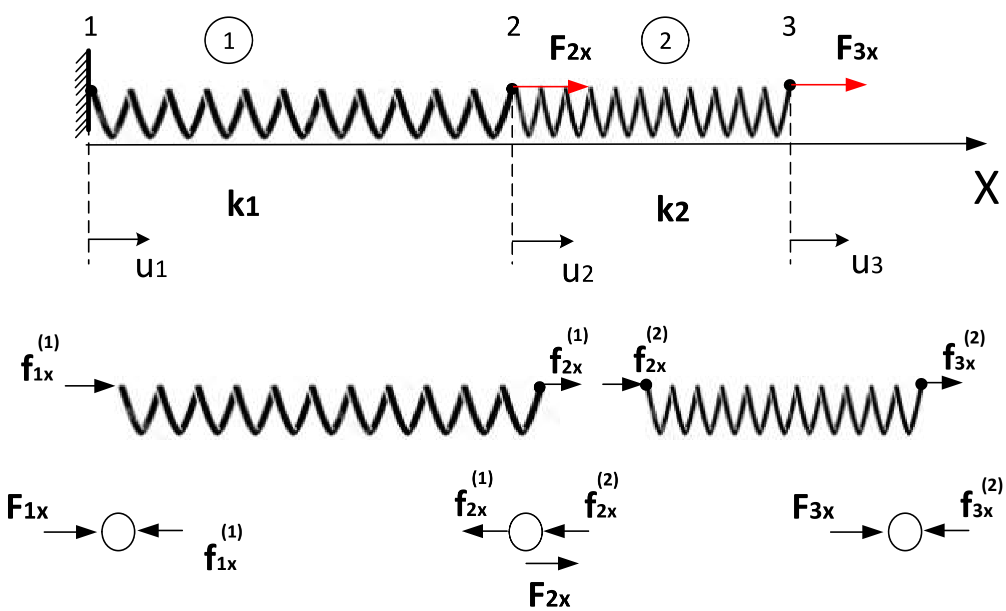

Figura 2.6 Diagrama de cuerpo libre de nodos y elementos.

Para el *elemento 1* usando la Ec.(*2.15*) tenemos:

$$\begin{Bmatrix} f_{1x}{}^{(1)} \\ f_{2x}{}^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{1x}{}^{(1)} \\ u_{2x}{}^{(1)} \end{Bmatrix} \tag{2.19}$$

Para el *elemento 2* tenemos:

$$\begin{Bmatrix} f_{2x}{}^{(2)} \\ f_{3x}{}^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{2x}{}^{(2)} \\ u_{3x}{}^{(2)} \end{Bmatrix} \tag{2.20}$$

Los *elementos 1 y 2* deben permanecer conectados al nodo común 2 durante el desplazamiento. Esto se llama requisito de continuidad o compatibilidad. Escribiendo el requisito de compatibilidad para el nodo común *2*:

$$u_{2x}{}^{(1)} = u_{2x}{}^{(2)} = u_{2x} \tag{2.21}$$

Basado en el diagrama de cuerpo libre (DCL) de cada nodo mostrado en la Fig. 2.6 y el hecho que las fuerzas externas pueden igualarse a las fuerzas internar en cada nodo, podemos escribir las ecuaciones nodales de equilibrio en los nodos 1,2,3.

$$F_{1x} = f_{1x}{}^{(1)} \tag{2.22}$$

$$F_{2x} = f_{2x}{}^{(1)} + f_{2x}{}^{(2)} \tag{2.23}$$

$$F_{3x} = f_{3x}{}^{(2)} \tag{2.24}$$

Donde $f_{1x}{}^{(1)}$ resulta de la reacción de las fuerzas en el apoyo fijo del sistema.

La tercera ley de Newton, de fuerzas iguales y opuestas, es aplicada moviendo las componentes de a fuerzas de un nodo a un elemento asociado con el nodo. Sustituyendo las ecuaciones (2.19-2.21) en las Ecs.(2.*22*)(2.*23*)(2.*24*) tendremos:

$$F_{1x} = k_1 u_{1x} - k_1 u_{2x} \tag{2.25}$$

$$F_{2x} = (k_1 u_{2x} - k_1 u_{1x}) + (k_2 u_{2x} - k_2 u_{3x}) \tag{2.26}$$

$$F_{3x} = k_2 u_{3x} - k_2 u_{2x} \tag{2.27}$$

Las Ecs.(2.*25*)-(2.*27*) son expresadas en forma matricial por:

$$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{2x} \\ F_{3x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{1x} \\ u_{2x} \\ u_{3x} \end{Bmatrix} \tag{2.28}$$

La Ec(2.*28*) puede ser escrita en forma simple como:

$$\mathrm{F} = \mathrm{K} \cdot d \qquad (2.29)$$

donde $\mathrm{F} = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{2x} \\ F_{3x} \end{Bmatrix}$ es llamada matriz de fuerza global, $\mathrm{d} = \begin{Bmatrix} u_{1x} \\ u_{2x} \\ u_{3x} \end{Bmatrix}$ es llamada matriz de desplazamientos global y:

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & -k_2 \end{bmatrix} \qquad (2.30)$$

es llamada matriz de rigidez global o matriz de rigidez del sistema.

Resumiendo para establecer las relaciones de fuerzas-desplazamientos total Ecs.(2.19)-(2.20) y la matriz de rigidez Ec.(2.30) para la estructura del ensamble de resortes , se han usado la relación fuerza-desplazamiento Ec.(2.2), las relaciones de compatibilidad Ecs.(2.23) y las ecuaciones de equilibrios de fuerzas nodales Ecs.(2.25)-(2.27). En el siguiente epígrafe consideraremos la solución de este ejemplo teniendo en cuenta un método más practico (*Método de Rigidez Directo*) para el ensamblaje de la matriz de rigidez total del sistema.

7. Ensamblaje de la matriz de rigidez total por superposición (Método de Rigidez Directo).

A seguir será usado un método más conveniente para la construcción de la matriz de rigidez total. Este método es basado en una apropiada superposición de las matrices de rigidez de los elementos individuales que constituyen una estructura.

Refiriéndose al ensamblaje de los dos resortes del epígrafe anterior, las matrices de rigidez se dan en las Ec.(2.*15*) como:

$$k^{(1)} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} u_{1x} & u_{2x} \end{array} & \\ \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} u_{1x} \\ u_{2x} \end{array} \end{array} \quad \& \quad k^{(2)} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} u_{2x} & u_{3x} \end{array} & \\ \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} u_{1x} \\ u_{3x} \end{array} \end{array} \qquad (2.31)$$

Aquí el u_{1x} etc descritos sobre cada fila y columna en la matriz k indican el grado de libertad asociado con cada fila y columna del elemento.

Las dos matrices de rigidez de los elementos, en las Ec (2.28) no están asociadas con el mismo grado de libertad asociado con cada fila y columna del elemento, o sea, el elemento 1 es asociado con el desplazamiento axial de los nodos 1 y 3, mientras que el elemento 2 está asociado con el desplazamiento axial de los nodos 2 y 3, por lo tanto, las matrices de rigidez de los elementos no pueden ser añadidas juntas (superpuestas) en su forma actual.

Para superponer las matrices de los elementos nosotros tendremos que extender el orden (dimensiones) al de la matriz de rigidez total de la estructura, de forma tal que cada matriz de rigidez del elemento esté asociada con todos los grados de libertad de la estructura. Para extender cada matriz de rigidez de elementos al orden de la matriz de rigidez total de la estructura, simplemente se añaden líneas y columnas de ceros para aquellos desplazamientos no asociados con el elemento.

Para el *elemento 1*, escribiremos la matriz de rigidez en forma expandida de forma tal que la Ec. (2.28) quedará como:

$$\begin{array}{c} \quad u_{1x} \quad u_{2x} \quad u_{3x} \\ k_1 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{Bmatrix} u_{1x}^{(1)} \\ u_{2x}^{(1)} \\ u_{3x}^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{1x}^{(1)} \\ f_{2x}^{(1)} \\ f_{3x}^{(1)} \end{Bmatrix} \qquad (2.32)$$

De la Ec. (2.29) se observa que $u_{3x}^{(1)}$ y $f_{3x}^{(1)}$ no están asociados con k_1. De forma similar para el *elemento 2* tenemos:

$$\begin{array}{c} \quad u_{1x} \quad u_{2x} \quad u_{3x} \\ k_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{Bmatrix} u_{1x}^{(2)} \\ u_{2x}^{(2)} \\ u_{3x}^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{1x}^{(2)} \\ f_{2x}^{(2)} \\ f_{3x}^{(2)} \end{Bmatrix} \qquad (2.33)$$

De nuevo considerando el equilibrio de fuerzas para cada nodo resulta en:

$$\begin{Bmatrix} f_{1x}^{(1)} \\ f_{2x}^{(1)} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ f_{2x}^{(2)} \\ f_{2x}^{(3)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{2x} \\ F_{3x} \end{Bmatrix} \qquad (2.34)$$

La anterior ecuación es la representación matricial de las Ecs.(2.22)-(2.24). Sustituyendo las Ecs. (2.32)-(2.33) en la Ec.(2.34) obtenemos:

$$k_1 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{1x}^{(1)} \\ u_{2x}^{(1)} \\ u_{3x}^{(1)} \end{Bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{1x}^{(2)} \\ u_{2x}^{(2)} \\ u_{3x}^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{2x} \\ F_{3x} \end{Bmatrix} \qquad (2.35)$$

Simplificando la ecuación anterior tenemos:

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_{1x} \\ u_{2x} \\ u_{3x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{2x} \\ F_{3x} \end{Bmatrix} \tag{2.36}$$

La matriz de rigidez expandidas de cada elemento en las Ecs. (2.32)-(2.33) podrían agregarse directamente para obtener la matriz de rigidez total de la estructura , dada la Ec.(*2.36*). Este método fiable de ensamblar las matrices de rigidez de un elemento individual directamente para formar la matriz de rigidez total de la estructura y el conjunto total de ecuaciones de rigidez se llama ***Método de Rigidez Directo***. Este es un paso muy importante en el método de los elementos finitos.

Para este simple ejemplo, es fácil de extender las matrices de rigidez de cada elemento y entonces superponerlas para llegar a la matriz de rigidez total. Sin embargo, como se menciona en epígrafes anteriores para problemas que involucran un número grande de grados de libertad, será tedioso extender cada matriz de rigidez del elemento al orden de la matriz de rigidez total. Para evitar esta expansión de cada matriz de rigidez del elemento, se sugiere una forma corta del método de rigidez directo para obtener la matriz de rigidez total. Para el ejemplo de ensamblaje de resortes, las filas y las columnas de cada matriz de rigidez de cada elemento se etiqueta según los grados de libertad asociados con ellos como visto en la Ec.(2.31).

K es entonces construida simplemente por adición de términos asociados con grados de libertad en $k^{(1)}$ y $k^{(2)}$ en sus correspondientes idénticas localizaciones de los grados de libertad en K. La fila u_{1x} y la columna u_{1x} de K sólo se construye por el elemento 1, ya que sólo el elemento 1 tiene el grado de libertad u_{1x} , o sea $k_{11} = k_1$. La fila u_{2x} y la columna u_{2x} de K tiene las contribuciones de ambos elementos 1 y 2, ya que el grado de libertad u_{2x} es asociado con ambos elementos. Por consiguiente, $k_{22} = k_1 + k_2$. Como resultado de un razonamiento similar tendremos a K como:

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} u_{1x} & u_{2x} & u_{3x} \end{array} & \\ \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} u_{1x} \\ u_{2x} \\ u_{3x} \end{array} \end{array} \tag{2.37}$$

Aquí los términos en K son localizados en base a que los grados de libertad son ordenados en orden numérico creciente de los nodos para la estructura total.

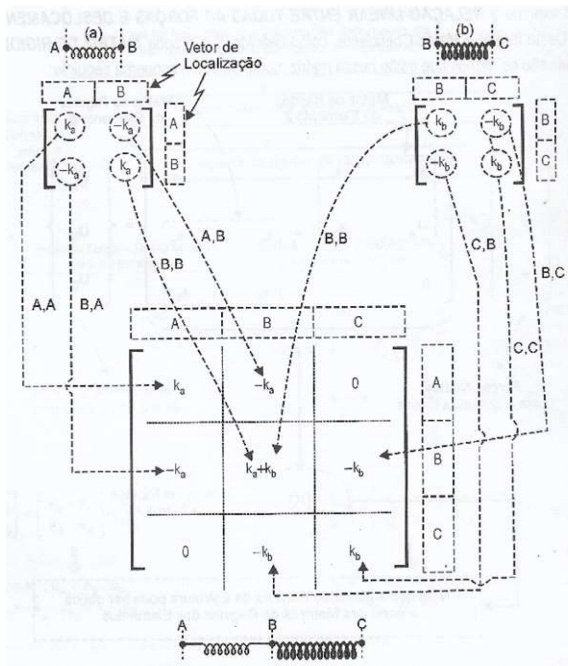

Figura 2.7 Procedimiento para el montaje de la matriz de rigidez de la estructura.(Alves Filho 2018)

El ejemplo mostrado anteriormente utilizando los elementos de resorte nos ofrece las bases para establecer el *Procedimiento General* para todos los montajes de Elementos Finitos, a partir del conocimiento de la *Matriz de Rigidez* de cada elemento. En las situaciones practicas los elementos formulados se encuentran en la mayoría de las bibliotecas de elementos de los programas comerciales de elementos finitos.

En este curso vamos a estudiar la formulación de los distintos elementos más utilizados en estos programas. La importancia del conocimiento de la formulación del tipo de elemento, así como las hipótesis adoptadas para elemento en su formulación, y como consecuencia que tipo de fenómeno físico ese elemento podrá simular, permitirá para el Analista de Elementos Finitos seleccionar que tipo de elemento podrá representar mejor el comportamiento del sistema físico en estudio.

En el montaje de la Matriz de rigidez de la estructura del ejemplo anterior vimos como los coeficientes de rigidez eran adicionados algebraicamente en los locales adecuados (ver Fig.2.7), en función de su posición en el montaje. Como los coeficientes $k_{i,j}$ de la matriz de rigidez son fuerzas asociadas a desplazamientos unitarios, en el montaje de la Figura 2.7

representa una suma de fuerzas. Al sumar fuerzas estamos delante de grandezas vectoriales, que presentan dirección y sentido.

El modelo de la Fig 2.6 constituido solamente por elementos de resortes, todos estaban alineados y como consecuencia las fuerzas aplicadas y las fuerzas internas actuaban siempre en la misma dirección. Si uno de los elementos estuviera en la condición del resorte (c) Fig 2.8, esa adicción debería ser echa con algunos cuidados adicionales y tendría que ser efectuada por el procedimiento introducido (ver Fig 2.2) pues la fuerzas actúan según direcciones diferentes, llevando en cuenta dos sistemas de referencias utilizados en la formulación de los elementos finitos como mencionado anteriormente: el sistema de Referencia Local y Sistema Global. El primero se aplica en el ámbito del Elemento y el segundo vale para la estructura como un todo.

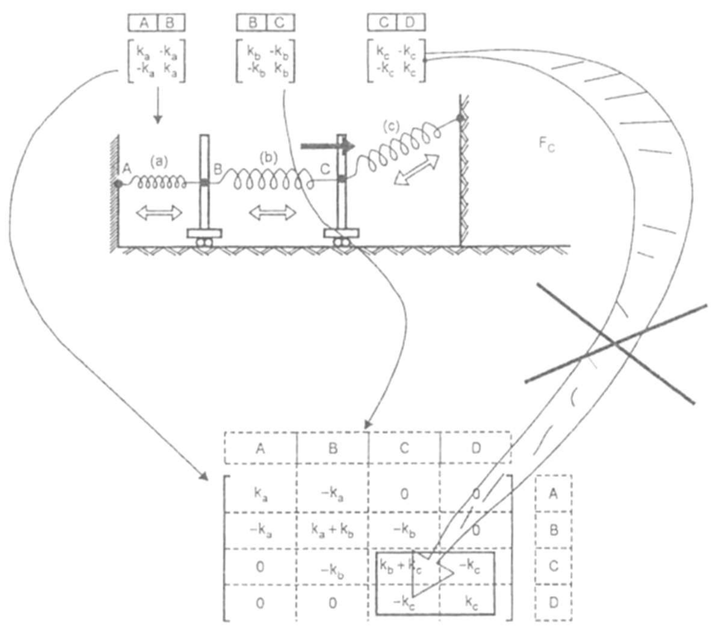

Figura 2.8 El montaje de la matriz de rigidez de elementos no alineados requiere la definición de los componentes de rigidez en la dirección de los desplazamientos. (Alves Filho 2018)

8. Condiciones de Frontera.

Para poder resolver el sistema de Ec.(*2.36*) tenemos que especificar las condiciones de fronteras (o apoyo) para el modelo de la estructura como el del ensamblaje de resortes Fig 2.6 , o de lo contrario matriz *K* seria singular, es decir , el determinante de K seria cero y su inversa no existiría. Esto significa que el sistema estructural es inestable. Sin nuestras especificaciones de adecuadas restricciones cinemática o condiciones de apoyo, la estructura será libre de moverse como un cuerpo rígido.

Las condiciones de fronteras son de dos tipos generales. Las condiciones de fronteras homogéneas ocurren en situaciones en que se previene completamente el movimiento y las no homogéneas donde un valor finito de desplazamientos diferentes de cero se especifica, como el establecido de un apoyo.

Para ilustrar los dos tipos de condiciones de fronteras consideremos el ejemplo de la Fig 2.6, con la Ec.(2.*36*) derivada del ensamblaje de resortes. Considerando el caso primero de condiciones de frontera homogéneas, las condiciones de fronteras son tales que los desplazamientos son cero en ciertos nodos. O sea $u_{1x} = 0$ ya el nodo 1 es fijo. Reescribiendo la Ec.(2.*36*) puede ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ u_{2x} \\ u_{3x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{2x} \\ F_{3x} \end{Bmatrix} \tag{2.38}$$

La Ec.(2.*38*) escrita en forma expandida será:

$$\begin{cases} k_1(0) - k_1(u_{2x}) + (0)u_{3x} = F_{1x} \\ -k_1(0) + (k_1 + k_2)u_{2x} - k_2(u_{3x}) = F_{2x} \\ (0)(0) - k_2(u_{2x}) + k_2(u_{3x}) = F_{3x} \end{cases} \tag{2.39}$$

Donde F_{1x} es la reacción de fuerza desconocida y F_{2x} y F_{3x} son las cargas aplicadas conocidas.

Escribiendo la segunda y tercera Ec.(2.*39*) en forma matricial tenemos:

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_{2x} \\ u_{3x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{2x} \\ F_{3x} \end{Bmatrix} \tag{2.40}$$

Donde hemos eliminado la ahora la primera columna y fila de *K* y la primera fila de *d* y *F* para llegar a la Ec.(2.*40*). Para condiciones de fronteras homogéneas, la Ec.(2.*40*) pudo haber sido obtenida directamente borrando la primera fila y columna de la Ec.(2.*38*) correspondiéndose con cero grados de libertad de desplazamiento.

Después de resolver la Ec.(2.*40*) para u_{2x} y u_{3x} tenemos:

$$\begin{Bmatrix} u_{2x} \\ u_{3x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} F_{2x} \\ F_{3x} \end{Bmatrix} \tag{2.41}$$

u_{2x} y u_{3x} son conocidos de la Ec.(2.40), nosotros los sustituimos en la primera de las ecuaciones para obtener la fuerza de reacción F_{1x} como:

$$F_{1x} = -k_1(u_{2x}) \tag{2.42}$$

O podemos expresar las fuerzas nodales desconocidas en el nodo 1 (también llamadas fuerzas de reacción) en términos de fuerzas nodales aplicadas F_{2x} y F_{3x}. Empleando la Ec.(*2.41*) para u_{2x} y sustituyendo en la Ec.(*2.42*). El resultado será:

$$F_{1x} = -F_{2x} - F_{3x} \tag{2.43}$$

Para todas las condiciones de frontera, nosotros podemos borrar la línea y la columna correspondiente al grado de libertad de cero desplazamientos del conjunto de ecuaciones originales y entonces resolver los desplazamientos desconocidos. Este procedimiento es útil para cálculos manuales.

Ahora considerando el caso de **condiciones de fronteras no homogéneas**. Aquí algunos de los desplazamientos especificados son diferentes de cero. Por causa de simplicidad, asumiremos $u_{1x} = \delta$, donde δ es un desplazamiento conocido.

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta \\ u_{2x} \\ u_{3x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{2x} \\ F_{3x} \end{Bmatrix} \tag{2.44}$$

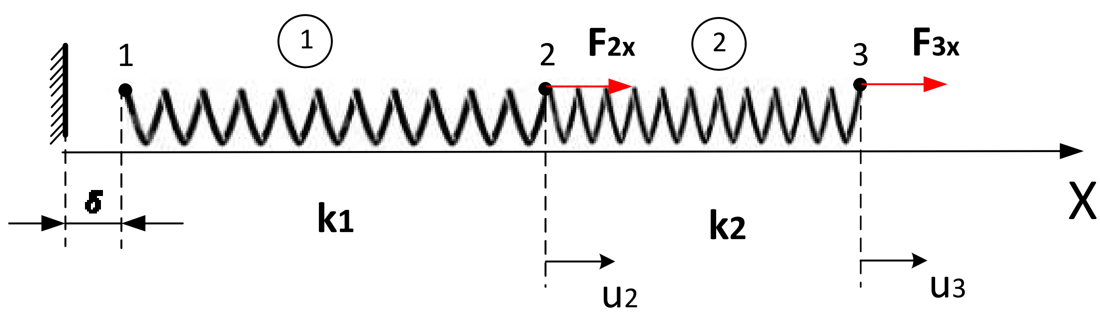

Figura 2.9 Ensamblaje de dos resortes con desplazamientos conocido para el nodo 1.

La Ec.(2.*44*) escrita en forma expandida es:

$$\begin{cases} k_1(\delta) - k_1(u_{2x}) + (0)u_{3x} = F_{1x} \\ -k_1(\delta) + (k_1 + k_2)u_{2x} - k_2(u_{3x}) = F_{2x} \\ (0)(\delta) - k_2(u_{2x}) + k_2(u_{3x}) = F_{3x} \end{cases} \tag{2.45}$$

Donde ahora F_{1x} es una reacción del soporte que se ha desplazado una magnitud δ.

Considerando las ecuaciones segunda y tercera de Ec.(2.*45*) las cuales tienen fuerzas nodales conocidas al lado derecho de la ecuación obtenemos:

$$\begin{gathered} -k_1(\delta) + (k_1 + k_2)u_{2x} - k_2(u_{3x}) = F_{2x} \\ (0)(\delta) - k_2(u_{2x}) + k_2(u_{3x}) = F_{3x} \end{gathered} \tag{2.46}$$

Transformando la anterior ecuación tenemos:

$$\begin{gathered} (k_1 + k_2)u_{2x} - k_2(u_{3x}) = k_1\delta + F_{2x} \\ -k_2(u_{2x}) + k_2(u_{3x}) = F_{3x} \end{gathered} \tag{2.47}$$

Escribiendo la Ec.(2.*47*) en forma matricial tenemos:

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{2x} \\ u_{3x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_1\delta + F_{2x} \\ F_{3x} \end{Bmatrix} \tag{2.48}$$

Por consiguiente, cuando tratamos con condiciones de fronteras o homogéneas, no podemos anular la fila 1 y la columna 1 de la Ec.(2.44) inicialmente , que corresponden a condiciones de fronteras no homogéneas como es indicado por la Ec.(*2.48*) resultante , porque estamos multiplicando cada elemento por un número diferente de cero. Si nosotros hubiéramos despreciado el termino $k_1\delta$ en la Ec.(*2.48*), esto resultaría en un error en la solución para el desplazamiento.

Para condiciones de fronteras no homogéneas, debemos en general transformar las condiciones asociadas con los desplazamientos conocidos a la matriz de fuerza de lado derecho, antes de resolver los desplazamientos nodales desconocidos. Esto se mostró transformando el término $k_1\delta$ de la segunda Ec.(2.*46*) pasándolo al lado correcto en la segunda ecuación Ec.(2.*47*). Ahora podremos resolver los desplazamientos en la Ec.(2.*48*) de una manera similar a la usada para resolver la Ec.(2.*40*) . Dejamos para lector continuar con la solución de Ec.(2.*48*) más allá ya que ninguna nueva información será obtenida.

Sin embargo, sustituyendo el desplazamiento en la Ec.(2.*45*) la reacción se vuelve ahora como:

$$F_{1x} = k_1\delta - k_1(u_{2x}) \tag{2.49}$$

La cual es diferente de la Ec.(2.*42*) para F_{1x}.

En resumen, podemos establecer algunas propriedades de la matriz de rigidez en la Ec.(2.*44*) que son también aplicables a la generalización del método de los elementos finitos.

1. K es simétrica, como lo es cada una de las matrices de rigidez de cada elemento.
2. K es singular, por lo que no tendrá inversa hasta que sean colocadas suficientes condiciones de fronteras para suprimir la inversa y evitar el movimiento de cuerpo rígido de la estructura.
3. Los términos de la diagonal K son siempre positivos.

En general, las condiciones de apoyo especificadas son tratadas matemáticamente dividiendo las ecuaciones globales de equilibrio como sigue:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \tag{2.50}$$

Donde permitimos que u_1 sea un desplazamiento libre y u_2 es el desplazamiento especificado. De la Ec.(2.50) tenemos:

$$\begin{gathered} K_{11}U_1 = F_1 - K_{12}U_2 \\ F_2 = K_{21}U_1 + K_{22}U_2 \end{gathered} \tag{2.51}$$

Donde F_1 son las fuerzas nodales conocidas y F_2 son las fuerzas nodales desconocidos en los desplazamientos especificados de los nodos. F_2 se obtiene mediante la segunda ecuación de Ec.(2.51) después que U_1 sea determinado por la primera ecuación de Ec.(2.51). En la primera ecuación de Ec.(2.51) asumimos que K_{11} no es singular, permitiendo así la determinación de U_1.

Bibliografía

Alves Filho, Avelino. 2018. *Elementos Finitos–A Base Da Tecnologia CAE*. Editora Saraiva.