MODELADO DE SISTEMAS MECÁNICOS EMPLEANDO EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

Henry Figueredo Losada

Universidad de la República-Uruguay
IIMPI-FING

henryf@fing.edu.uy

9 de septiembre de 2020

Sumario

CLASE 3. FORMULACIÓN DE ELEMENTOS FINITOS TIPO RESORTES.

TEMA II. FORMULACIÓN DE ELEMENTOS FINITOS 1D-ESTÁTICOS.

TEMA II. FORMULACIÓN DE ELEMENTOS FINITOS 1D-ESTÁTICOS.

CLASE 3. FORMULACIÓN DE ELEMENTOS FINITOS TIPO RESORTES.

1. Introducción.
2. Definición de Matriz de Rigidez.
3. Derivación de la Matriz de Rigidez para un Elemento Tipo Resorte.
4. Ejemplo de ensamblaje con elementos de Resorte.
5. Ensamblaje de la matriz de rigidez total por superposición (Método de Rigidez Directo).
6. Teorema de reciprocidad de Maxwell-Betti

1. Introducción.

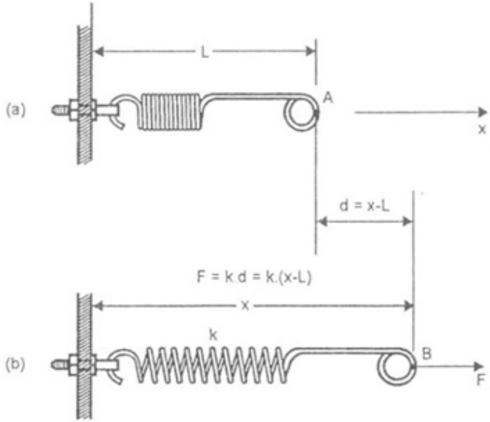
En el aula anterior vimos que, en el método de los elementos finitos en el ámbito de las aplicaciones estructurales, donde existe un interés del análisis para la determinación de la configuración deformada de la estructura, a partir del cálculo de los desplazamientos nodales.

La gran tarea del análisis de estructuras es `determinar la relación entre las cargas que actúan en los nodos de la estructura y los desplazamientos de la estructura entera`.

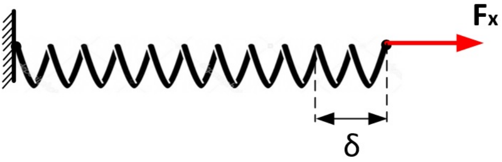
Al abordar el análisis estructural vimos que la *rigidez de la estructura entera depende de la rigidez de cada uno de sus elementos*.

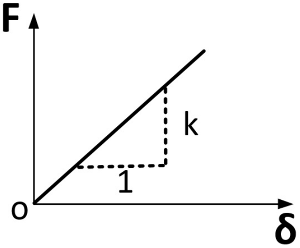
2. Definición de Matriz de Rigidez

Entender el concepto de Matriz de Rigidez es esencial para el entendimiento del Método de Rigidez. Una situación simple involucrando la constante elástica de un resorte puede ser vista en la figura:,



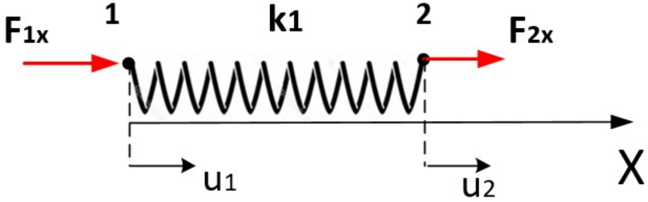
Continuación





$$F = k \cdot \delta \tag{1}$$

3. Derivación de la Matriz de Rigidez para un Elemento Tipo Resorte.



u1,u2:Desplazamientos; F1,F2: Fuerzas;

$$\textit{Resolviendo el sistema} \begin{cases} F_{2x} = (u_2 - u_1) \cdot k1 \\ F_{1x} + F_{2x} = 0 \end{cases} \tag{2}$$

3. Continuación

$$F_{1x} + (u_2 - u_1) \cdot k1 = 0$$
$$F_{1x} = -(u_2 - u_1) \cdot k1$$
$$F_{1x} = (u_1 - u_2) \cdot k1$$

Reescribiendo en forma matricial para F_{1x} y F_{2x}

$$\begin{pmatrix} F_{1x} \\ F_{2x} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} k1 & -k1 \\ -k1 & k1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Ecuación de equilibrio para un resorte.
Donde u son los desplazamientos nodales; F las fuerzas nodales;
La matriz que contiene los valores de *k1* (matriz de rigidez)

3. Continuación

Se define la Matriz de Rigidez para un elemento dado como una matriz tal que:

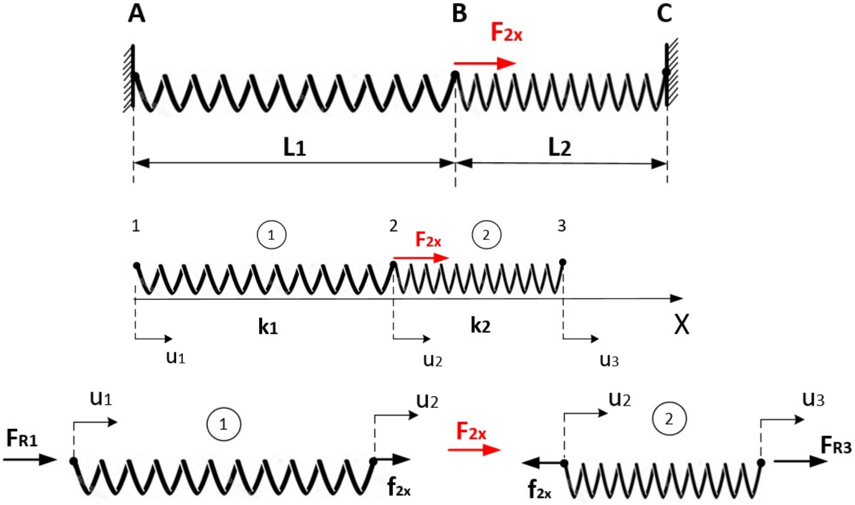
$$\{f\} = [k]\{u\} \tag{4}$$

k: relaciona los desplazamientos nodales con las fuerzas en un sistema de coordenadas locales.

Para un medio continuo o estructura que consta de una serie de elementos, una matriz de rigidez relaciona los desplazamientos nodales con las fuerzas globales en coordenadas globales (x,y,z).

$$\left\{\hat{F}\right\} = [\hat{K}]\left\{\hat{U}\right\} \tag{5}$$

4. Ejemplo de ensamblaje con elementos de Resorte



4. Continuación

Primer elemento:

$$\begin{cases} f_{2x} = (u_2 - u_1) \cdot k1 \\ F_{R1} + f_{2x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_{R1} = (u_1 - u_2) \cdot k1 \\ f_{2x} = (u_2 - u_1) \cdot k1 \end{cases} \tag{6}$$

Segundo Elemento:

$$\begin{cases} F_{R3} = (u_3 - u_2) \cdot k2 \\ F_{2x} - f_{2x} + F_{R3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_{2x} - f_{2x} & = (u_2 - u_3) \cdot k2 \\ F_{R3} & = (u_3 - u_2) \cdot k2 \end{cases} \tag{7}$$

Ecuación (6) y (7)

$$\begin{pmatrix} F_{R1} \\ f_{2x} \end{pmatrix} = k1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} y \begin{pmatrix} F_{2x} - f_{2x} \\ F_{R3} \end{pmatrix} = k2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

4. Continuación

Ensamblaje dentro de un sistema Global.

$$\begin{pmatrix} F_{R1} \\ f_{2x} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} k1 & -k1 & 0 \\ -k1 & k1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ F_{2x} - f_{2x} \\ F_{R3} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k2 & -k2 \\ 0 & -k2 & k2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad (9)$$

Sumando las Ec.(8) y (9).

$$\begin{pmatrix} F_{R1} \\ F_{2x} - f_{2x} + f_{2x} \\ F_{R3} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} k1 & -k1 & 0 \\ -k1 & k1 + k2 & -k2 \\ 0 & -k2 & k2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad (10)$$

Ecuación de equilibrio Global

4. Continuación

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_3 = 0 \end{cases} \tag{11}$$

Condiciones Globales de Fronteras

Resolviendo la Ecuación Global de Equilibrio Ec.(10)

$$(k_1 + k_2)u_2 = F_{2x} \;\;\therefore\; u_2 = \frac{F_{2x}}{(k_1 + k_2)} \tag{12}$$

$$F_{R1} = -k1 \cdot u_2 = -\frac{k1 \cdot F_{2x}}{k1 + k2} \tag{13}$$

$$F_{R3} = -k2 \cdot u_2 = -\frac{k2 \cdot F_{2x}}{k1 + k2} \tag{14}$$

Singularidad de la Matriz de rigidez del elemento

La Ec.(4) no puede ser resuelta (eje: encontrar los desplazamientos nodales) para un valor arbitrario de **F** porque la matriz **K** es singular.

$$K^{-1} = ???$$

Físicamente, eso nos dice que en equilibrio estático, los desplazamientos nodales no pueden ser determinados únicamente por un par de fuerzas aplicadas en los nodos. Uno de los nodos debe ser fijo o con un desplazamientos prescrito y de ahí el desplazamientos de la otra extremidad puede ser únicamente determinado.

Restringimos algunos nodos de la estructura significa aplicar condiciones de contorno.

Clase No.3

5. Reducción de la Matriz de rigidez

Note que cuando un desplazamiento o GL (DOF) esta restricto y vale **cero** , lineas y columnas de **k** asociadas a este desplazamiento son eliminadas y apenas lo restante de la matriz es resuelta.

$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_i \\ f_j \end{Bmatrix}$$

Línea asociada con ui

Columna asociada con ui

5. Montaje de la Matriz de rigidez global

La matriz de rigidez global es montada a través de la unión de las matrices de rigidez de cada elemento , de la siguiente forma:

matriz de rigidez Elem 1

$$\begin{bmatrix} K_1 & -K_1 & 0 \\ -K_1 & K_1 + K_2 & -K_2 \\ 0 & -K_2 & K_2 \end{bmatrix}$$

los terminos de rigidez de las 2 matrices se suman GL coincidentes

matriz de rigidez Elem 2

5. Condiciones de Contorno Homogéneas

$$\begin{bmatrix} K1 & -K1 & 0 \\ -K1 & K1+K2 & -K2 \\ 0 & -K2 & K2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \cancel{u_1}^{\,0} \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}$$

$$F_1 = K_{12}u_2$$

Fuerza de reacción desconocida Nodo 1

$$F_2 = K_{22}u_2 + K_{23}u_3$$
$$F_3 = K_{32}u_2 + K_{33}u_3$$

Fuerzas nodales desconocidas

Clase No.3

5. Continuación

Línea asociada con u_1

$$\begin{bmatrix} K1 & -K1 & 0 \\ -K1 & K1+K2 & -K2 \\ 0 & -K2 & K2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}$$

columna asociada con u_1

1. Para las condiciones de **contorno homogéneas** elimine las lineas y columnas apropiadas de la matriz de rigidez global y resuelva el conjunto reducido de ecuaciones para los desplazamientos nodales desconocidos.
2. Desplazamientos y Fuerzas no pueden ser conocidos en el mismo nodo. Si el desplazamiento es desconocido , la fuerza en ese nodo es conocida y viceversa.

5. Condiciones de Contorno no Homogéneas

$$\begin{bmatrix} K1 & -K1 & 0 \\ -K1 & K1+K2 & -K2 \\ 0 & -K2 & K2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \overset{\delta}{\cancel{u_1}} \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}$$

$$F_1 = K_{11}\delta + K_{12}u_2$$

Fuerza de reacción desconocida Nodo 1

$$F_2 = K_{21}\delta + K_{22}u_2 + K_{23}u_3$$
$$F_3 = K_{32}u_2 + K_{33}u_3$$

Fuerzas nodales desconocidas

5. Continuación

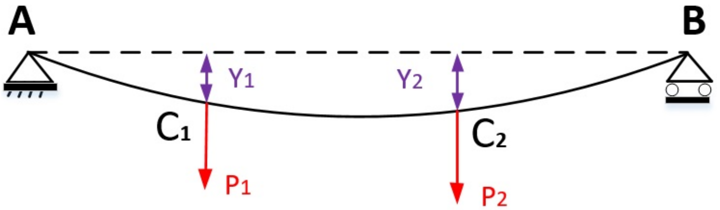
Para las condiciones de **contorno no Homogéneas:**

$$\therefore \begin{pmatrix} F_2 - K_{21}\delta \\ F_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} K_{22} & K_{23} \\ K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

1. Elimine las lineas y columnas apropiadas de la matriz de rigidez global y resuelva el conjunto reducido de ecuaciones para los desplazamientos nodales desconocidos.
2. No olvide de modificar el lado izquierdo de la ecuación !!!.

6. Teorema de reciprocidad de Maxwell-Betti

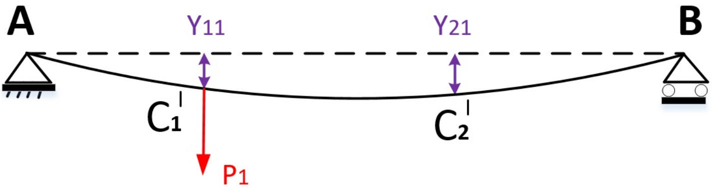
Consideremos una viga elástica AB sometida a 2 cargas concentradas P1 y P2. La energía de deformación de la viga es igual al trabajo de P1 y P2 cuando son aplicadas lentamente en la viga en C1 y C2 , respectivamente



Para calcular este trabajo vamos a expresar las deflexiones y1 y y2 en función de las cargas P1 y P2.

6. Continuación

Aplicamos solo P1 , se observa que se deflectan C1(linea) y C2(linea)



Sus deflexiones son proporcionales a la carga P1.

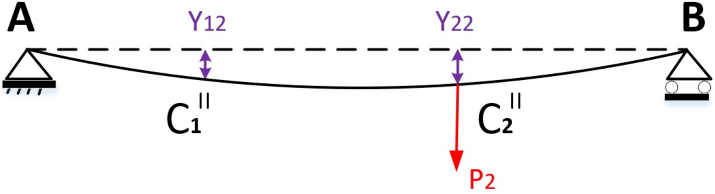
$$y_{11} = \alpha_{11} P_1 \tag{15}$$

$$y_{21} = \alpha_{21} P_1 \tag{16}$$

α_{21} y α_{21}, son constantes llamadas *coeficientes de influencia*, que representan la deflexión de C1 y C2, cuando se aplica una carga unitaria en C1 y son características de la viga AB.

6. Continuación

Aplicamos ahora solo P2 , se observa que se deflectan C1(2 linea) y C2(2 linea)



Sus deflexiones son proporcionales a la carga P2.

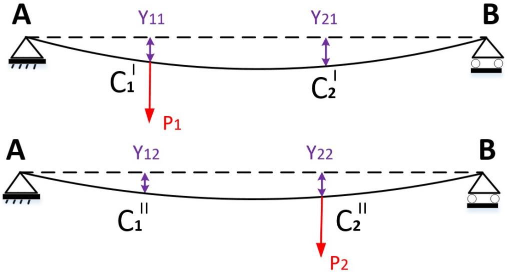
$$y_{12} = \alpha_{12} P_2 \tag{17}$$

$$y_{22} = \alpha_{22} P_2 \tag{18}$$

α_{12} y α_{22}, *coeficientes de influencia*, que representan la deflexión de C1 y C2, cuando se aplica una carga unitaria en C2.

6. Continuación

Utilizando el principio de superposición cuando ambas cargas están aplicadas



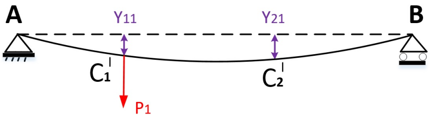
Sus deflexiones son proporcionales a la carga P2.

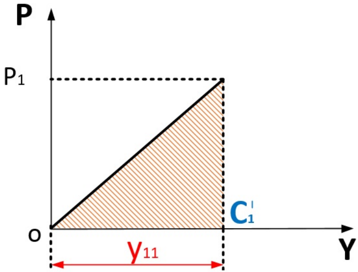
$$y_1 = y_{11} + y_{12} = \alpha_{11} P_1 + \alpha_{12} P_2 \tag{19}$$

$$y_2 = y_{21} + y_{22} = \alpha_{21} P_1 + \alpha_{22} P_2 \tag{20}$$

6. Continuación

Para calcular el W realizado por P1 y P2 , y la U de la viga como:



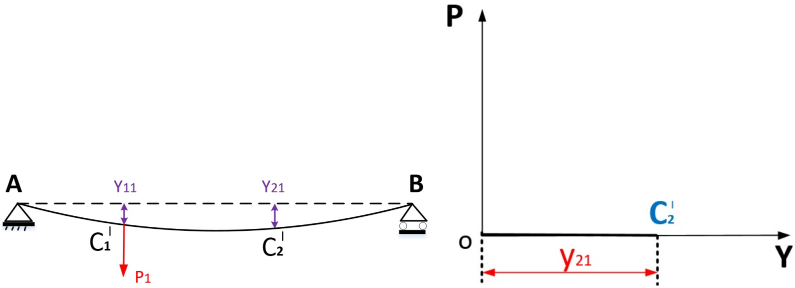


El W de P1 se expresa como:

$$W = \frac{1}{2}P_1 \cdot y_{11} = \frac{1}{2}P_1 \cdot (\alpha_{11}P_1) = \frac{1}{2}\alpha_{11} \cdot P_1^2 \tag{21}$$

6. Continuación

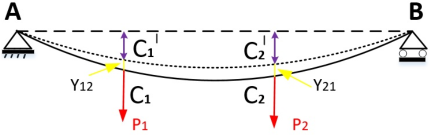
Se observa que P2 no trabaja mientras C2(linea) se mueve hacia Y21.

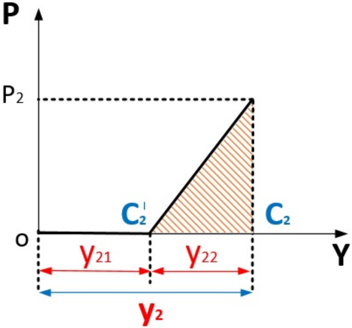


Clase No.3

6. Continuación

Aplicando ahora P2.

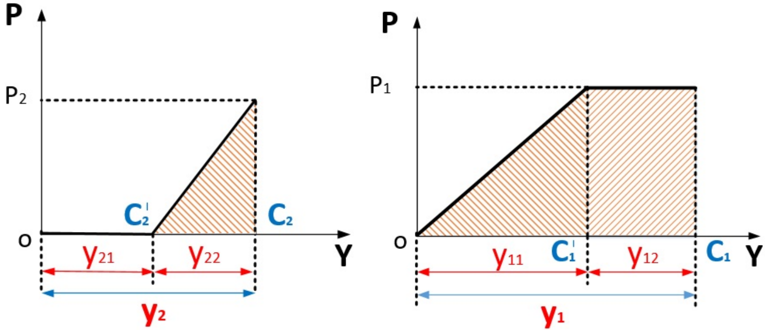




$$W = \frac{1}{2}P_2 \cdot y_{22} = \frac{1}{2}P_2 \cdot (\alpha_{22}P_2) = \frac{1}{2}\alpha_{22} \cdot P_2^2 \qquad (22)$$

6. Continuación

Al aplicar P2 lentamente en C2, como la carga P1 esta completamente aplicada durante este desplazamiento , la carga P1 trabaja.



$$W = P_1 \cdot y_{12} = P_1 \cdot (\alpha_{12} P_2) \tag{23}$$

6. Continuación

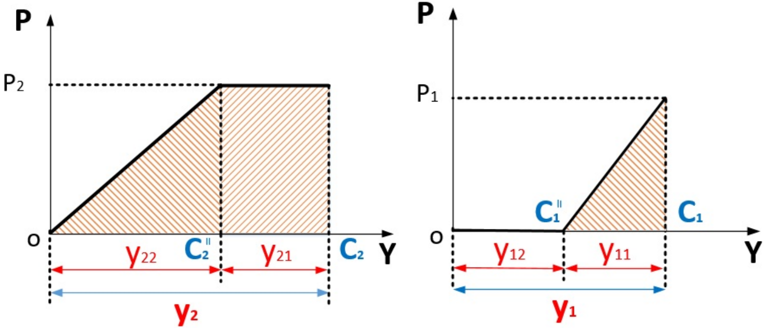
Sumando las expresiones obtenidas Ec.(21);(22);(23), la energía de deformación de la viga sometida a las cargas P1 y P2 se expresa como:

$$U = \frac{1}{2}\alpha_{11} \cdot P_1^2 + \frac{1}{2}\alpha_{22} \cdot P_2^2 + \alpha_{12} \cdot P_2 P_1 \tag{24}$$

¿ Si primero se hubiera aplicado la carga P2 a la viga ?

6. Continuación

Calculo similar a los efectuados anteriormente



Conducen a la siguiente expresión

$$U = \frac{1}{2}\alpha_{11} \cdot P_1^2 + \frac{1}{2}\alpha_{22} \cdot P_2^2 + \alpha_{21} \cdot P_2 P_1 \tag{25}$$

Igualando las energías de deformación

6. Continuación

Tenemos:

$$\alpha_{12} \cdot P_1 P_2 = \alpha_{21} P_1 P_2 \quad \therefore \alpha_{12} = \alpha_{21} \tag{26}$$

Volviendo a la expresión anterior sustituyendo $\alpha_{12} P_2 = Y_{12}$; $\alpha_{21} P_1 = Y_{21}$

$$P_1 \cdot Y_{12} = P_2 \cdot Y_{21} \tag{27}$$

Conclusión

La deflexión producida en C1 por una carga unitaria , aplicada en C2 ,es igual a la deflexión producida en C2 por una carga unitaria aplicada en C1.

[Comentario de equivalencia al cuerpo]