**Facultad de Ingeniería - Universidad de la República**
**ALGORITMOS DE APROXIMACIÓN**
**LISTA DE PROBLEMAS (2023)**

**Ejercicio 1**
Sea $G = (V, E)$ un grafo bipartito y sea $M_G = (m_{ij})$ la matriz de tamaño $|V| \times |E|$ tal que $m_{ij} = 1$ si $\{i, j\} \in E$ o $m_{ij} = 0$ si no. Probar que $M$ es una matriz totalmente unimodular. Dar un ejemplo de grafo $G$ tal que $M_G$ no sea totalmente unimodular.

**Ejercicio 2**
Probar que si $\Pi_1$ y $\Pi_2$ son dos COP, $(g_1, g_2)$ es una reducción de $\Pi_1$ a $\Pi_2$ que preserva el factor de aproximación y $\mathcal{A}$ es un algoritmo de aproximación de factor $\alpha$ para $\Pi_2$, entonces $\mathcal{A}' = g_2 \circ \mathcal{A} \circ g_1$ es un algoritmo de aproximación de factor $\alpha$ para $\Pi_1$.

**Ejercicio 3**
Probar que existe algún algoritmo de aproximación de factor 2 para el problema de Steiner.

**Ejercicio 4**
Probar la existencia de algún algoritmo de aproximación de factor 3/2 para el TSP métrico.

**Ejercicio 5**
Sea $G = (V, E)$ un grafo con costos racionales no negativos en sus aristas y dos conjuntos disjuntos de vértices: los emisores $S$, y los receptores, $R$. Se desea hallar un subgrafo de costo mínimo que una con caminos a cada receptor con al menos un emisor. Probar que:

- Si $V = S \cup R$ entonces el problema pertenece a la clase $\mathcal{P}$.
- Si $V \neq S \cup R$ entonces el problema es $\mathcal{NP}$-difícil y pertenece a la clase APX.

**Ejercicio 6**
Demostrar que en el Problema plano Euclídeo de Steiner, todo vértice de Steiner tiene grado 3, y sus segmentos incidentes se hallan a 120 grados.

**Ejercicio 7**
Demostrar que en MAX $k$-CUT la heurística golosa garantiza un factor $1 - \frac{1}{k}$.
Dar una familia justa para el algoritmo.

**Ejercicio 8**
Formular MST mediante programación lineal entera de modo que su relajación sea integral.

**Ejercicio 9**
Derivar el Teorema Minimax de Teoría de Juegos utilizando el Teorema de Dualidad LP.

**Ejercicio 10**
Construir un algoritmo de factor 2 para el $k$ECON.

**Ejercicio 11**
Construir un algoritmo de aproximación de factor 2 para el problema de cubrimiento de vértices de peso mínimo.

**Ejercicio 12**
Probar que la función $f(p_1, p_2, \ldots, p_n) = \prod_{i=1}^{n}(1 - p_i)$ sujeto a que $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ y $(p_1, p_2, \ldots, p_n) \in [0,,1]^n$ se maximiza cuando $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = 1/n$.

**Ejercicio 13**
Probar que la función de requerimientos del problema de Redes de Steiner es débilmente supermodular.